NEM CSAK VERSENYRE

Román Erika[1] – Kucsinka Katalin[2]

[1]oktató, II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, Matematika és Informatika Tanszék
e-mail: vereserika@kmf.uz.ua
[2]docens, II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, Matematika és Informatika Tanszék
e-mail: vereskati@kmf.uz.ua

A cikkben a 2014-es összukrajnai olimpiáda II. fordulójának 6. osztályos feladatsorához szeretnék rávezető feladatokat bemutatni. Egy olyan feladatsorról beszélünk, amely felkészíti a tanulókat az adott verseny feladatainak megoldására. Az általunk összeválogatott feladatok nemcsak egy adott feladat megoldására tanítja meg a tanulókat, hanem a hasonló típusú feladatok megoldását is elősegíti.

Kulcsszavak: *problémamegoldás, verseny felkészítés*

Abstract

The article presents the problems preparing learners of the 6th form for the second round of the national competition in mathematics in Ukraine. The series of exercises selected by the authors does not only teach how to solve one problem but prepares learners how to solve any problems of the same type.

Keywords: *problem solving, preparation for the competition*

Az összukrajnai olimpiáda II. fordulója matematikából 2014. év, 6. osztály

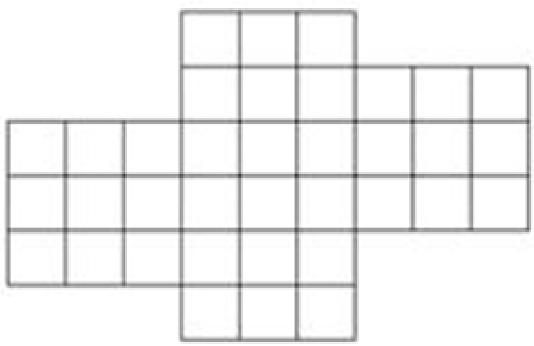
1. Egy tehergépkocsi 65 km/h sebességgel halad, a mögötte haladó személygépkocsi sebessége pedig 80 km/h-val. Mekkora távolság lesz a két kocsi között 2 perccel az után, hogy a személygépkocsi utoléri a tehergépkocsit?

2. Határozd meg azt a legnagyobb négyjegyű számot, amely osztható 7-tel, és minden számjegye különböző? Válaszodat indokold!

3. Mutasd meg, hogyan lehet az ábrán (1. ábra) öt szakaszt úgy meghúzni, hogy nyolc egybevágó részt kapjunk?

4. A tanárnő két természetes számot írt fel a táblára. Péter az első számot megszorozta a második szám számjegyeinek összegével, így 201320132013 számot kapta. Vászja a második számot szorozta meg az első szám számjegyeinek összegével, és a 201420142014-et kapta. Nem tévedett-e valamelyik fiú? Válaszodat indokold!

1. ábra



A feladatsor egy lehetséges megoldása és rávezető feladatok

1. feladat

Egy tehergépkocsi 65 km/h sebességgel halad, a mögötte haladó személygépkocsi sebessége pedig 80 km/h-val. Mekkora távolság lesz a két kocsi között 2 perccel az után, hogy a személygépkocsi utoléri a tehergépkocsit?

Meggondolás:

A sebességeket érdemes percre vonatkoztatva megadni.

$65\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 65 \cdot \frac{1000}{60}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{p}} = \frac{3250}{3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{p}}$ sebessége

$80\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 80 \cdot \frac{1000}{60}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{p}} = \frac{4000}{3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{p}}$ sebessége

Ebből az alakból megállapítható, hogy a tehergépkocsi $\frac{3250}{3}$ m, a személygépkocsi pedig $\frac{4000}{3}$ m utat tesz meg 1 perc alatt.

A kettő különbségeként megkapjuk, hogy a találkozás után 1 perccel a két kocsi között a távolság $\frac{4000}{3} - \frac{3250}{3} = \frac{750}{3} = 250\ \mathrm{m}$.

Mivel a feladat azt kérdezi, hogy mekkora lesz a távolság 2 perccel az után, hogy a személygépkocsi utoléri a tehergépkocsit, az előzőleg kapott eredményt *2*-vel kell megszorozni, azaz $2 \cdot 250 = 500\ \mathrm{m}$

Felelet:

A tehergépkocsi és a személygépkocsi távolsága *500 m* lesz 2 perccel az után, hogy a személygépkocsi utoléri a tehergépkocsit.

