

# Festigkeitstheorien von anisotropen Stoffen mit sprödem Bruchverhalten

## Teil 1: Vergleich und Beurteilung der anisotropen Festigkeitskriterien auf Grund von theoretischen Überlegungen

József SZALAI\*

Institut für Technische Mechanik und Tragwerke, Westungarische Universität, Sopron, Ungarn

**Zusammenfassung** – Um die Tragfähigkeit von Konstruktionen aus anisotropen Werkstoffen beurteilen zu können, wird eine Festigkeitstheorie benötigt. Von den Festigkeitshypothesen, die im vorigen Jahrhundert aufgestellt wurden, können drei, als allgemeingültig betrachtet werden, das heisst sie können für alle Arten der Anisotropie des Werkstoffes und beliebige Spannungszustände verwendet werden. Jede dieser Theorien kann durch eine Festigkeitsoberfläche (das ist eine Hyperoberfläche im Raum der sechs Spannungskomponenten) veranschaulicht werden. Jeder Punkt dieser Fläche stellt einen Spannungszustand im Grenzzustand des Versagens dar und soll im Folgenden als Spannungspunkt bezeichnet werden. Für zähe Stoffe sind diese Oberflächen immer konvex. Es ist zu beweisen, dass diese Oberflächen für Stoffe mit sprödem Bruch auch konkave Flächenteile – im Einklang mit der Praxis – beinhalten können. Die Relationen der Festigkeitshypothesen können so umgestaltet werden, dass auf einer Seite der Bestimmungsgleichung ein Ergänzungspotential, bzw. eine zu ihm proportionale Grösse bleibt. So interpretiert, behaupten die Theorien von Mises und Tsai-Wu, dass das bis zum Bruch angehäuften Ergänzungspotential eine Konstante und somit unabhängig von der Orientierung der Hauptspannungen gegenüber der Hauptachsen der Anisotropie ist. Diese unserer physikalischen Vorstellung widersprechende Schlussfolgerung wird allein von dem Kriterium von Ashkenasi nicht gefolgt, es sagt im Gegenteil aus, dass das bis zum Bruch angehäuften Ergänzungspotential keine Konstante, sondern eine Funktion der Invarianten des Spannungszustandes und damit indirekt der Orientierung ist. Unsere Feststellungen gelten in erster Linie für das natürliche Holz und für die Holzwerkstoffe, können aber für jeden anisotropen Stoff mit sprödem Bruchverhalten zu erweitert werden.

**anisotrope Festigkeitstheorien / zusammengesetzter Spannungszustand / ergänzungspotenzial von anisotropen Stoffen / technische Festigkeiten / Holz- und Holzwerkstoffe**

**Abstract** – **Strength-theories of anisotropic materials with brittle rupture. Part 1: Comparison and adjudication of anisotropic strength-criteria by virtue of theoretical considerations.** The sizing of load-bearing anisotropic structures needs strength-criterion theories. Three of these hypothesises from the last century seem to be generally acceptable, so they are adaptable to all anisotropic materials in optional tensional status. A strength surface (a 6-dimensions hyper surface in the place of the stress-components) meets all theories. If they are tough materials, these surfaces can

\* jkszalai@fmk.nyme.hu; H-9401 SOPRON, Pf. 132

be only convex. Demonstrable – according the tests: the bunging surfaces with brittle rupture materials can content concave parts, too. The bunging relations can be transformed having one site supplementary potential or rather proportional expressions. In this interpretation the theses of von Mises and of Tsai-Wu affirm the supplementary potential to bunging is constant and depends not on the orientation. The not reconcilable to this approach consequence is not followed by the Ashkenasi-theory affirming the accumulated to the break supplementary potential is not constant, but depends on invariants of the stress state, mediately on orientation. These statements apply first of all to wood and wood-based materials, but can be extended to all anisotropic materials with brittle rupture.

**combined stress state / brittle rupture / anisotropic strength-theories / complementary energy / engineering strengths / wood and wood based materials**

**Kivonat – Ridegen törő anizotrop anyagok tönkremeneteli elméletei. 1. rész: Az anizotrop tönkremeneteli kritériumok összehasonlítása és megítélése elméleti meggondolások alapján.** Az anizotrop anyagú teherviselő szerkezetek méretezéséhez szükség van valamilyen tönkremeneteli elméletre. Az elmúlt században megalkotott tönkremeneteli hipotézisek közül három általános érvényűnek tekinthető jelenik meg a szakirodalomban. Ezek bármilyen jellegű anizotrópia és tetszőleges feszültségi állapot esetén alkalmazhatók. Ezen elméletek megalkotói: von Mises, R. (1928); Ashkenasi, E.K. (1966); Tsai, S.W. és Wu, E.M. (1971). Mindhárom elmélet szemléltethető egy ún. szilárdsági felülettel (ami egy hiperfelület a feszültség-komponensek hatdimenziós terében). Amennyiben egy kritikus pontban a feszültségi állapotnak megfelelő képpont rajta van a hiperfelületen, az anyag éppen a tönkremenetel határállapotában van. Ha a feszültségi képpont a felületen kívül helyezkedik el, az anyag tönkrementnek tekintendő. Szívós anyagoknál a tönkremeneteli felület mindig konvex. Bizonyítható - és a gyakorlatban is tapasztalható - hogy rideg anyagoknál a felület konkáv részeket is tartalmazhat. A szilárdsági kritériumokat megfogalmazó relációk átalakíthatók úgy, hogy az egyik oldalon kiegészítő potenciál, ill. azzal arányos mennyiség szerepeljen. Így értelmezve a von Mises- és Tsai-Wu-elméletek szerint az anyag tönkremenetelének pillanatában, a törésig felhalmozott kiegészítő potenciál a főfeszültségek orientációs helyzetétől függetlenül konstans. Ezt a fizikai elképzelésünknek ellentmondó megállapítást egyedül az Askenazi elmélet nem feltételezi. Éppen ellenkezőleg, azt mondja ki, hogy a tönkremenetelig felhalmozott kiegészítő potenciál nem állandó, hanem a feszültségi állapot első két invariánsának – s ezzel indirekt módon az orientációnak – függvénye. Megállapításaink elsősorban a természetes faanyagra és a faalapú anyagokra vonatkoznak, de minden ridegen törő anizotrop anyagra kiterjeszthetők.

**anizotrop szilárdságelméletek / összetett feszültségi állapot / anizotrop anyagok kiegészítő potenciálja / technikai szilárdságok / faanyag és faalapú anyagok**

## 1 EINLEITUNG

Die komplizierte innere Struktur und die sich dadurch ergebende Inhomogenität und Anisotropie des Holzes können bei der Bestimmung der Tragfähigkeit von Holzkonstruktionen auf Grund der für sie geltenden Normen und Vorschriften nur in sehr begrenztem Umfang berücksichtigt werden. Besondere Bedeutung erhält dieses Problem, wenn Voraussagen über die Tragfähigkeit und Sicherheit projektierte Holzkonstruktionen gefällt werden sollen.

Üblicherweise herrscht in den kritischen Punkten der zu untersuchenden Konstruktionen ein mehrachsiger Spannungszustand. Für die Beschreibung des Materialverhaltens in derartigen Fällen wurden auch für isotrope Werkstoffe Festigkeitshypothesen aufgestellt. Die Aufgabe ist in zwei Fragestellungen zu teilen. Die erste Frage: wie ändert sich die Festigkeit im Falle eines verhältnismässig einfachen Spannungszustandes (wie z.B. bei reiner Zug-, Druck- und Scherbeanspruchung) in Abhängigkeit der Orientierung. Auf Grund der Erfahrung für die Beschreibung der Elastizität ergibt sich automatisch der Gedanke, die

Festigkeit hat selbst eine Tensorqualität und der Festigkeitstensor soll mindestens vierten Ranges sein. Werden die Tensorkomponenten sorgfältig gewählt, können die zu den verschiedenen Richtungen gehörenden Normal- und Scherfestigkeiten mit Hilfe der Regel der Tensortransformation leicht bestimmt werden. Das zweite Problem heisst: wird der Bruchspannungszustand in einem mechachsigen Spannungszustand gesucht, wird eine geeignete sogenannte Festigkeits- oder Bruchhypothese gebraucht. In dem vergangenen Jahrhundert haben Forscher als Ergebnis ihrer theoretischen und praktischen Arbeit viele Festigkeitshypothesen für anisotrope Stoffe ergründet. Die Mehrzahl dieser sind nur für spezielle Spannungszustände zu verwenden. Zu Ende des Jahrhunderts haben sich jedoch einige Festigkeitshypothesen allgemeiner Gültigkeit auskristallisiert, welche von den Wissenschaftlern akzeptiert und untersucht wurden. Diese Festigkeitskriterien wurden nicht ausgesprochen für Holz, sondern für beliebige anisotrope Stoffe, in erster Linie für faserverstärkte Kunststoffe aufgestellt. Bei der Auswahl eines Bruchkriteriums soll die Art des Versagens berücksichtigt werden. Bei vielen anisotropen Stoffen wird eine grosse Formänderung und ein plastisches und verfestigendes Verhalten zugrundegelegt. Das Versagen von natürlichem Holz, Holzwerkstoffen und den meisten faserverstärkten Kunststoffen ist spröde, der Bruch erfolgt schlagartig bei einer kleinen Deformation. Die Festigkeitshypothesen sollen aus dieser Sicht geprüft werden, ob sie die zähe oder spröde Art des Versagens widerspiegeln können. Der andere Gesichtspunkt der Untersuchungen bedeutet die Analyse, ob der physikalische Inhalt der Festigkeitskriterien nicht zu irgendeinem Widerspruch führt.

