

A forrás térbeli jellemzőinek a hatása a magnetotellurikus adatokra

PRÁCSER ERNŐ

MTA CSFK Geodéziai és Geofizikai Intézet, Sopron Csatkai E. u. 6–8.
E-mail: pracser.erno@csfk.mta.hu

A magnetotellurikus (MT) módszer esetében azt feltételezzük, hogy a földben az ionoszférából érkező elektromágneses síkhullámok hatására áramok indukálódnak és ezek hatását érzékeljük az elektromágneses térkomponensekben. Kis mélységű kutatásoknál, amikor a magnetotellurikus mérések nagyobb frekvenciákra vonatkozó részei hordozzák az információt, ez a síkhullámú közelítés feltétlenül teljesül. Nagyobb mélységek esetén az alacsony frekvenciákhoz tartozó adatok a meghatározóak, ezért ekkor a feltételezett forrás kiterjedésének és távolságának a hatása esetleg már nem elhanyagolható. Itt most két modellre végzünk számításokat. Az első modellnél azt feltételezzük hogy az elektromágneses teret az ionoszférában egy végtelen vonalforrás gerjeszti. A második esetben pedig a forrás egy adott, a felszínnel párhuzamos síkbeli speciális árameloszlás. Nyilvánvaló, hogy a valóságban a források nem ilyen egyszerűek, de azok a következtetések, amelyeket a forrás vízszintes és függőleges távolságának a hatására, illetve magasságára vonatkozólag levonunk, bonyolultabb esetekben is hasonlóan érvényesek lehetnek.

Prácser, E.: The effect of the spatial characteristics of the source on the magnetotelluric data

At the magnetotelluric method an electromagnetic plane wave, arriving from the ionosphere, is supposed to induce electric current in the Earth, and the effect of these currents are observed in the electromagnetic field components. At explorations for small depths, when the information is contained in the higher frequency domain of the magnetotelluric measurement, this plane wave assumption is certainly valid. In the case of greater depths, data belonging to lower frequencies are significant, so the effect of the extent and distance of the supposed source can not be negligible. In this paper calculations will be performed for two types of models. At the first model a line current in the ionosphere is assumed to stimulate the electromagnetic field. In the second case the source is a special current distribution in a plane, parallel to the surface. It is clear, that in reality the sources are not so simple, but the drawn conclusions, regarding the effect of the horizontal and vertical distance of the source, may be valid for more complicated cases.

Beérkezett: 2012. május 4.; *elfogadva:* 2012. szeptember 12.

1. Bevezetés

A magnetotellurikus mérések első alkalmazásai idején az volt az általános vélekedés, hogy a módszer csak síkhullám esetén ad pontos eredményt azaz feltételezték, hogy a szondázás környezetében a gerjesztő elektromágneses tér x és y irányban csak kis mértékben változik. A mért elektromágneses értékekből a Tyihonov–Cagniard-impedancia, illetve az abból számított látszólagos fajlagos ellenállás és fázis alkalmazásával következtettek a föld rétegeinek a fajlagos ellenállására. Később Dmitriev és Berdichevsky (1979) igazolta, hogy a Tyihonov–Cagniard-impedancia akkor is alkalmazható, ha a mágneses térerősség vízszintes irányban a mérés környezetében nem elhanyagolható mértékben, de lineárisan változik. Hangsúlyozták, hogy a mágneses tér változása nagyobb mértékű is lehet, a lényeg a linearitáson van. A környezet mérete a kutatási mélység nagyságának

kb. háromszorosa. Berdichevsky és Zhdanov (1984) azt állítja, hogy ez a feltétel az esetek túlnyomó részében teljesül, kivéve azt az esetet, amikor az elektromágneses térnek lokális maximuma van (sarkvidék). Feltételezhető, hogy a gerjesztő elektromágneses tér 300–500 km távolságban lineárisan változik, ezért a Tyihonov–Cagniard-képlet 100–150 km mélységig alkalmazható. Ez az állítás is indokolja hogy foglalkozunk a vonalforrás esetével, és attól nagyobb távolságra vizsgáljuk az elektromágneses térkomponensekből számított impedanciát. Ez a vizsgálat esetünkben az elektromágneses teret meghatározó képletek és a modellszámítások elemzésére vonatkozik. Most kétféle forrásra elemezzük a Tyihonov–Cagniard-impedancia alkalmazhatóságát. Végtelen vonalforrásra és egy síkban eloszló, x tengely irányú áramok által keltett elektromágneses térre, ahol az egyes áram elemek fázisa az y tengely mentén periodikusan (szinuszosan) változik. Ilyen síkbeli áramok által