Általánosítás:

Ha a feladat azt kérdezné, mekkora lesz a távolság a találkozástól eltelt *n* perc után, akkor a választ úgy kapnánk meg, hogy a két gépkocsi 1 perc alatt megtett útja különbségének *n*-szeresét vesszük.

Módszertani megjegyzés:

A feladat számos lehetséges megoldása (pl. egyik járműhöz rögzített vonatkoztatási rendszer) közül azért ezt a megoldást választottuk, mert tapasztalatunk szerint a 6. osztályos tanulónak így a legkönnyebb megérteni, hiszen átlátható, kellően kicsi logikai lépésekre bontható a megoldás.

Rávezető, előkészítő feladatok:

A felkészítő tanárnak nemcsak az a célja, hogy egyetlen feladat megoldását magyarázza el gyereknek, hanem az is, hogy az egyenes vonalú egyenletes mozgással kapcsolatos más típusú feladatokra is kitérjen. Ezért a következő feladatokat javaslom:

1.1 rávezető feladat:

András sebessége 3 m/s, Péter sebessége pedig 2 m/s. András és Péter egymással szemben haladnak egy 100 m hosszú útszakaszon. Mennyi idő után találkoznak?

Meggondolás:

András sebessége 3 m/s és a találkozásig eltelt *t* idő alatt $S_1 = 3 \cdot t$ utat tesz meg,

Péter sebessége 2 m/s és a találkozásig eltelt *t* idő alatt $S_2 = 2 \cdot t$ utat tesz meg.

Tudjuk, hogy együttesen 100 métert tesznek meg: $S_1 + S_2 = 100\ m$.

S_1 és S_2 értékét behelyettesítve: $3 \cdot t + 2 \cdot t = 100$, $5 \cdot t = 100$, $t = 20s$

Felelet: Az indulás után 20 másodperccel találkoznak.

1.2 rávezető feladat:

Az egyik kerékpáros 12 km/h sebességgel halad, a 10 perccel később induló kerékpáros sebessége 15 km/h. A második kerékpáros az indulásától mérve hány perc múlva éri utol az első kerékpárost?

Meggondolás:

$12\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 12 \cdot \frac{1000}{60} = 200\ \frac{m}{s}$,e m/p-re átváltva

Az második kerékpáros sebessége m/p-re átváltva $15\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 15 \cdot \frac{1000}{60} = 250\ \frac{m}{s}$.

A két kerékpáros közötti távolság 1 perc alatt 50 m-rel csökken (a csökkenés sebessége tehát 50 m/p).

Mivel a második kerékpáros 10 perccel később indul, ezért az első kerékpáros már meg tesz: $10 \cdot 200 = 2000$ métert, mire a második kerékpáros elindul.

Ettől kezdve úgy néz ki a kérdés, hogy mennyi idő alatt tudja behozni a második kerékpáros a 2000 métert, ha percenként 50 méterrel tudja csökkenteni a köztük levő távolságot. A csökkenés sebessége 50 m/p, így $t = \frac{2000}{50} = 40$ perc kell a hátrány behozására.

Felelet: A második kerékpáros 40 perc múlva éri utol az első kerékpárost.

1.3 rávezető feladat:

A hangya mekkora utat tesz meg 4 másodperc alatt, ha sebessége 5 m/p.

Meggondolás:

A hangya sebességét átváltjuk m/s-ba: $5 \cdot \frac{1}{60} = \frac{5}{60}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

A hangya 1 másodperc alatt $\frac{5}{60}m$ utat, 4 másodper alatt 4-szer annyit, azaz $4 \cdot \frac{5}{60} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ métert tesz meg.

Felelet: A hangya 4 másodperc alatt $\frac{1}{3}$ métert tesz meg.

2. feladat

Határozd meg azt a legnagyobb négyjegyű számot, amely osztható 7-tel és minden számjegye különböző? Válaszodat indokold!

Meggondolás:

Első lépésként meghatározzuk a legnagyobb négyjegyű számot: $10000 - 1 = 9999$.

