MAGYAR GEOFIZIKA
61. évf. (2020) 4. szám, 199–202

TANULMÁNY

Kicsiny kvadrupólus mágnes paramétereinek meghatározása spinner-magnetométeres mérési adatokból

Rövid közlemény

Márton P.

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Geofizikai és Űrtudományi Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter stny. 1/C
E-mail: archeomag@caesar.elte.hu

Ez a tanulmány megmutatja, hogy a vonatkozó mérési adatokból nemcsak a geomágneses kvadrupólusnak, hanem egy kis laboratóriumi kvadrupólus mágnesnek a paramétereit is meg lehet határozni közvetlenül, egy egzakt analitikai eljárás alkalmazásával.

Márton, P.: Direct analytical solution for the parameters of a small-sized magnetic quadrupole measured on a suitable spinner magnetometer

The paper shows that not only the parameters of the geomagnetic quadrupole but those of a small quadrupole magnet measured on a suitable spinner magnetometer in the laboratory can be determined directly using an exact analytical method besides numerical approximation by fixpoint iteration.

Beérkezett: 2021. február 16.; *elfogadva:* 2021. február 26.

Bevezetés

Pontszerű kvadrupólus mágnest forgatunk egyenletes ω szögsebességgel sorbakapcsolt tekercspár (Helmholtz-tekecs) belsejében, és regisztráljuk a tekercspár sarkain mérhető indukált elektromos feszültséget. Nulla mágneses térben végezve a kísérletet, zajmentes esetben a kimenő feszültség nulla lesz. Szembekapcsolt tekercspár mellett (anti-Helmholtz-tekercs) a kísérlet folytonos, 2ω frekvenciájú V váltófeszültséget eredményez, amelynek A amplitúdója és LA fázisa a kvadrupólus m_2 momentumának és két tengelyirányát jellemző (ϑ_1, λ_1), (ϑ_2, λ_2) szögeknek függvénye:

$$V = A\sin(2\omega t + \mathrm{LA}). \qquad (1)$$

A vonatkozó alábbi összefüggések levezetése megtalálható Márton (2018) cikkének Appendix A1 című részében. Az eredményül kapott (A19)–(A21) egyenletek (op. cit.), arra az esetre vonatkoznak, amikor a mérést a magnetometriában szokásos módon, a mágnes három ortogonális helyzetében végezzük, azaz rendre a z, x és y tengelye körül forgatjuk. Ezáltal elegendő számú adatot kapunk a mérendő mágnes paramétereinek meghatározásához.

$$A_1 = Km_2 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_1\,, \qquad (2.1)$$

$$\mathrm{tg}\,\mathrm{LA}_1 = \mathrm{tg}\,(\lambda_1 + \lambda_2)\,, \qquad (2.2)$$

$$A_2 = Km_2[(1 - \sin^2\vartheta_1\cos^2\lambda_1)(1 - \sin^2\vartheta_2\cos^2\lambda_2)]^{1/2}, \qquad (2.3)$$

$$\mathrm{tg}\,\mathrm{LA}_2 = \left[\frac{\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\sin\lambda_2 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2\sin\lambda_1}{\sin\vartheta_1\sin\lambda_1\sin\vartheta_2\sin\lambda_2 - \cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}\right], \qquad (2.4)$$

$$A_3 = Km_2[(1 - \sin^2\vartheta_1\sin^2\lambda_1)(1 - \sin^2\vartheta_2\sin^2\lambda_2)]^{1/2}, \qquad (2.5)$$

$$\mathrm{tg}\,\mathrm{LA}_3 = \left[\frac{\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2\cos\lambda_2 + \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\lambda_1}{\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\cos\lambda_1\sin\vartheta_2\cos\lambda_2}\right]. \qquad (2.6)$$

ISSN 0025-0120 (print), ISSN 2677-1497 (online)

Az egyenletek bal oldalán az A amplitúdók (voltban, V) és LA fázisok (°-ban) indexei az 1–3. mérési helyzetre utalnak. K a felvevő tekercs állandója, dimenziója volt/Am^3. A jobb oldalon a változók indexei a kvadrupólus 1. és 2. tengelyére vonatkoznak (ϑ a tengelyirány pólustávolság, λ a hosszúság koordinátája). A tengelyek sorrendje láthatóan közömbös.