Im Folgenden sollen drei Bruchhypothesen und zwar die Hypothese von Mises, die von Tsai-Wu und die von Ashkenasi untersucht werden. Es ist bemerkenswert, dass obwohl die Theorien für das Intaktbleiben bzw. Versagen ihre eigene Relation verwenden, in den für die Bestimmung der in den verschiedenen Kriterien befindlichen Koeffizienten brauchen die gleichen technischen Festigkeitswerte auftreten.

## 2 FESTIGKEITSTHEORIEN FÜR ANISOTROPE STOFFE

Auf Grund der Fachliteratur gilt die folgende allgemeine Polynom-Gleichung als Festigkeitsskriterium (Szalai, J. 1994):

$$t_{ij}\sigma^{ij} + t_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} + t_{ijklmn}\sigma^{ij}\sigma^{kl}\sigma^{mn} + t_{ijklmnop}\sigma^{ij}\sigma^{kl}\sigma^{mn}\sigma^{op} + \dots \leq c, \quad (2.1)^\dagger$$

mit  $i, j, k, l, m, n, o, p, \dots = 1, 2, 3,$

wobei

$\sigma^{ij}$  – den Tensor der wirkenden Spannungen, bzw. die Spannungskomponenten bedeute,

und

$t_{ij}, t_{ijkl}, t_{ijklmn}, t_{ijklmnop}, \dots$  – Festigkeitstensoren 2-, 4-, 6-, 8-, ... -en Ranges, und

$c$  – ein beliebiges Skalar sind.

Wird die Relation erfüllt, bleibt das Material stabil und es tritt kein Versagen auf. Die einzelnen Festigkeitstheorien unterscheiden sich voneinander eigentlich nur darin, welche und wie viele Glieder der Gleichung (2.1) berücksichtigt werden.

<sup>†</sup> Hier und auch später wird die Einstein'sche Summationsregel verwendet.

## 2.1 Die von Mises'sche Festigkeitstheorie

R. von Mises (1928) hat in seiner Theorie nur das zweite Glied der Gleichung (2.1) behalten. Sein Festigkeitskriterium lautet somit:

$$t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} \leq 1, \quad \text{mit } i, j, k, l = L, R, T, \quad (2.2)$$

$L, R, T$  – sind die anatomischen Hauptrichtungen des Holzes.

Nimmt man den Begriff des – von Mises vorgeschlagenen – plastisches Potentials an, ist der Festigkeitstensor vierten Ranges symmetrisch ( $t_{ijkl} = t_{klij}$ ) und besitzt im Falle einer allgemeinen Anisotropie 21 von einander unabhängige Komponenten. Verfügt das Material über eine orthogonale Anisotropie, sinkt die Zahl der unabhängigen Komponenten auf 9. Die neun Komponenten des Holzes (oder eines orthotropen Holzwerkstoffes) können durch die experimentell bestimmbaren, sog. technischen Festigkeiten ausgedrückt werden:

$$t_{iiii} = \frac{I}{(f_i^+)^2} \quad \text{oder} \quad = \frac{I}{(f_i^-)^2}, \quad \text{mit } i = L \text{ oder } R \text{ oder } T, \quad (2.3/a)$$

wobei

$f_i^+$  und  $f_i^-$  – Zug- bzw. Druckfestigkeiten in den anatomischen Hauptrichtungen, und

$$(t_{ijij} + t_{ijji} + t_{jijj} + t_{jjii}) = \frac{1}{(t_{ij})^2}, \quad \text{mit } i, j = L, R, \text{ oder } L, T, \text{ oder } R, T, \quad (2.3/b)$$

wobei

$t_{ij}$  – die Scherfestigkeiten in den anatomischen Hauptebenen sind.

Die physikalische Interpretation der sog. interaktiven Festigkeitskomponenten kann zwar nicht anschaulich ausgedrückt werden, zu ihrer Bestimmung gibt es aber mehrere Ansätze. Werden die Normalfestigkeiten in der Richtung der Winkelhalbierenden zwischen den anatomischen Hauptebenen gemessen, ergeben sich für die Komponenten des Festigkeitstensors folgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} (t_{ijij} + t_{jiii}) &= \frac{4}{(f_{ij}^{k(45)+})^2} - \frac{1}{(f_i^+)^2} - \frac{1}{(f_j^+)^2} - \frac{1}{(t_{ij}^+)^2}, \\ (t_{ijij} + t_{jiii}) &= \frac{4}{(f_{ij}^{k(45)-})^2} - \frac{1}{(f_i^-)^2} - \frac{1}{(f_j^-)^2} - \frac{1}{(t_{ij}^+)^2}, \end{aligned} \right\} \quad 2.3/c$$

mit  $i, j = L, R, \text{ oder } L, T, \text{ oder } R, T,$

wobei

$f_{ij}^{k(45)+}, f_{ij}^{k(45)-}$  – Zug- bzw. Druckfestigkeiten in Richtung der Winkelhalbierenden gegenüberden Achsen  $i$ - $j$  sind.

Die übrigen Komponenten des Festigkeitstensors verschwinden.

Gl. (2.1) kann als eine Hyperoberfläche im Raum der neun Spannungskomponenten gedeutet werden. Diese kann im Falle eines ebenen Spannungszustandes grafisch als Fläche leicht dargestellt werden. Im orthotropen Fall und ebenen Spannungszustand kann die Schubspannungskomponente aus der Gl. (2.2) ausgedrückt werden und ergibt:

$$\sigma^{ij} = \sqrt{\frac{1 - t_{iii}\sigma^{ii}\sigma^{ii} - t_{jjj}\sigma^{jj}\sigma^{jj} - (t_{ijj} + t_{jji})\sigma^{ii}\sigma^{jj}}{t_{ijj} + t_{iji} + t_{jjj} + t_{jji}}}, \quad (2.4)$$

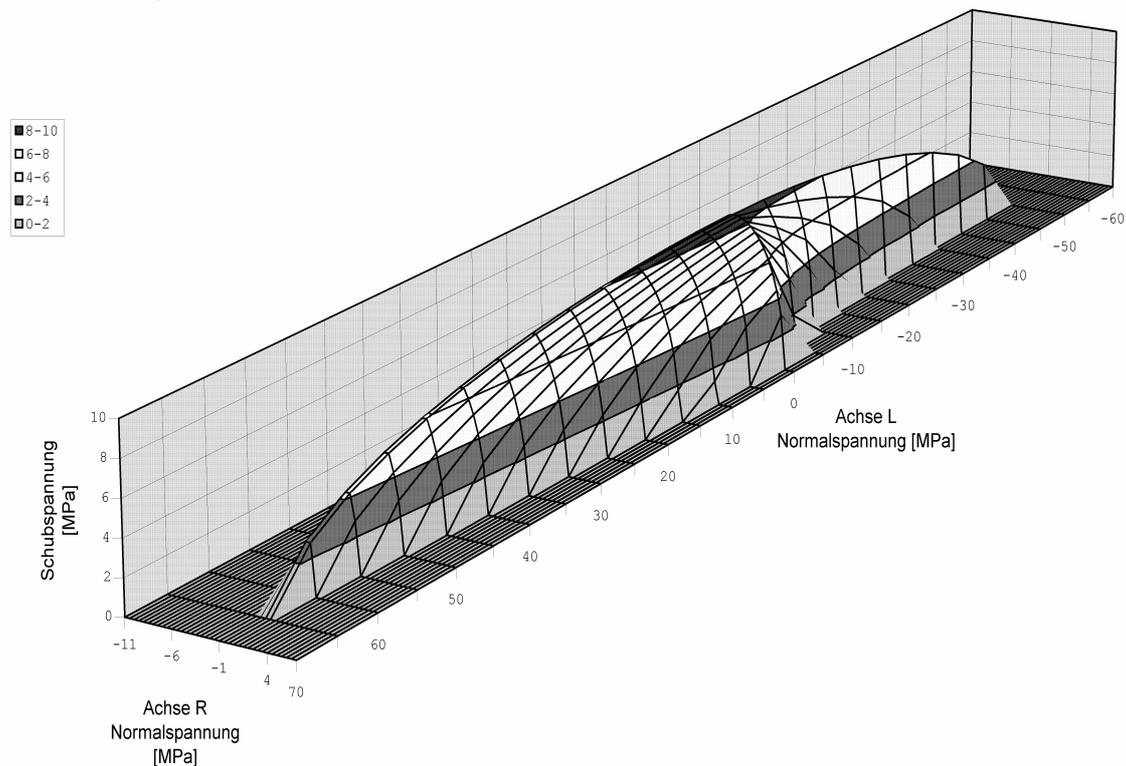
mit  $i, j = L, R$  oder  $L, T$  oder  $R, T$ .