9999-et 7-tel osztva a hányados 1428 egész, a maradék 3, ami azt jelenti, hogy 9999 – 3 =9996 osztható 7-el, azaz 9996 az a legnagyobb négyjegyű szám, ami osztható 7-tel. Ez azonban nem felel meg a feladat azon feltételének, hogy mindegyik számjegy különböző kell, hogy legyen. A gyerekek elkezdhetnek innen 7-tel visszaszámolni, míg a feladat feltétele teljesül. 9880-nál kisebb szám lehet a megoldás. A 9880 szám 7-tel való osztásakor 1411 egészet és 3 maradékot kapunk, ebből következően 9880-3=9877 szám osztható 7-tel. Ez sajnos még mindig nem elégíti ki a feladat feltételét, mivel két 7-es számjegy van a négyjegyű számban. 9877-7=9870 osztható 7-tel.

Másik lehetőség, hogy a legnagyobb helyi értékű helyen 9-et, utána 8-at, majd 7-et tesz, mert ez a sorrend 987*x* adja a lehető legnagyobb különböző jegyű számot. Mivel 987 osztható 7-tel, *x* helyére 0 kerül.

Felelet: a 9870 legnagyobb négyjegyű szám, melynek minden számjegye különböző és osztható 7-tel.

Módszertani megjegyzés:

A feladattípus kezeléséhez célszerű feleleveníteni az oszthatósággal kapcsolatos szabályokat:

- az összes páros (tehát minden második) szám osztható kettővel;
- minden harmadik szám osztható 3-mal, ezek pontosan azok a számok, amelyek számjegyeinek összege osztható 3-mal;
- minden negyedik szám osztható 4-gyel, ezek pontosan azok, amelyeknél az utolsó két számjegyből alkotott szám osztható 4-gyel;
- minden ötödik szám osztható 5-tel, ezek a 0-ra és 5-re végződő számok;
- minden hatodik szám osztható 6-tal, ezek a 3-mal osztható páros számok;
- minden hetedik szám osztható 7-tel, (6. osztályos tanulónak nem kell még tudni a 7-re vonatkozó oszthatósági szabályt);
- 8-cal minden 8. szám osztható, azok, amelyeknek utolsó három jegyéből alkotott szám osztható nyolccal;

- 9-cel minden 9. szám osztható, azok, amelyek számjegyeinek összege 9-cel osztható;
- 10-zel osztható az a szám, melynek utolsó jegye 0.

Rávezető, előkészítő feladatok:

2.1 rávezető feladat:

Melyik a legnagyobb hatjegyű szám, amely osztható 2-vel, és minden számjegye különböző?

Meggondolás:

1000000-1=999999 – legnagyobb hatjegyű szám.

999999 páratlan, tehát 999998 osztható 2-vel. Ez azonban nem jó megoldás, mert a feladat szövege kiköti, hogy mindegyik számjegynek különbözőnek kell lennie. Logikai úton rájön a tanuló, hogy 98765x a szóba jövő szám, ahol x értéke 0, 1, 2, 3 vagy 4 lehet. A legnagyobbal próbálkozunk: 987654 páros.

Felelet: 987654 legnagyobb hatjegyű szám, mely osztható 2-vel és mindegyik számjegye különböző.

2.2 rávezető feladat:

Melyik a legnagyobb ötegyű szám, amely osztható 3-mal és minden számjegye különböző?

Meggondolás:

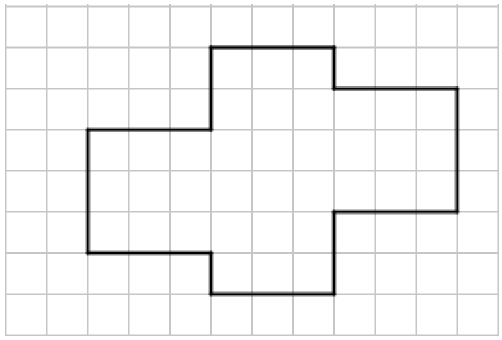
A legnagyobb háromjegyű szám: 100000-1=99999. A kapott szám a 99999 osztható 3-mal, ez így nem elég, mert a feladat kiköti, hogy mindegyik számjegynek különbözni kell. Ebből következően $\overline{9876a}$ alakban írható fel. A kapott számnak, így a számjegyek összegének is oszthatónak kell lenni 3-mal, azaz $9+8+7+6+a=30+a$ osztható 3-mal. Az a szám 3 és 0 lehet, a nagyobbikat kell kiválasztani, tehát az a=3.

Felelet: A 98763 legnagyobb ötjegyű szám, mely osztható 3-mal és minden számjegye különböző.

3. feladat

Mutasd meg, hogyan lehet az ábrán (2. ábra) öt szakaszt úgy meghúzni, hogy nyolc egybevágó részt kapjunk?