Bizonyítást nyert (op. cit.), hogy a fenti egyenletek számítógép segítségével numerikusan tetszőleges pontossággal megoldhatók. A jelen munkában a (2.1)–(2.6) egyenletek közvetlen analitikai megoldásával foglalkozunk. Ez utóbbi előnye a numerikus megoldással szemben, hogy matematikailag pontos, és a kiinduláshoz nem kell ismerni (vagy keresni) egy közelítő megoldást.

Az analitikus megoldás lehetőségénk felvetése

Mágneses multipólusok paramétereinek meghatározása a földmágnességben először a geomágneses potenciál Gauss-koefficienseinek geometriai értelmezése céljából merült föl. A földmágneses multipólusok paraméterei a James-algoritmus (1968) segítségével felállított (felállítható) egyenletek egy szintén általa kidolgozott numerikus módszerrel történő megoldásával számíthatók ki (James, ib.). A probléma közvetlen analitikai megoldására először Umow (1904) tett kísérletet. Umow az első három földmágneses multipólus paramétereinek meghatározásával foglalkozott, amelyek közül a dipólus esete triviális. Kifogástalan analitikai megoldás azonban mindössze a földmágneses kvadrupólusra ismeretes (Willis 1982).

A másodrendű Gauss-koefficiensek (g_2^0, g_2^1, h_2^1, g_2^2, h_2^2) és a földmágneses kvadrupólus paraméterei (M_2: erősség és a tengelyek (ϑ_1, λ_1), (ϑ_2, λ_2) koordinátájú döféspontjai a földgömb felszínén) között fennálló

$$g_2^0 = 2M_2[\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - 0{,}5\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\lambda_1-\lambda_2)], \quad (3.1)$$

$$g_2^1 = \sqrt{3}M_2(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\lambda_2 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2\cos\lambda_1), \quad (3.2)$$

$$h_2^1 = \sqrt{3}M_2(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\lambda_2 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_2\sin\lambda_1), \quad (3.3)$$

$$g_2^2 = \sqrt{3}M_2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos(\lambda_1+\lambda_2), \quad (3.4)$$

$$h_2^2 = \sqrt{3}M_2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\sin(\lambda_1+\lambda_2) \quad (3.5)$$

egyenletekből kiindulva, $g_2^2 \neq 0$ és $h_2^2 \neq 0$ esetén definiálhatjuk M^*-ot és $\mathrm{LA}_1 = \lambda_1 + \lambda_2$-t:

$$M_2^* = \{[(g_2^2)^2 + (h_2^2)^2]/3\}^{1/2}, \qquad \mathrm{tg\,LA}_1 = h_2^2/g_2^2. \quad (3.6)$$

Láthatóan

$$M_2^* = M_2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2, \quad (3.7)$$

ahol $M_2 = (\mu_0/4\pi)/(m_2/a^4)$ a földmágneses kvadrupólus erőssége. Ebben a képletben μ_0 a vákuum permeabilitása, m_2 a földmágneses kvadrupólus momentuma és a a földgömb sugara.

Bevezetve még az

$$x = \mathrm{ctg}\,\vartheta_1 \qquad \text{és} \qquad y = \mathrm{ctg}\,\vartheta_2 \quad (4)$$

változókat is, a (3.1)–(3.5) egyenletek a következő háromra redukálhatók:

$$g_2^0 = 2M_2^*[xy - 0{,}5\cos(\lambda_1-\lambda_2)], \quad (5.1)$$

$$g_2^1 = \sqrt{3}M_2^*(x\cos\lambda_2 + y\cos\lambda_1), \quad (5.2)$$

$$h_2^1 = \sqrt{3}M_2^*(x\sin\lambda_2 + y\sin\lambda_1), \quad (5.3)$$

Umow (1904), Willis (1982), Márton (2020).