keltett elektromágneses tér alapján számítható MT impedancia tulajdonságait elemzi Price (1962) és Price nyomán Ádám (1966). A síkhullámú gerjesztésen alapuló magnetotellurikus mérési adatoknak a forrás hatása által okozott torzítását korábban az impedancia korrekciójával próbálták kiegyenlíteni. A korrigált impedancia alapján számított látzólagos fajlagos ellenállás- és fázisgörbéket elemezték és hasonlították össze a tipikus modellekre előzetesen kiszámított és közölt görbeseregekkel. Ebben a cikkben egy másik megoldás figyelembe vételét javasoljuk. Abban az esetben amikor a forrás torzító hatását egy ismeretlen mennyiség okozza, akkor azt az inverzió során egy ugyanolyan ismeretlen paraméternek tekintjük, mint a rétegeparamétereket, és azzal számítjuk az előremodellezést. Az inverziós algoritmus pedig erre a mennyiségre is ad egy becslést.

A pontforrásra és a vonalforrásra érvényes elektromágneses számítások rétegezett féltérre számtalan cikkben és szakkönyvben szerepelnek. Ugyanez mondható el a síkhullámú esetre, azaz a magnetotellurikus számításokra is. Az is elfogadott tény, hogy ha a forrástól távolodunk, akkor az elektromágneses tér közelít a síkhullámú esetre érvényeshez. Ennek az állításnak a matematikai levezetése viszont nem magától értetődő. Ezért ebben a cikkben a rétegezett féltér esetére megmutatjuk a kapcsolatot a már ismert vonalforrásra vonatkozó és a síkhullámú esetre érvényes képletek között. A vonalforrásra vonatkozó képlet levezetésének fő lépéseit is közöljük, az egyes lépések részletes indoklásától eltekintünk, hiszen ez a hivatkozott szakirodalomban szerepel.

2. A végtelen kiterjedésű vonalforrás elektromágneses tere

A véges és végtelen vonalforrás elektromágneses terét a szakirodalomban a leggyakrabban az elektromos dipól terének integrálásával számítják. A végtelen vonalforrás esetén ennél egyszerűbb módon is eljuthatunk az elektromágneses tér meghatározásához, ha a Maxwell-egyenleteket közvetlenül erre a forrásra írjuk fel. Mivel ez a fajta megoldás a geofizikai szakirodalomban nem túl gyakori, a Maxwell-egyenletek frekvenciatartománybeli változatából kiindulva levezetjük az MT impedancia képletét:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + i\omega\epsilon \mathbf{E} + \mathbf{s}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega\mu \mathbf{H}. \quad (2)$$

Az \mathbf{s} forrásvektornak csak x irányú komponense van, a z tengely lefelé irányul:

$$s_x = I \delta(y) \delta(z - h),$$

I a vezetőben folyó áram erőssége, δ jelöli a Dirac- δ függvényt, ω a körfrekvencia, μ a mágneses permeabilitás, ϵ a dielektromos állandó, σ a közeg vezetőképessége, $h < 0$ a forrás magassága. Az elektromágneses teret az elektromos vektorpotenciál alapján számoljuk. A vektorpotenciálnak esetünkben csak az x irányú komponense különbözik 0-tól.

Az elektromos dipólnál a vektorpotenciálnak z irányú komponense is van (Scriba, 1974), de szimmetriaokok miatt ez most kiesik. A vektorpotenciál így

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alakú. Ismert, hogy az elektromos vektorpotenciálból hogyan számíthatók az elektromos és mágneses térerősségvektorok (Kaufmann, Keller 1985). Vegyük figyelembe, hogy az A_x nem függ x -től, ezért $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Emiatt a végtelen vonalforrás esetén az elektromágneses tér vektorpotenciálból való számítása leegyszerűsödik,

$$\mathbf{E} = -i\omega\mu \mathbf{A}, \quad (3a)$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (3b)$$