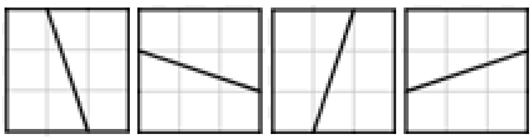
2. ábra



Meggondolás:

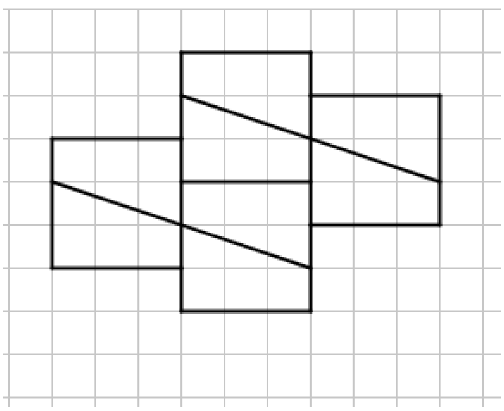
Az alakzat összesen 36 kis egységnégyzetet tartalmaz. Mivel 8 egybevágó (így egyenlő területű) részre kell felosztani, egy rész területe $\frac{36}{8}=4{,}5$ egység. Ez éppen a 3 × 3-as négyzet fele. Ha a függőleges 3 × 6-os részt vízszintesen elfelezzük, akkor négy darab 3 × 3-as négyzetet kapunk, amelyek mindegyike a 3. ábrán látható módok valamelyikével felezhető.

3. ábra



Egy összerendezett, egyállású felezés látható az alábbi ábrán (4. ábra):

4. ábra

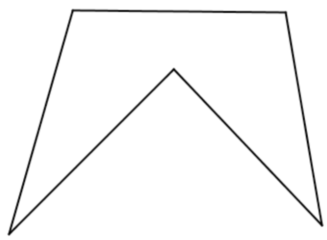


Rávezető, előkészítő feladatok:

3.1 rávezető feladat:

Az ábrán (5. ábra) látható ötszöget bontsd fel egy egyenessel három háromszögre!

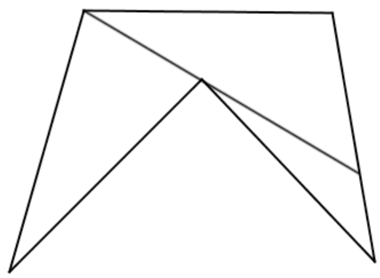
5. ábra



Meggondolás:

A feladat alkalmas arra, hogy a tanuló ráébredjen, hogy nemcsak azonos nagyságú részekre lehet felbontani (6. ábra).

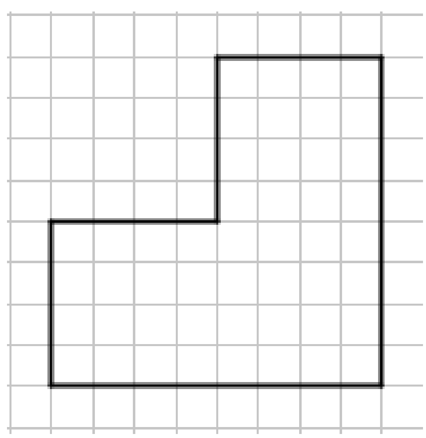
6. ábra



3.2 rávezető feladat:

A következő ábrán (7. ábra) látható alakzatot bontsd fel 4 egybevágó, az eredetihez hasonló alakzatra.

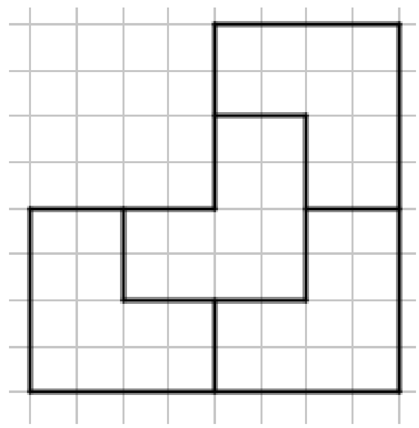
7. ábra



Meggondolás:

A feladat megoldása során megszámoljuk, hány kis négyzet van az eredeti alakzatban, 48 négyzet, ha ezt elosztom 4 egyenlő részre, akkor egy rész 12 négyzetet kell, hogy tartalmazzon (8. ábra).