Az (5.1)–(5.3) egyenletek célszerű kombinációjával előállított három egyenletből az x és az y változók kiküszöbölése után a $\Delta = \lambda_1 - \lambda_2$ változó koszinuszára harmadfokú egyenlet állítható fel, amelynek az

$$|(\cos\Delta)_0| \leq 1 \quad (6)$$

feltételt kielégítő egyetlen valós gyöke szolgáltatja az alapmegoldást (Willis 1982).

Noha a fenti formalizmus planetáris méretű kvadrupól mágnesre vonatkozik, a (2.1)–(2.6) egyenleteknek az (5.1)–(5.3) alakra hozásával és megoldásával kicsiny kvadrupólus mágnes laboratóriumi mérési eredményeinek kiértékelésére is alkalmazható lehet.

A (2.1)–(2.6) egyenletek átalakítása és közvetlen analitikai megoldása

Feltéve, hogy $A_1 \neq 0$, kiszámítjuk az

$$S_2 = (A_2/A_1)\sin\mathrm{LA}_2, \quad S_3 = (A_3/A_1)\sin\mathrm{LA}_3,$$
$$C_2 = (A_2/A_1)\cos\mathrm{LA}_2, \quad C_3 = (A_3/A_1)\cos\mathrm{LA}_3, \quad (7)$$
$$m_2^* = A_1/K$$

értékeket. Megmutatható, hogy

$$(C_3 - C_2) = 2[xy - 0{,}5\cos(\lambda_1-\lambda_2)], \quad (8.1)$$

$$S_3 = y\cos\lambda_1 + x\cos\lambda_2, \quad (8.2)$$

$$S_2 = x\sin\lambda_2 + y\sin\lambda_1, \quad (8.3)$$

azaz a (8.1)–(8.3) egyenletek

$$(C_3 - C_2)m_2^* = g_2^0, \qquad \sqrt{3}S_3 m_2^* = g_2^1,$$
$$\sqrt{3}S_2 m_2^* = h_2^1, \quad \text{és} \quad M_2^* = m_2^* \quad (9)$$

esetén azonossá válnak az (5.1)–(5.3) egyenletekkel. Willist (1982) követve, az x és az y változók kiküszöbölése nyomán $\cos\Delta$-ra a következő harmadfokú egyenlet írható fel:

$$F(\cos\Delta) = \cos^3\Delta + (C_3 - C_2)\cos^2\Delta$$
$$- (1 + S_3^2 + S_2^2)\cos\Delta + S_3^2 + S_2^2 - C_3 + C_2 \quad (10)$$
$$- 2[S_3\sin(\mathrm{LA}_1/2) - S_2\cos(\mathrm{LA}_1/2)]^2 = 0\,.$$

A (10) egyenletnek egyetlen olyan megoldása van, amely a (6) feltételt kielégíti. Legyen ez $(\cos\Delta)_0$. Ekkor

$$\pm\Delta = \arccos(\cos\Delta)_0\,, \tag{11.1}$$

ahol $\Delta = \lambda_1 - \lambda_2$. Összevetve ezt $LA_1 = \lambda_1 + \lambda_2$-vel, pozitív előjel mellett

$$\lambda_1 = (LA_1 + \Delta)/2\,, \qquad \lambda_2 = (LA_1 - \Delta)/2\,, \tag{11.2}$$

negatív előjel mellett

$$\lambda_1 = (LA_1 - \Delta)/2\,, \qquad \lambda_2 = (LA_1 + \Delta)/2\,. \tag{11.3}$$