Theoretisch ist diese Fläche ein Ellipsoid, dessen Hauptachsen mit den Spannungs-koordinaten zusammenfallen. Am *Bild 1* wurde die Festigkeitsoberfläche von Fichtenholz (*Picea abies* Karst.) in der Ebene  $L$ - $R$  dargestellt. Die dazu verwendeten technischen Festigkeiten (Wittmann, Gy. et al. 2001) zeigt *Tabelle 1*.

*Tabelle 1. Technische Festigkeiten von Fichtenholz (Picea abies Karst.) in der L-R Ebene.*  
*Table 1. Engineering strength in the plane L-R of spruce (Picea abies Karst).*

<b>Fichtenholz</b>		$f_L^+$	$f_L^-$	$f_{LR}^{T(45)+}$	$f_{LR}^{T(45)-}$	$f_R^+$	$f_R^-$	$t_{LR}$
Grösse der Strichprobe	(Stück)	315	319	292	325	302	291	-
Mittelwert	(MPa)	63,52	49,34	9,15	9,08	5,92	3,49	9,32
Absolute Streuung	(MPa)	15,00	8,87	2,62	2,32	1,67	0,78	4,01
Relative Streuung	(%)	23,62	17,98	28,59	25,54	28,18	22,37	42,99

**Festigkeitsoberfläche der Fichte in der Ebene L-R nach der Theorie von von Mises**



*Bild 1. Die von Mises'sche Festigkeitsoberfläche in der Ebene L-R von Fichtenholz*  
*Figure 1. Strength surface of von Mises in the plane L-R of spruce.*

## 2.2 Die Tsai-Wu'sche Festigkeitstheorie

S.W. Tsai und E.M. Wu, (1971) haben das erste und das zweite Glied der Gleichung (2.1) beibehalten. Ihr Festigkeitskriterium hat somit die Form:

$$t_{ij}\sigma^{ij} + t_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} \leq 1, \quad \text{mit } i,j,k,l = L, R, T. \quad (2.5)$$

Die Komponenten des Tensors zweiten und vierten Ranges sind:

$$t_{ii} = \frac{1}{f_i^+} - \frac{1}{f_i^-}, \quad \text{mit } i = L \text{ oder } R \text{ oder } T, \quad (2.6/a)$$

$$t_{iiii} = \frac{1}{f_i^+ f_i^-}, \quad \text{mit } i = L \text{ oder } R \text{ oder } T, \quad (2.6/b)$$

$$t_{ij} = \frac{1}{t_{ij}^+} - \frac{1}{t_{ij}^-} = 0, \quad \text{mit } i,j = L, R \text{ oder } L, T \text{ oder } R, T, \quad (2.6/c)$$

$$(t_{ijij} + t_{ijji} + t_{jijj} + t_{jjii}) = \frac{1}{t_{ij}^+ t_{ij}^-}, \quad \text{mit } i,j = L, R \text{ oder } L, T \text{ oder } R, T. \quad (2.6/d)$$

Eine Möglichkeit für die Bestimmung der interaktiven Komponente:

$$\left. \begin{aligned} (t_{ijij} + t_{jijj}) &= \frac{4}{(f_{ij}^{k(45)+})^2} \left[ 1 - \frac{f_{ij}^{k(45)+}}{2} \left( \frac{1}{f_i^+} - \frac{1}{f_i^-} + \frac{1}{f_j^+} - \frac{1}{f_j^-} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(f_{ij}^{k(45)+})^2}{4} \left( \frac{1}{f_i^+ f_i^-} + \frac{1}{f_j^+ f_j^-} + \frac{1}{t_{ij}^+ t_{ij}^-} \right) \right], \\ \text{oder} \\ (t_{ijij} + t_{jijj}) &= \frac{4}{(f_{ij}^{k(45)-})^2} \left[ 1 + \frac{f_{ij}^{k(45)-}}{2} \left( \frac{1}{f_i^+} - \frac{1}{f_i^-} + \frac{1}{f_j^+} - \frac{1}{f_j^-} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(f_{ij}^{k(45)-})^2}{4} \left( \frac{1}{f_i^+ f_i^-} + \frac{1}{f_j^+ f_j^-} + \frac{1}{t_{ij}^+ t_{ij}^-} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.6/e)$$

mit  $i,j = L, R$  oder  $L, T$  oder  $R, T$ .

Auch dieses Kriterium kann durch eine Oberfläche dargestellt werden. Diese hat – im allgemeinen Fall – die Form eines Ellipsoides. Wie *Bild 2* zeigt, sind die Hauptachsen des Tsai-Wu'schen Ellipsoides zu den Spannungskoordinaten nicht parallel.

Der Ausdruck der Oberfläche für einen ebenen Spannungszustand lautet:

$$\sigma^{ij} = \sqrt{\frac{1 - t_{ii}\sigma^{ii} - t_{jj}\sigma^{jj} - t_{iiii}\sigma^{ii}\sigma^{ii} - t_{jjjj}\sigma^{jj}\sigma^{jj} - (t_{ijij} + t_{jijj})\sigma^{ii}\sigma^{jj}}{t_{ijij} + t_{ijji} + t_{jijj} + t_{jjii}}} \quad 2.7$$

mit  $i, j = L, R$  oder  $L, T$  oder  $R, T$ .

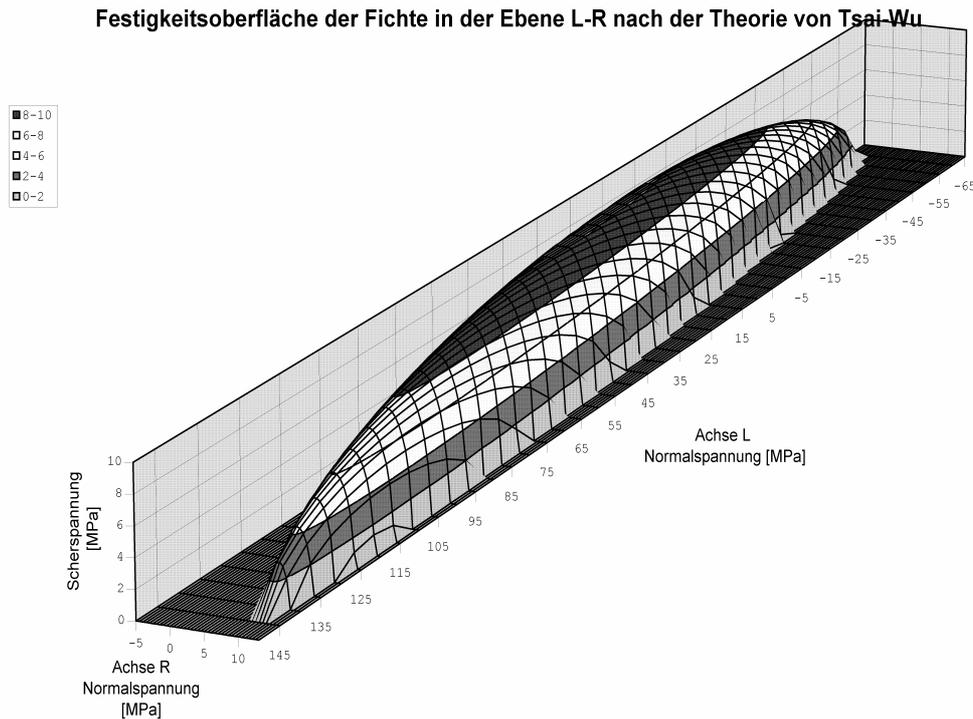


Bild 2. Die Tsai-Wu'sche Festigkeitsoberfläche in der Ebene L-R von Fichtenholz  
 Figure 2. Strength surface of Tsai-Wu in the plane L-R of spruce

### 2.3 Die Ashkenasi'sche Festigkeitstheorie

Ashkenasi (1966, 1967, 1976, 1978, Askenasi – Ganov 1972) hat zuerst einen Festigkeitstensor vierten Ranges definiert, dessen Struktur der des Nachgiebigkeitstensors der Elastizität völlig ähnlich ist. Sie hat das zweite und das vierte Glied von Relation (2.1) behalten. Es ist ihr aber gelungen, die Komponenten des Tensors achten Ranges mit den Komponenten des von ihr definierten Festigkeitstensors vierten Ranges auszudrücken. Nach einigen Umformungen (Szalai, J. 1994) ergibt sich die neue Form des Kriteriums zu:

$$\frac{t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl}}{\sqrt{I_1^2 - I_2}} \leq 1 \quad , \quad (2.8)$$

worin  $I_1$  und  $I_2$  – die erste und zweite Invariante des Spannungszustandes ist. Die Komponenten des Festigkeitstensors sind nun:

$$t_{iiii} = \frac{1}{f_i^+} \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{f_i^-} \quad , \quad \text{mit } i = L \text{ oder } R \text{ oder } T, \quad (2.9/a)$$

$$(t_{ijij} + t_{ijji} + t_{jijj} + t_{jjii}) = \frac{1}{t_{ij}} \quad , \quad \text{mit } i, j = L, R \text{ oder } L, T \text{ oder } R, T, \quad (2.9/b)$$