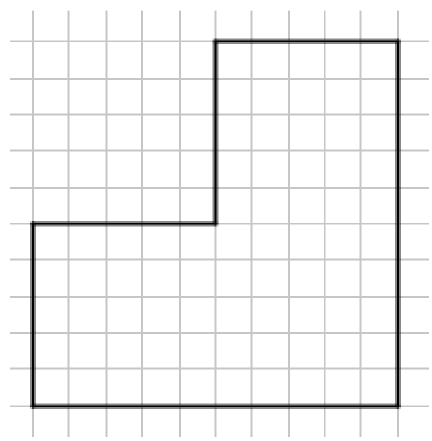
8. ábra



3.3 rávezető feladat:

A következő ábrán (9. ábra) látható alakzatot bontsd fel 4 egybevágó, az eredetihez hasonló alakzatra.

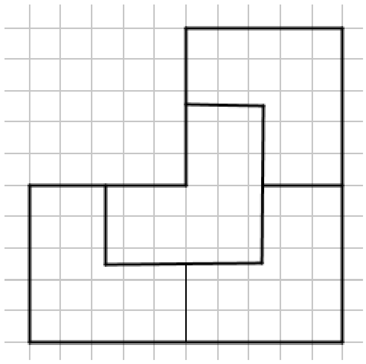
9. ábra



Meggondolás:

A feladat megoldása során ismét megszámoljuk, hogy hány kis négyzet van az eredeti alakzatban, 75 négyzet, ha ezt elosztom 4 egyenlő részre, akkor egy rész 18,75 négyzetet kell, hogy tartalmazzon (10. ábra).

10. ábra



4. feladat

A tanárnő két természetes számot írt fel a táblára. Péter az első számot megszorozta a második szám számjegyeinek összegével, így 201320132013 számot kapta. Vászja a második számot szorozta meg az első szám számjegyeinek összegével és a 201420142014-et kapta. Nem tévedett-e valamelyik fiú? Válaszodat indokold!

Meggondolás:

A feladat megoldásánál először át kell gondolni, hogyan tudnánk eldönteni, hogy a fiúk hibásan számoltak-e. A feladat szövegéből lehet arra következtetni, hogy oszthatóságra kell gondolni.

Például tudunk-e találni olyan oszthatósági szabályt, ami a szám számjegyeinek összegére vonatkozik? Igen, ilyen a 3-as és a 9-es szabály.

A két végeredmény, amit a fiúk kaptak, a 201320132013 és 201420142014 osztható 3-mal, ez nem mutat rá a tévedésre.

A 9-cel való oszthatóság már igen, mert az első esetben az első számot szorzom a második szám számjegyeinek összegével, ha az első osztható 9-cel, akkor maga a szám is osztható 9-cel. A második esetben a második számot szorzom az első szám számjegyeinek összegével, az előző feltételből tudom, hogy az első szám osztható 9-cel, tehát számjegyeinek összege szintén osztható 9-cel, tehát a két szám is osztható 9-cel.

201320132013 osztható 9-cel. 201420142014 nem osztható 9-cel.

Ebből következik, hogy az egyik fiú hibát követett el számolás közben.

4.1 rávezető feladat:

Melyik a legnagyobb négyjegyű szám, amely osztható 9-cel és minden számjegye különböző?

Meggondolás:

A legnagyobb négyjegyű szám: 10000 – 1=9999, amely osztható 9-cel, ez azonban nem elégíti ki a feladat feltételeit. Mivel minden számjegynek különböznie kell, ezért $\overline{987a}$ alakban kell felírni. Tudjuk, hogy azok a számok oszthatók 9-cel, amelyek számjegyeinek összege osztható 9-cel, azaz $9+8+7+a=24+a$ összegnek osztódnia kell 9-cel. Ebből következik, hogy *a=3.*

Felelet: 9873 a legnagyobb négyjegyű szám, mely osztható 9-cel és mindegyik számjegye különböző.

Irodalomjegyzék

1. Ambrus András (2004): *Bevezetés a matematika didaktikába. Egyetemi jegyzet.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest
2. Varga, Tamás (1966): *Complex method of teaching mathematics to children from the age of 6 years. Contemporary methods and tools in the service of school reform in Hungarian.* Tankönyvkiadó, Budapest
3. Vásárhelyi, Éva (2006): Problem solving with help of combination of different representations. In: Fothe, Michael – Hermann, Martin – Zimmermann, Bernd (eds.): *Learning in Europe: Computer in Mathematics Instruction.* Jena: Collegium Europeum Jenense, pp. 68–87.