A sorrend láthatóan közömbös. $x = \mathrm{ctg}\,\vartheta_1$ és $y = \mathrm{ctg}\,\vartheta_2$ értékeit az

$$x + y = \{[S_3 \sin(LA_1/2) - S_2 \cos(LA_1/2)]^2 (1 - \cos\Delta)^{-1} + (S_3 - S_2) + \cos\Delta\}^{1/2}, \tag{12}$$

$$x - y = [S_3 \sin(LA_1/2) - S_2 \cos(LA_1/2)]/\sin(\Delta/2) \tag{13}$$

egyenletek jobb oldalai összegének, illetve különbségének fele szolgáltatja. Ha $x + y = \pm a$ és $x - y = b$, akkor

$$\mathrm{ctg}\,\vartheta_1 = (a + b)/2 \quad \text{és} \quad \mathrm{ctg}\,\vartheta_2 = (a - b)/2\,, \tag{14.1}$$

illetve

$$\mathrm{ctg}\,\vartheta_1 = -(a - b)/2 \quad \text{és} \quad \mathrm{ctg}\,\vartheta_2 = -(a + b)/2\,, \tag{14.2}$$

a helyes (ϑ_1, ϑ_2) értékpár pedig az lesz, amelyik a (11.2) vagy (11.3) szerinti λ-kkal együtt kielégíti a (8.2) és (8.3) egyenleteket.

Az m_2 paraméter kiszámítása a (2.1) egyenlet alapján történik, ui. $m_2^* = m_2 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2$, ahol (7) utolsó egyenlete szerint $m_2^* = A_1/K$.

A fentebb kifejtett Willis-féle algoritmus a legtöbb reális esetben alkalmazható a magnetométeres mérések egzakt analitikai kiértékelésére. A megmaradó egyetlen, $A_1 = 0$ esetben vagy az egyik, vagy mindkét tengelyirány pólustávolságának szinusza egyenlő zérussal.

Például a $\sin\vartheta_1 = 0$ helyettesítéssel előálló (2.1)–(2.6) egyenletek kombinálásával a másik pólus paraméterei a

$$\cos\vartheta_2 = \left[\frac{A_3^2 - A_2^2}{A_3^2\,\mathrm{tg}^2 LA_3 - A_2^2\,\mathrm{tg}^2 LA_2}\right]^{1/2} \tag{15.1}$$

és a

$$\mathrm{tg}\lambda_2 = -(\mathrm{tg}\,LA_2/\mathrm{tg}\,LA_3) \tag{15.2}$$

egyenletekből, a momentum pedig az

$$m_2 = [(A_2^2 + A_3^2)/(1 + \cos^2\vartheta_2)]^{1/2} \tag{16}$$

egyenletből számítható ki.

Ha mindkét pólustávolság szinusza egyenlő zérussal, akkor az axiális (z tengellyel parallel és antiparallel tengelyekkel rendelkező) kvadrupólus mágnes triviális esetével állunk szemben, amelynek momentuma az utolsó egyenletből $\vartheta_2 = 0$ helyettesítéssel kapható meg.

Számítási példa

Egy ismert paraméterekkel rendelkező kvadrupólus mágnes magnetométeres mérése a következő eredményeket adja:

$A_1 = 13{,}743488$ μV, $LA_1 = 105{,}00000$ °,

$A_2 = 17{,}519437$ μV, $LA_2 = 88{,}418058$ °,

$A_3 = 12{,}855950$ μV, $LA_3 = 76{,}159998$ °.

A mérőtekercs állandója $K = 998{,}099$ V/Am³.

Ezekből az adatokból a (7) képletek alapján

$$S_2 = 1{,}274259, \quad S_3 = 0{,}908264,$$

$$C_2 = 0{,}0351913, \quad C_3 = 0{,}223763$$

$$\text{és } m_2^* = 0{,}0137697.$$

értékek számíthatók ki. A (10) egyenlet a fenti adatokkal számszerűsített együtthatókkal így fest:

$$F(\cos\Delta) = \cos^3\Delta + 0{,}188572\cos^2\Delta - 3{,}448679\cos\Delta + 2{,}254026 = 0\,,$$

amelynek a (6) feltételt kielégítő megoldása:

$$\cos\Delta = 0{,}965989, \text{ tehát } \Delta = \pm 14{,}986\,°.$$

A (11.2) egyenletből

$$\lambda_1 = 59{,}993\,° \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 45{,}007\,°.$$

A (11.3) egyenletből ugyanezek az értékek állnak elő λ_2-re és λ_1-re.