$$\left. \begin{aligned} (t_{ijij} + t_{jijj}) &= \frac{4}{f_{ij}^{k(45)+}} - \frac{1}{f_i^+} - \frac{1}{f_j^+} - \frac{1}{t_{ij}} \quad , \\ \text{oder} \\ (t_{ijij} + t_{jijj}) &= \frac{4}{f_{ij}^{k(45)-}} - \frac{1}{f_i^-} - \frac{1}{f_j^-} - \frac{1}{t_{ij}} \quad , \end{aligned} \right\} \quad (2.9/c)$$

mit  $i, j = L, R \text{ oder } L, T \text{ oder } R, T.$

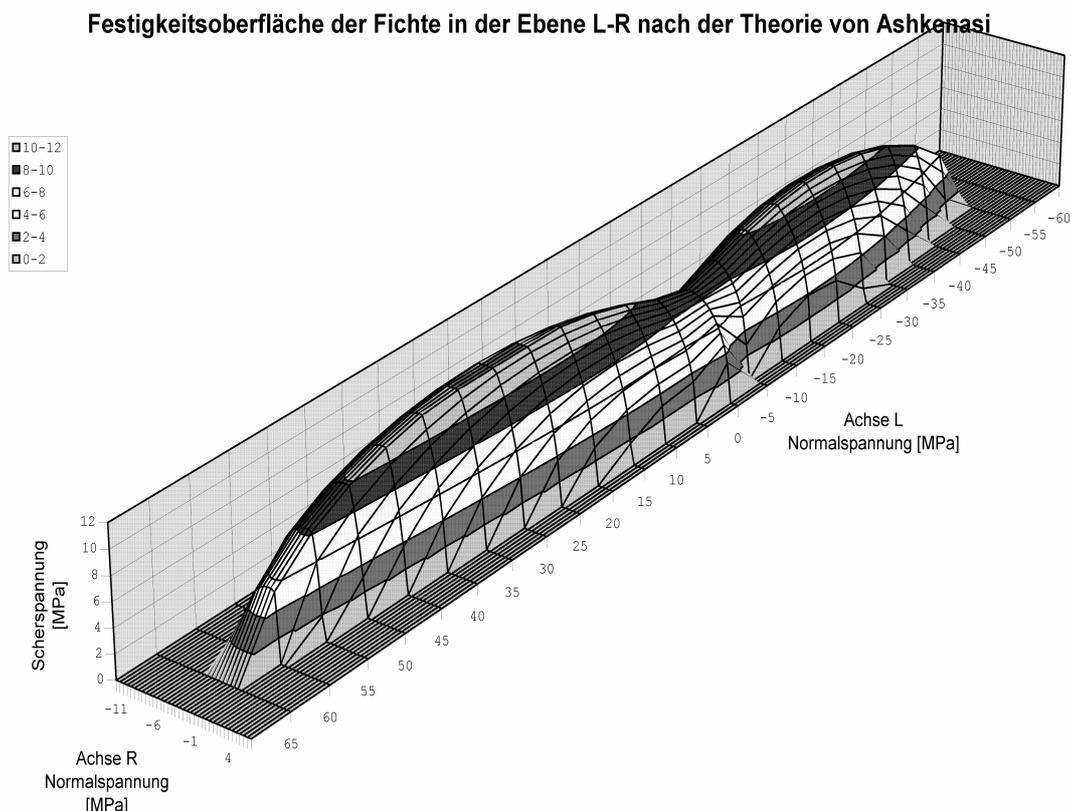
Gl. (2.8) repräsentiert eine Oberfläche vierten Grades. Für den ebenen Spannungszustand ergibt sich daraus folgender Ausdruck:

$$\sigma^{ij} = \pm \sqrt{\frac{1}{q_{ij}} \left[ \frac{1}{2q_{ij}} - t_{iii}(\sigma^{ii})^2 - t_{jjj}(\sigma^{jj})^2 - (t_{ijj} + t_{jji})\sigma^{ii}\sigma^{jj} \pm \sqrt{\frac{1}{4q_{ij}^2} - \left(\frac{t_{iii}}{q_{ij}} - 1\right)(\sigma^{ii})^2 - \left(\frac{t_{jjj}}{q_{ij}} - 1\right)(\sigma^{jj})^2 - \left(\frac{t_{ijj} + t_{jji}}{q_{ij}} - 1\right)\sigma^{ii}\sigma^{jj}} \right]}, \quad (2.10)$$

wobei

$$q_{ij} = t_{ijj} + t_{iji} + t_{jji} + t_{jij}, \quad \text{mit } i, j = L, R \text{ oder } L, T \text{ oder } R, T \text{ ist.}$$

Wie am *Bild 3* zu sehen ist, die Festigkeitsoberfläche von Ashkenasi im allgemeinen Fall kein Ellipsoid, sondern eine allgemeinere Fläche ist. Sie muss natürlich „hügelartig“ sein, da die Festigkeit in keiner Richtung unendlich gross sein darf. Sie kann jedoch konkave Flächenteile besitzen, was im Falle der ersten zwei Kriterien nicht vorzustellen ist. Einige Versuchsergebnisse (Ashkenasi 1978) bestätigen tatsächlich das Vorkommen konkaver Flächenteile auch in der Praxis vorkommen können.



*Bild 3. Die Ashkenasi'sche Festigkeitsoberfläche in der Ebene L-R von Fichtenholz*  
*Figure 3. Strength surface of Ashkenasi in the plane L-R of spruce*

## 2.4 Allgemeine Bemerkungen zu den Festigkeitshypotesen

Es ist noch zu bemerken, dass in der Literatur viele Bruchkriterien existieren. Die sind aber meistens nur vereinfachte Formen der ersten beiden Festigkeitskriterien. Die Vereinfachung besteht darin, dass einige Komponenten des Festigkeitstensors a priori als Null betrachtet wurden (zusammenfassende Arbeiten stammen von Covin 1979 und Edlund 1982). In diesem Sinne bedeuten sie keine selbständigen Kriterien und die Aussagen, die später gemacht werden, gelten auch für sie.

Wenn die Relationen (2.2), (2.5) und (2.8) erfüllt sind, bleibt das Material intakt und zerstörungsfrei. Im ebenen Spannungszustand ist dieses geometrisch sehr gut zu veranschaulichen. Die Gleichheit der linken und rechten Seite von Gl. (2.2), (2.5) und (2.8) bedeutet, dass der Spannungspunkt mit den Koordinaten  $\sigma^{LL}$ ,  $\sigma^{RR}$ ,  $\sigma^{LR} = \sigma^{RL}$  im Bild 1, 2 oder 3 genau auf der Oberfläche liegt. Der untersuchte Materialpunkt ist gerade im Anfangszustand des Versagens oder im Endzustand der Intaktheit. Beide Zustände haben die gleiche Bedeutung, nämlich den Grenzzustand. Liegt der Spannungspunkt unterhalb der Festigkeitsoberfläche, kann die Belastung noch erhöht werden. Befindet sich der Spannungspunkt ausserhalb der Festigkeitsoberfläche, ist das Versagen bereits erfolgt.

Von Mises hat sein Kriterium eigentlich für plastisches Fliessen von anisotropen Stoffen entwickelt. Nach dem Postulat der Stabilität von D.C. Drucker und dem Normalitätsgesetz muss diese Fliessoberfläche überall konvex sein. Hill (1950) hat das von Mises'sche Fliesskriterium durch ein lineares Glied, den sog. Bauschinger-Tensor (das erste Glied von Gl. (2.1)) ergänzt. Dieser Tensor zweiten Ranges hat die Berücksichtigung unterschiedlicher Zug- und Druckfestigkeit ermöglicht. Mit dem Bauschinger-Tensor können auch die eventuell vorhandenen Eigenspannungen berücksichtigt. Die Fliessoberfläche ist ein – auf der Hauptebene i-j – schief stehendes Ellipsoid, also überall konvex. Tsai und Wu haben zunächst angenommen, dass das Kriterium (2.5) nicht nur für plastisches, sondern auch für sprödes Material gültig und anwendbar ist. Das Ashkenasi'sche Bruchkriterium kann – da Gl. (2.8) eine Gleichung vierten Grades ist – konkave Oberflächenteile aufweisen. Die Frage lautet, wie ein solches Bruchverhalten zu erklären und physikalisch zu begründen ist?

## 3 BRUCHVERHALTEN VON WERKSTOFFEN

### 3.1 Bruchverhalten von zähen Werkstoffen

Nach dem Postulat von D.C. Drucker verhält sich das Material solange stabil, solange sich die Relation

$$d\varepsilon_{ij}d\sigma^{ij} > 0 \quad (3.1)$$

erfüllt. Hier bedeuten

$d\varepsilon_{ij}$  – der elementare Zuwachs des Deformationszustandes (bei Holz  $i, j = L, R, T$ ),

$d\sigma^{ij}$  – der elementare Zuwachs des Spannungszustandes (bei Holz  $i, j = L, R, T$ ).