A további számítás a (12) és (13) egyenletek alapján történik.

$$(x + y) = \pm\, 1{,}577304 \quad \text{és} \quad (x - y) = 0{,}422891,$$

ahonnan az első képlet jobb oldalán pozitív előjel mellett

$$x = 1{,}000098 \quad \text{és} \quad y = 0{,}577207,$$

negatív előjel mellett

$$x = -\,0{,}577207 \quad \text{és} \quad y = -\,1{,}000098$$

értékeket kapjuk az $x = \mathrm{ctg}\,\vartheta_1$ és $y = \mathrm{ctg}\,\vartheta_2$ változókra.

Az első esetben x-hez válasszuk a fenti λ_1-et, y-hoz pedig a fenti λ_2-t. Ezeket a (8.2) és (8.3) képletekbe helyettesítve, $S_3 = 0{,}9957$ és $S_2 = 1{,}207$ adódik, míg ha x-hez a λ_2-t, y-hoz a λ_1-et választjuk, akkor $S_3 = 0{,}90825$ és $S_2 = 1{,}27424$ az eredmény. Minthogy S_3 és S_2 utóbbi értékei egyeznek meg ezeknek a (7) képletek szerint kiszámított értékeivel, a mért kvadrupólus szögparaméterei:

$$\vartheta_1 = \mathrm{arc\ tg}(1/1{,}000098) = 45{,}00\,° \quad \text{és} \quad \lambda_1 = 45{,}00\,°,$$

$$\vartheta_2 = \mathrm{arc\ tg}(1/0{,}577207) = 60{,}00\,° \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 60{,}00\,°.$$

A második esetben ugyanígy eljárva a (8.2) és (8.3) feltételeket a fenti kvadrupólus tengelyirányainak megfordításával létrejövő kvadrupólus paramétereit kapjuk meg:

$\vartheta_1 = \text{arc tg}(1/(-1{,}000098)) = 135{,}00\,°$ és $\lambda_1 = 225{,}00\,°$,

$\vartheta_2 = \text{arc tg}(1/(-0{,}577207)) = 120{,}00\,°$ és $\lambda_2 = 240{,}00\,°$.

A két quadrupólus mágnes tere azonos, a második eset tárgyalása szükségtelen.

A kvadrupólus m_2 momentumára ϑ_1 és ϑ_2 ismeretében a (7) képletsor utolsó összefüggésének felhasználásával kapjuk:

$$m_2 = \frac{m_2^*}{\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2} = \frac{0{,}0137697}{0{,}612372} = 2{,}2486\text{E-}02\ \mu\text{Am}^3.$$

A fenti eredmények a számítások pontosságán belül viszszaadják a kvadrupólus eredetileg ismert paramétereit, hasonlóan a Márton (2018) által javasolt iteratív módszerrel elvégzett számítás eredményeivel.

A tanulmány szerzője

Márton Péter

Hivatkozások

James R. W. (1968): Multipole analysis. I. Theory, and geomagnetic multipoles 1965·0. Aust. J. Phys., 21, 455–464

Márton P. (2018): Simple method of the complete result measurement of an inhomogeneously magnetised palaeomagnetic sample on a spinner magnetometer with a coil sensor. Measurement., 127, 501–511

Márton P. (2020): Az első öt földmágneses multipólus IGRF-13 koefficiensek értékeiből számolt paramétereinek táblázatai (1900–2020). Magyar Geofizika, 61/2, 1–15

Umow N. (1904): Die Construction des geomagnetischen Bildes des Gauss'schen Potentials, als Methode zur Erforschung der Gesetzte des Erdmagnetismus. Terr. Magn. Atmos. Elect., 9, 1005–1012

Willis D. M. (1982): A direct analytical method of calculating the quadrupole parameters of a planetary magnetic field. Geophys. J. R. Astr. Soc., 68, 751–764