Relation (3.1) ist physikalisch so zu interpretieren, dass die von der elementaren Zunahme des Spannungszustandes hervorgerufene elementare Zunahme des Deformationszustandes, bzw. die ihnen entsprechenden Vektoren miteinander einen spitzen Winkel einschliessen. Der Zuwachs der Formänderung kann somit den Zuwachs der Spannungen folgen, es verhält sich also stabil. Der entgegengesetzte Fall bedeutet, dass die Vektoren der Spannungs- und Deformationszunahmen miteinander einen stumpfen Winkel einschliessen, die Teilchen des Materials bewegen sich in die entgegengesetzte Richtung gegenüber dem Zuwachs der

Spannungen. Das kann nur dann geschehen, wenn die Kontinuität des Materials zu existieren aufhört. Das bedeutet, dass das Material bereits versagt hat.

Bei jedem Spannungszustand, bei dem die elastische, plastische, viskoelastische oder plastisch-verfestigende Deformation beginnt, liegt der Spannungspunkt im Spannungsraum auf einer geschlossenen (Hyper)oberfläche. Es ist leicht zu beweisen (Lippmann, 1981), dass die Wirkungslinie des Deformationszuwachses mit der Auswärtsnormalen dieser Oberflächen parallel ist (Normalitätsregel). Aus dem Normalitätsregel und dem Postulat von Drucker folgt das Konvexitätsgesetz, das aussagt, dass die (Hyper)oberfläche überall konvex sein muss. Bei jedem Materialverhalten, wo ein kleiner Deformationszuwachs noch zu keiner Zerstörung führt, wie bei elastischen, plastischen, viskoelastischen und plastisch-verfestigenden Stoffen, ist die Oberfläche konvex, unabhängig davon, ob das Material sich isotrop, anisotrop, linear oder nichtlinear verhält.

### 3.2 Bruchverhalten von spröden Werkstoffen

Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von elastisch-spröden Stoffen ist meistens bis zum Versagen linear oder weicht kaum davon ab. Das Versagen von Bauteilen erfolgt in der Art eines spröden Bruches. Dabei tritt keine verhältnismässig grosse Formänderung entsprechend von zähen Materialien auf. Der Deformationsvorgang ist praktisch bis zum Bruch elastisch (manchmal fast vollkommen linear). Auch Holz und Holzwerkstoffe zeigen solches Verhalten.

Bei linear elastischen Stoffen liegt der zum Bruch führende Spannungspunkt auf einer Oberfläche, das elastische Ergänzungspotential (spezifische potentielle Energie) heisst:

$$u^{\sim} = \int_0^{\sigma^{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \sigma^{ij} = \frac{1}{2} s_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} \quad , \quad \text{mit } i,j,k,l = L, R, T, \quad (3.2)$$

wobei

$s_{ijkl}$  – der Nachgiebigkeitstensor des anisotropen Stoffes ist.

Gl. (3.2) zeigt, dass das elastische Ergänzungspotential die Quadratische Funktion der Spannungskomponente ist.  $u^{\sim}$  kann – infolge seiner Interpretierung – nur positiv sein. Der Spannungspunkt befindet sich bei jedem Spannungszustand – auch noch vor Eintreten des Bruches – auf einem Hyperellipsoid. Die Oberflächen der Unterräume sind Ellipsoide, Ellipsen usw.

Bei einem linear elastischem Werkstoff wird die Deformation von dem Ergänzungspotential gemäss der Gl. (3.2) bestimmt. Wenn die Spannungskomponenten kontinuierlich wachsen, sind die Gesetze der Normalität und der Konvexität bis zum Bruch gültig. Ist das Material isotrop, liegt der Bruchspannungspunkt immer auf demselben Hyperellipsoid, da die Orientierung hier keine Rolle spielt. Bei einem anisotropen Material gehört zu jeder Orientierung ein anderer Wert des Ergänzungspotentials. Die zum Bruch führenden Spannungspunkte liegen auf verschiedenen Hyperellipsoiden. Kommt nach der elastischen Verformung eine plastische, übernimmt die plastische Fliessoberfläche die Rolle der Oberfläche des ergänzenden Potentials und die Gesetze der Normalität und der Konvexität sind weiterhin gültig. Folgt der elastischen Deformation ein spröder Bruch, besteht die Stabilitätsrelation (3.1) nicht mehr. Die Kontinuität des Stoffes hört auf, das Produkt  $d\varepsilon_{ij} d\sigma^{ij}$  verliert also seinen Sinn. Die Gesetze der Normalität und der Konvexität sind nicht mehr gültig. Die zu den grössten Hyperellipsoiden gehörenden Spannungspunkte sind auch Punkte der Festigkeitsoberfläche. Diese Fläche kann aber – wie es *Bild 4* im Falle eines zwei-dimensionalen Spannungszustandes zeigt – auch konkave Teile aufweisen, die mit praktischen Erfahrungen im Einklang sind und auch theoretisch verständlich und zu beweisen sind.

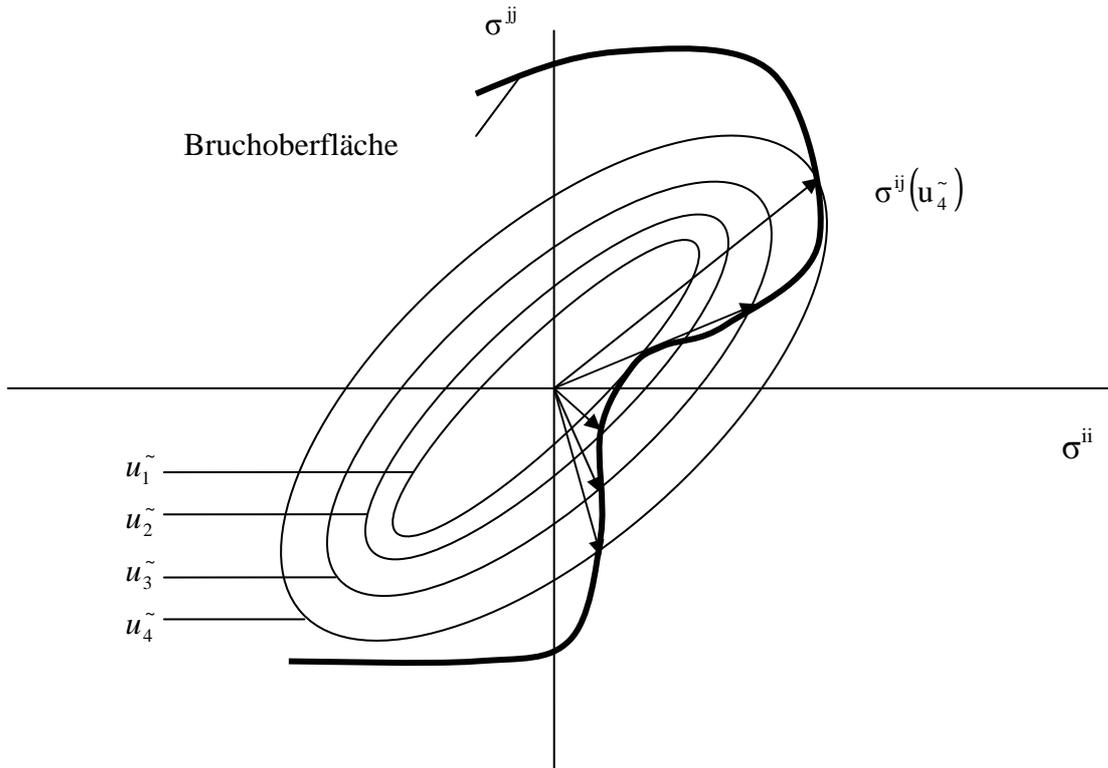


Bild 4. Die Entstehung der Festigkeitsoberfläche eines elastischen Materials mit sprödem Bruch bei zweidimensionalem Spannungszustand  
 Figure 4. Evolution of strength surface of an elastic material with brittle rupture in plane stress state

#### 4 ENERGIEBILANZ DES BRUCHVORGANGES

Die Relationen (2.2) und (2.5) umgeformt, indem beide Seiten mit  $f_L^+$  multipliziert, ergibt:

$$u_M^{\sim} = f_L^+ t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} \leq f_L^+ = \text{const}, \quad \text{mit } i, j, k, l = L, R, T, \quad (3.3)$$

und

$$u_{TW}^{\sim} = f_L^+ (t_{ij} \sigma^{ij} + t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl}) \leq f_L^+ = \text{const}, \quad \text{mit } i, j, k, l = L, R, T. \quad (3.4)$$

Die Relation (2.8) ist auf die folgende Form zu bringen:

$$u_A^{\sim} = t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} \leq \sqrt{|I_1^2 - I_2|}, \quad \text{mit } i, j, k, l = L, R, T. \quad (3.5)$$

Auf der linken Seite der Relationen (3.3), (3.4) und (3.5) befindet sich ein Grösse, welche – auf Grund der Gl. (3.2) – eine Art Ergänzungspotential ist. Verhält sich das Material bis zum Bruch linear, sind die linken Seiten von Gl. (3.3), (3.4) und (3.5) den wahren Zusammenhang des elastischen Ergänzungspotentials proportional, wie es im Anhang A bewiesen wird. Ist das Material nicht linear, gilt weiterhin, dass die linken Seiten die bis zum Bruch angehäuften Ergänzungspotentiale, bzw. damit proportionale Grössen sind. So betrachtet, dürfen die von Mises'schen und Tsai-Wu'schen Festigkeitskriterien folgendermassen formuliert werden: *Ein*

*anisotropes Material versagt, wenn das angehäuften Ergänzungspotential im Körper einen – für das Material charakteristischen - konstanten Wert erreicht. Das bedeutet, dass die angehäuften Ergänzungspotentiale bei jedem Spannungszustand und jeder Orientierung im Grenzzustand des Versagens gleich gross sind. Das Festigkeitskriterium von E.K. Ashkenasi lautet: Ein anisotropes Material versagt, wenn das angehäuften Ergänzungspotential im Körper einen bestimmten Wert erreicht, der keine Konstante, sondern eine Funktion der ersten und zweiten Invariante des Spannungszustandes ist. Das Ergänzungspotential hängt von den ersten zwei Invarianten des Spannungszustandes und damit indirekt von der Orientierung ab.*

Dass die erste Definition unseren physikalischen Vorstellungen widerspricht, ist aus einem natürlichen technischen Sinn spürbar. Im Anhang B wird jedoch gezeigt, dass die Gleichheit des Ergänzungspotentials vorausgesetzt, zwischen den elastischen Materialkonstanten und den Festigkeiten theoretisch beweisbare Beziehungen bestehen müssen. Diese Zusammenhänge erfüllen sich aber in der Praxis niemals.

Im Anhang C wird gezeigt, dass das den verschiedenen Bruchspannungszuständen entsprechende Potential in Kenntnis der Materialkonstanten (beziehungsweise der Spannungs-Dehnungs-Diagramme) zu bestimmen ist. Hier müssen die elastische Konstanten und die Festigkeiten keinerlei Verbindungen erfüllen.

## 5 SCHLUSSFOLGERUNGEN

Die Geschichte der Wissenschaft zeigt, dass eine neue Theorie unter den früher angenommenen Theorien sehr schwer Fuss fassen kann und noch schwerer in deren praktischer Anwendung. Es wurde versucht zu beweisen, dass das Ashkenasi'sche Bruchkriterium eine viel allgemeinere Gültigkeit gegenüber den wesentlich bekannteren Kriterien hat. Das Ashkenasi'sche Kriterium kann den Eigenschaften der sprödebrüchigen Stoffe folgen, dass seine Festigkeitsoberfläche auch konkave Teile verfügen darf. Seine Anwendung führt nicht zu Widersprüchen.

Es ist natürlich wichtig neben den theoretischen Feststellungen auch der praktische Beweis der Verwendbarkeit der Festigkeitstheorien. Im Labor der West-Ungarischen Universität sind Untersuchungen begonnen worden, welche die praktische Prüfung der Festigkeitshypothesen nicht nur im ebenen, sondern auch im räumlichen Spannungszustand ermöglichen. Wir haben aber auch die Versuchsergebnisse ähnlicher Art anderer Wissenschaftler verwendet. Dabei wurden Arbeiten von Eberhardsteiner Mitarbeitern verwendet. Die Ergebnisse der im Labor des Institutes für Festigkeitslehre der Technischen Universität Wien durchgeführten Untersuchungen auf dem Gebiet der biaxialen Festigkeit sind in mehreren Artikeln und einem Buch (Eberhardsteiner 1995, 2002; Eberhardsteiner, J. et al. 1991, 1996) publiziert worden. In diesen Versuchen wurde das mechanische Verhalten, vor allem die Festigkeit von Fichtenholz (*Picea abies* Karst.) in der anatomischen Hauptebene *L-R* geprüft. Die Resultate seiner Untersuchungen sind dem Verfasser freundlicherweise zur Verfügung gestellt worden. Im Teil 2 werden die Auswertung und Vergleich der experimentellen Resultate mit denen der verschiedenen Festigkeitshypothesen behandelt.

**LITERATUR**

- ASHKENASI, E.K. (1966): Protschnost' anisotropnüh drevesnüh i sintetitscheskih materialov. [Festigkeit des anisotropen Holzstoffes und von syntetischen Stoffen] 1. kiadás. Moszkva: Isdatelstvo Lesnaja Promüschlennost. (auf Russisch)
- ASHKENASI, E.K. (1967): K voprosu o geometrii teorii protschnosti. [Zur Frage der Geometrie der Festigkeitstheorie] *Mechanika Polimerov*, (4): Riga. 703-707. (auf Russisch)
- ASHKENASI, E.K. (1976): Ezzo ras pro geometrii protschnosti anisotropnüh materialov. [Noch einmal zur Frage der Geometrie der anisotropen Festigkeitstheorie] *Mechanika Polimerov*, (2): Riga. 269-278. (auf Russisch)
- ASHKENASI, E.K. (1978): Anisotropia drevesinü i drevesnüh materialov. [Anisotropie von Holz und Holzwerkstoffen] 1. kiadás. Moszkva: Isdatelstvo Lesnaja Promüschlennost'. (auf Russisch)
- ASHKENASI, E.K. – Ganov, E.V. (1972): Anisotropia konstrukcionnüh materialov. [Anisotropie von Baustoffen] Leningrad: Isdatelstvo Maschinostroenie. (auf Russisch)
- AZZI, V.D. – TSAI, S.W. (1956): Anisotropic Strength of Composites. *Experimental Mechanics*, 283-288
- COVIN, S.C. 1979: On the Strength Anisotropy of Bone and Wood. Department of Biomedical Engineering, Tulane University, New Orleans, LA. 70118.
- DRUCKER, D.C. (1967): Introduction to mechanics of deformable solids. Mc Graw Hill.
- EBERHARDSTEINER, J. (2002): Mechanisches Verhalten von Fichtenholz. Experimentelle Bestimmung der biaxialen Festigkeitseigenschaften. Springer-Verlag Wien New York. 174
- EBERHARDSTEINER, J. (1995): Biaxial Testing of Orthotropic Materials Using Electronic Speckle Pattern Interferometry. *Measurement*, (16): 139-148.
- EBERHARDSTEINER, J. – GINGERL, M. – ONDRIS, L' (1996): Beurteilung der Messgenauigkeit eines 3D-ESPI-Systems bei der biaxialen Festigkeitsprüfungen von Holz. GESA-Symposium 1996. Experimentelle Beanspruchungsanalyse, neue Entwicklungen und Anwendungen, Schliersee, NSZK.
- EBERHARDSTEINER, J. – PULAY, F. – MANG, H. (1991): Zur Frage der Lasteinleitung bei experimentellen Festigkeitsuntersuchungen von zweiaxial beanspruchtem Holz. *Österreichische Ingenieur- und Architekten Zeitschrift* (136): 265-272.
- EDLUND, B. 1982: Festigkeitshypothesen von orthotropen Werkstoffen. *Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis*. Karlsruhe: Bruderverlag
- EHLBECK, J. – HEMMER, K. (1986): Erfassung, systematische Auswertung und Ermittlung von Grundlagen über das Zusammenwirken von Längs-, Quer- und Schubspannungen bei fehlerfreiem und fehlerbehaftetem Nadelholz. Technischer Bericht. Stuttgart: IRB Verlag.
- FLÜGGE, W. (1972): Tensor Analysis and Continuum Mechanics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag.
- GOODMAN, J.R. – BODIG, J. (1971): Ortotropic Strength of Wood in Compression. *Wood Science*, 4 (2): 83-94.
- HEMMER, K. (1984): Versagensarten des Holzes der Weisstanne (*Abies alba*) unter mehrachsiger Beanspruchung. Dissertation. Karlsruhe. Selbstverlag.
- HILL, R. 1950: The Mathematical Theory of Plasticity. London: Oxford University Press.
- KOLLMANN, F. (1982): Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe. 2. Ausgabe. Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag.
- SZALAI, J. (1990): Anizotrop szilárdsági kritériumok összehasonlítása a természetes faanyagra való alkalmazhatóságuk szempontjából. [Vergleich der anisotropen Festigkeitskriterien hinsichtlich ihrer Verwendbarkeit für natürliches Holz] *Építés-, Építészettudomány*, XXI. (1-4): 23-57. (auf Ungarisch)
- SZALAI, J. (1992): Comparing of failure theories for orthotropic materials on the basis of theoretical criteria of their applicability. *Acta Facultatis Ligniensis*. (1): 15-31.
- SZALAI, J. (1994): A faanyag és faalapú anyagok erőtani méretezése összetett feszültségi állapot esetén. [Bemessung von Konstruktionen aus Holz und Holzwerkstoffen in zusammengesetztem Spannungszustand] *Építés-, Építészettudomány*. XXVI (3-4): 215-223. (auf Ungarisch)
- SZALAI, J. (1996): Az erdei fenyő (*Pinus silvestris*) technikai szilárdságai. [Technische Festigkeiten von Kieferholz (*Pinus silvestris*)] *Bútor- és Faipar*. (6-7) 14-15. (auf Ungarisch)

- SZALAI, J. (1997): Technische Festigkeiten des Buchenholzes (*Fagus silvatica*). *Drevársky Vyskum.* 42 (3): 1-14.
- SZALAI, J. (1998): Technische Festigkeiten der Akazie (*Robinia pseudo-Acacia*) und der Fichte (*Picea excelsa*). *Drevársky Vyskum.* 43 (3-4): 39-51.
- SZALAI, J. (1999): A tölgy (*Quercus Robur*) technikai szilárdságai. [Technische Festigkeiten der Eiche (*Quercus Robur*)] *A Soproni Egyetem Tudományos Közleményei.* 1996-1999. 42-45: 189-198. (auf Ungarisch)
- SZALAI, J. (1999): A természetes faanyag tönkremeneteli kritériumok által meghatározott szilárdsági felületének általános jellemzői. [Allgemeine Eigenschaften der von den Festigkeitskriterien bestimmten Oberflächen des natürlichen Holzes] *Faipar.* XLVII (2-3): 15-17. (auf Ungarisch)
- SZALAI, J. (2001): Faszerkezetek méretezését és gyártását befolyásoló sajátosságok. [Spezifische Eigenschaften, die die Bemessung und Produktion von Holzkonstruktionen beeinflussen] In: WITTMANN, GY. (ed.) *Mérnöki faszerkezetek.* [Technische Holzkonstruktionen] II. kötet. *Mezőgazdasági Szaktudás kiadó.* Budapest. 143 - 259. (auf Ungarisch)
- SZALAI, J. (2003): A természetes faanyag szilárdsági felületének jellemzői. [Eigenschaften von Festigkeitsoberflächen des natürlichen Holzes] *Építés- Építészettudomány XXXI* (1-2): 43-59. (auf Ungarisch)
- SZALAI, J. (2004): Technische Festigkeiten der Pannonia Pappel (*Populus x euramericana* cv. Pannonia) und der Zerreiche (*Quercus cerris* L.). *Acta Silv. Lign. Hung.* 1 (93-103).
- SZALAI, J. – NIEMZ, P. – ANDOR, K. – BARISKA, M – HOWALD, M. (2004): Untersuchungen zum Einfluss der Holzfeuchtigkeit auf das Bruchverhalten von Fichte bei Zugbelastung in Faserrichtung. *Schweizerische Zeitschrift für Forstwesen.* 155 (1) 1-5.
- TSAI, S.W. – WU, E.M. (1971): A general theory of strength for anisotropic material. *J. Composite Materials,* 5: 58-80.
- VOIGT, W. (1928): *Lehrbuch der Kristallphysik.* Leipzig-Berlin: Teubner Verlag.
- VON MISES, R. (1928): *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen.* *Z. angew. Math. Mech.* 8: 161-185.
- WU, E.M. (1972): Optimal experimental measurements of anisotropic Failure Tensors. *J. Composite Materials,* 6: 472-489.

## Anhang A

Es soll ein bis zum Bruch annähernd lineares Spannungs-Dehnungs-Verhalten – wie bei vielen spröden Werkstoffen – angenommen werden (*Bild A1*). Es werde ein Holzstab untersucht, dessen Längsachse in Faserrichtung fällt, und auf reinen Zug belastet ist. Die einzige von Null verschiedene Normalspannung des Spannungszustandes im Grenzzustand des Bruches sei  $f_L^+$ . Das bis zum Bruch angehäuften elastischen Ergänzungspotential ist dann:

$$u^{\sim} = \frac{1}{2} s_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} = \frac{1}{2} s_{LLLL} \sigma^{LL} \sigma^{LL} = \frac{1}{2} s_{LLLL} f_L^+ f_L^+ \quad . \quad (A1)$$

Die linke Seite der Gl. (3.3) voll ausgeschrieben, ergibt:

$$u_M^{\sim} = f_L^+ t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} = f_L^+ t_{LLLL} \sigma^{LL} \sigma^{LL} = f_L^+ t_{LLLL} f_L^+ f_L^+ \quad . \quad (A2)$$

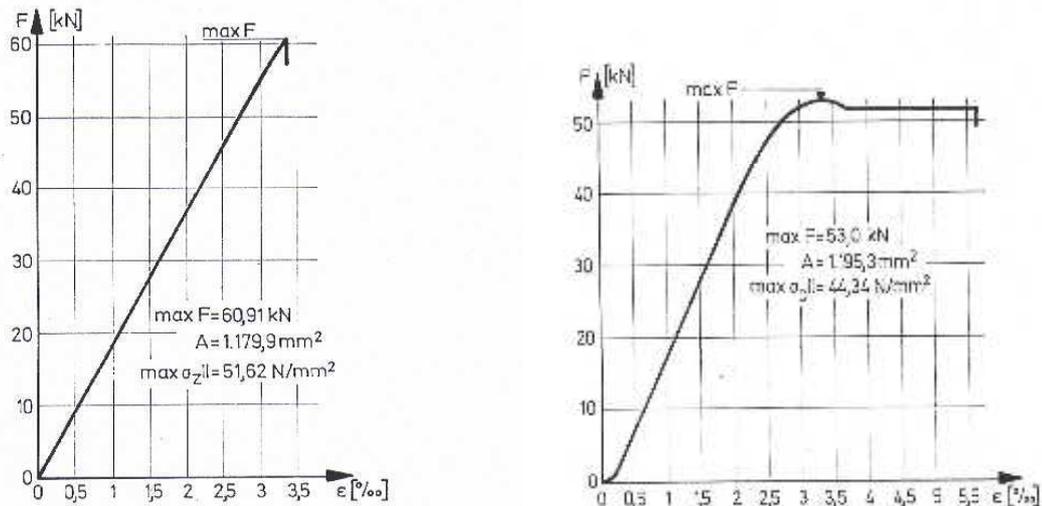


Bild A1. (Ehlbeck, J.-Hemmer, K. 1986)

a) Typische Last-Verformungslinie bei Zugbeanspruchung in Faserrichtung von Holz

b) Typische Last-Verformungslinie bei Druckbeanspruchung in Faserrichtung von Holz

Figure A.1. (Ehlbeck, J.-Hemmer, K. 1986)

a) Typical load-deformation during tensile stress parallel to the grain of wood

b) Load-deformation line during compression stress parallel to the grain of wood

Gl. (A2) durch (A1) dividiert, ergibt weiter:

$$u_M^{\sim} = \lambda_M u^{\sim} \quad , \quad (A3)$$

wobei

$$\lambda_M = 2 f_L^+ \frac{t_{LLLL}}{s_{LLLL}} = const. \quad (A4)$$

ist. Gl. (A3) sagt aus, dass die linke Seite des von Mises'schen Kriteriums (3.3) zu dem bis zum Bruch angehäuften elastischen Ergänzungspotential proportional ist und  $u_M^{\sim}$  – da  $\lambda_M$  eine dimensionslose Konstante ist – selbst eine Art Ergänzungspotential ist.

Ähnlicherweise kann bewiesen werden, dass die linken Seiten von Gl. (3.4) und (3.5) die bis zum Bruch angehäuften Ergänzungspotentiale sind. Nach kurzer Rechnung ergeben sich die folgenden Konstanten. Für die Tsai-Wu'sche Theorie:

$$\lambda_{TW} = 2 \frac{(t_{LL} + t_{LLLL} f_L^+)}{s_{LLLL}} = const. \quad (A5)$$

und für das Ashkenasi'sche Kriterium:

$$\lambda_A = 2 \frac{t_{LLLL}}{s_{LLLL}} = const. \quad (A6)$$

## Anhang B

Ein Probekörper aus Holz – der parallel zu den anatomischen Hauptrichtungen in der Ebene L-R ausgeschnitten wurde (*Bild B1*) – werde in radialer Richtung mit Normalspannung  $\sigma^{RR}$  bis zum Bruch belastet. Die grösste Normalspannung sei  $\sigma^{RR} = f_R^+$ . Da es sich um Holz handelt, ist das Deformation- und Spannungsdiagramm bei jeder Holzfeuchte praktisch linear (Szalai, J. et al. 2004), das bis zum Bruch angehäuften Ergänzungspotential lautet:

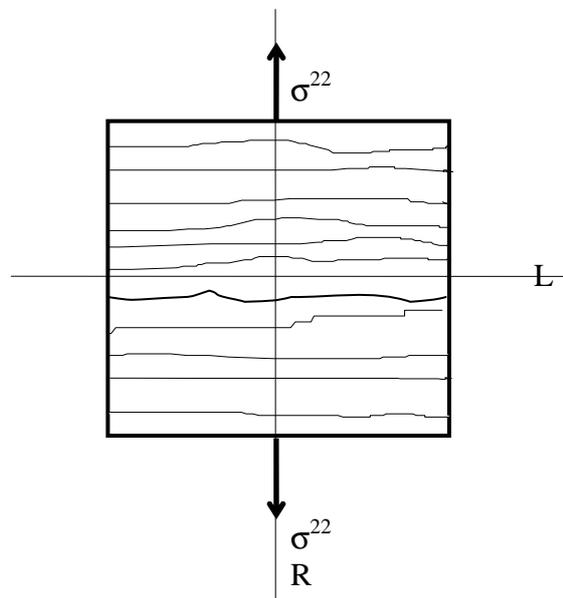
$$u^{\sim} = \frac{1}{2} s_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} = \frac{1}{2} s_{RRRR} \sigma^{RR} \sigma^{RR} = \frac{1}{2} s_{RRRR} f_R^+ f_R^+ \quad (\text{B1})$$

wobei

$$s_{ijkl} \text{ – der Nachgiebigkeitstensor, zum Beispiel } s_{1111} = \frac{1}{E_L}, s_{2222} = \frac{1}{E_R} \text{ ist,}$$

wo

$E_L$  und  $E_R$  – die Elastizitätsmoduli des Holzes in den anatomischen Hauptrichtungen  $L$  und  $R$  sind.



*Bild B1. Belastung eines würfelförmigen Probekörpers in radialer Richtung in der Ebene L-R*  
*Figure B1. Loading of a prismatic specimen in the Plane L-R in radial direction*

Der Probekörper werde nun in der anatomischen Hauptebene um  $90^\circ$  gedreht. Die einzige Spannung der linearen Spannungszustandes wird dann:

$$\sigma^{LL} = f_R^+ ,$$

wodurch natürlich noch kein Bruch verursacht wird, da beim Holz  $f_L^+ \geq f_R^+$  ist.  $f_L^+$  und  $f_R^+$  die Zugfestigkeiten in den anatomischen Hauptrichtungen  $L$  und  $R$  sind. Es soll die Spannung  $\sigma^{LL}$  solange, bis zum Versagen des Probekörpers gesteigert werden. Die grösste Spannung im Grenzzustand des Bruches ist dann:

$$\sigma^{LL} = k \sigma^{RR} = f_L^+ .$$

Sie ist also das  $k$ -Fache der Spannung  $\sigma^{RR}$ . ( $k$  – eine beliebige positive Grösse ist).

Im Grenzzustand des Bruches entsteht das folgende elastische Ergänzungspotential:

$$u^{\sim} = \frac{1}{2} s_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} = \frac{1}{2} s_{LLLL} k^2 \sigma^{RR} \sigma^{RR} = \frac{1}{2} s_{LLLL} k^2 f_R^+ f_R^+ \quad (\text{B2})$$

Wird angenommen, dass ein anisotropes Material dann versagt, wenn das elastische Ergänzungspotential einen bestimmten, konstanten Wert erreicht, müssen die Gl. (B1) und (B2) gleich grossen Wert ergeben. (Ist das Material isotrop, kann diese Vermutung angenommen werden, da dort die Orientierung keine Rolle spielt. Bei anisotropen Werkstoffen kann diese Behauptung bezweifelt werden, Betrachtung von Versuchsergebnissen weist darauf hin. Trotzdem verwenden die von Mises'sche Theorie, die Tsai-Wu'sche Theorie und noch viele andere diese Vermutung.) Somit wird:

$$\frac{1}{2} s_{RRRR} \sigma^{RR} \sigma^{RR} = \frac{1}{2} s_{LLLL} k^2 \sigma^{RR} \sigma^{RR},$$

woraus sich

$$k = \sqrt{\frac{s_{RRRR}}{s_{LLLL}}} = \sqrt{\frac{E_L}{E_R}} \quad (\text{B3})$$

ergibt.

Zusammenhang (B3) bedeutet im allgemeinen: wird angenommen, dass das zu den verschiedenen Spannungszuständen gehörende Ergänzungspotential eines anisotropen Stoffes gleich gross sind, existiert ein Spannungsfaktor  $k$ , der zeigt, in welchem Mass die Komponenten des Spannungszustandes bis zum Bruch zu steigern sind. Im mehrachsigen Spannungszustand wird die Funktion des Faktors  $k$  verwickelter als die von Gl. (B3), ist aber immer irgendeine Funktion der elastischen Konstanten des anisotropen Stoffes.

Es sollen nun die Festigkeitskriterien für beide Spannungszustände angewendet werden.

### B1 Schlussfolgerungen aus dem von Mises'schen Festigkeitskriterium

Das Kriterium lautet:

$$t_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} = 1, \quad ,$$

wo die Komponenten  $t_{ijkl}$  durch Gl. (2.3) bestimmt werden.

In unserem Falle:

$$t_{RRRR} \sigma^{RR} \sigma^{RR} = 1, \quad t_{LLLL} k^2 \sigma^{RR} \sigma^{RR} = 1.$$

Aus dem Vergleich der beiden Zusammenhänge ergibt sich:

$$k = \sqrt{\frac{t_{RRRR}}{t_{LLLL}}} = \frac{f_L}{f_R}, \quad ,$$

bzw. bei Verwendung der Gl. (B3):

$$\frac{f_L}{f_R} = \sqrt{\frac{E_L}{E_R}}. \quad (\text{B4})$$

## B2 Schlussfolgerungen aus dem Tsai-Wu'schen Festigkeitskriterium

Aus der Gleichung

$$t_{ij}\sigma^{ij} + t_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} = 1 \quad ,$$

in der die Komponenten  $t_{ij}$  und  $t_{ijkl}$  durch Gl. (2.6) bestimmt werden, ergibt die gleiche Untersuchung entsprechend den zwei Belastungsfällen:

$$t_{22}\sigma^{RR} + t_{2222}\sigma^{RR}\sigma^{RR} = 1 \quad , \quad t_{11}k\sigma^{RR} + t_{1111}k^2\sigma^{RR}\sigma^{RR} = 1 \quad .$$

Mit Gl. (B3) bekommt man den folgenden Ausdruck:

$$\frac{E_L}{E_R} \frac{f_R^+}{f_L^+ f_L^-} + \sqrt{\frac{E_L}{E_R} \left( \frac{1}{f_L^+} - \frac{1}{f_L^-} \right)} = \frac{1}{f_R^+} \quad . \quad \text{B5}$$

Die Gl. (B4) und (B5) weisen darauf hin, dass ein gewisser Zusammenhang zwischen den elastischen Konstanten und technischen Festigkeiten bestehen soll, wenn das bis zum Bruch angehäuften ergänzenden Potential im Körper unabhängig von der Orientierung einen konstanten Wert hat. Diese Verhältnisse treffen aber für die in der Praxis gemessenen Materialkennwerte nie zu. Für übliche Holzmaterialkonstanten, ergibt sich mindestens ein Unterschied in Grössenordnung der linken und rechten Seiten der Gl. (B5). Auch Gl. (B4) wird niemals erfüllt. Bei unseren Ableitungen wurde angenommen, dass sich das Material bis zum Bruch linear verhält. Dadurch werden die Berechnungen erleichtert, lineares Materialverhalten ist aber nicht notwendig. Die Feststellungen sind allgemein gültig. Es soll hingewiesen werden, dass sich die Gl. (B4) und (B5) für isotrope Werkstoffe erfüllt werden.

## Anhang C

Wird die Gleichheit des Ergänzungspotentials aufgegeben – entsprechen der Theorie von Ashkensi – kann folgendes festgestellt werden. Nach Quadrieren der Gl. (3.5), dessen Koeffizienten durch die Gl. (2.9) gegeben werden ( $I_1$  und  $I_2$  – die erste und zweite Invariante des Spannungszustandes sind) ergibt:

$$\left[ t_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} \right]^2 = I_1^2 - I_2 \quad . \quad \text{C1}$$

Zu den beiden Belastungsfällen zurückgekehrt, bekommt man:

$$\left( t_{RRRR}\sigma^{RR}\sigma^{RR} \right)^2 = \left( \sigma^{RR} \right)^2 = \frac{2u^{\sim R}}{s_{RRRR}} \quad , \quad \left( t_{LLLL}k^2\sigma^{RR}\sigma^{RR} \right)^2 = k^2 \left( \sigma^{RR} \right)^2 = \frac{2u^{\sim L}}{s_{LLLL}} \quad ,$$

wobei (A1) und (A2) verwendet wurde. Daraus ergibt sich weiter:

$$u^{\sim R} = \frac{1}{2} \frac{f_R^2}{E_R} \quad , \quad \text{bzw.} \quad u^{\sim L} = \frac{1}{2} \frac{f_L^2}{E_L} \quad ,$$

Der Quotient der beiden Ausdrücke:

$$\frac{u^{\sim L}}{u^{\sim R}} = \frac{E_R}{E_L} \left( \frac{f_L}{f_R} \right)^2 \quad . \quad \text{C2}$$

Den Quotient für ein fiktives Nadelholz mit den folgenden Materialkennwerten ( $E_L = 10000$  MPa,  $E_R = 1000$  MPa,  $f_L = 100$  MPa,  $f_R = 5$  MPa) berechnet, ergibt:

$$\frac{u^{\sim L}}{u^{\sim R}} = \frac{1000}{10000} \left( \frac{100}{5} \right)^2 = 40 \quad .$$

Das Ergänzungspotential im Falle einer Belastung bis zum Bruch beträgt in Faserrichtung das 40-Fache gegenüber der radialen Richtung.

Auf Grund der Ashkenasi'schen Festigkeitstheorie sind die zum Bruch führenden Spannungszustände zu ermitteln und ermöglichen in Kenntnis der Materialkonstanten die Bestimmung das den verschiedenen Bruchspannungszuständen entsprechende Potential oder deren Verhältnis. In der gezeigten Ableitung ist linear-elastisches Verhalten vorausgesetzt worden. Diese Annahme vereinfacht die Berechnungen, es ist aber nicht unbedingt notwendig. In Kenntnis des Spannungs-Dehnungs-Diagramms kann das Ergänzungspotential theoretisch bestimmt werden.