A Helmholtz-egyenlet levezetése is ismert, de mivel végtelen vonalforrásra ez egyszerűbb az általános esetenél, közöljük levezetésének lényeges lépéseit. Az (1) egyenletbe helyettesítjük be \mathbf{E} és \mathbf{H} (3) képletekkel meghatározott értékét! Ekkor az \mathbf{A} vektorpotenciálra kapunk egy differenciálegyenletet:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{A} + \mathbf{s}.$$

Újra figyelembe véve, hogy $\text{div } \mathbf{A} = 0$, megkapjuk az \mathbf{A} -t meghatározó Helmholtz-differenciálegyenletet, amely tartalmazza a forrást is. Az ϵ dielektromos állandót a továbbiakban 0-nak vesszük, mivel a vizsgálataink elsősorban kis frekvenciák esetére vonatkoznak, amikor ez az elhanyagolás megtehető.

$$\Delta \mathbf{A} - \gamma^2 \mathbf{A} = -\mathbf{s},$$

ahol $\gamma = \sqrt{i\omega\mu\sigma}$ a hullámszám. A vektorpotenciál x komponensére vonatkozó Helmholtz-egyenlet tehát

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} A_x(y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_x(y, z) - \gamma^2 A_x(y, z) = -I \delta(y) \delta(z - h). \quad (4)$$

Vegyük a (4) egyenlet y változó szerinti Fourier-transzformáltját! $A_x(y, z)$ Fourier-transzformáltját jelöljük $f(z, \nu)$ -vel! A transzformált differenciálegyenletben az y szerinti kétszeres deriválás egy $-\nu^2$ szerinti szorzatként jelenik meg, a Dirac- $\delta(y)$ függvény Fourier-transzformáltja az azonosan 1 függvény, ezért

$$f(z, \nu)(\nu^2 + \gamma^2) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z, \nu) = I \delta(z - h). \quad (5)$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai homogén közegben a z változó pozitív és negatív kitevőjű exponenciális függvényeinek az összegei. Az általános alak

$$f(z, \nu) = c_1 \exp(-\nu_0 z) + c_2 \exp(\nu_0 z), \quad (6)$$

ahol $\nu_0^2 = \nu^2 + \gamma^2$. A megoldásnak ki kell elégítenie azt a feltételt, hogy

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z, \nu) = 0,$$

továbbá $z = h$ -nál a z szerinti deriváltjának ugrásszerűen meg kell változnia az (5) egyenlet jobb oldalán fellépő Dirac- δ miatt. A feltételeknek megfelelő függvény homogén közegben tehát

$$f(z, \nu) = \frac{I}{2\nu_0} \exp(-\nu_0 |z - h|).$$

Vákuumban, amely egy speciális homogén közeg, $\sigma = 0$ miatt $\gamma_0^2 = i\omega\mu\sigma = 0$, ezért ekkor $\nu_0 = \nu$. Az $f(z, \nu)$ függvény homogén közegbeli képletét és az általános megoldást (6) figyelembe véve az $f(z, \nu)$ függvény kiszámítható rétegezett féltér esetére. Ez számos, a témakörrel foglalkozó munkában megtalálható (Keller, Frischknecht 1966, Scriba 1974, Kaufmann, Keller 1983, Kaufmann, Keller 1985, Weaver 1994). A megoldások azon alapulnak, hogy az f függvény megoldása minden rétegben általánosan a (6) képlettel adható meg. Továbbá figyelembe kell venni, hogy az f függvény és annak a z szerinti deriváltja a réteghatárokon folytonos. Rétegezett modellre az f függvény rekurzióval számítható, ennek többféle változata létezik. Most levezetés nélkül csak egyet mutatunk be, amely az $R_j(\nu)$ reflexiók együtthatóin alapul.

$$R_j(\nu) = \frac{\frac{\nu_j - \nu_{j+1}}{\nu_j + \nu_{j+1}} + R_{j+1}(\nu) \exp(-2\nu_{j+1} d_{j+1})}{1 + \frac{\nu_j - \nu_{j+1}}{\nu_j + \nu_{j+1}} R_{j+1}(\nu) \exp(-2\nu_{j+1} d_{j+1})}, \quad (7)$$

$$R_n(\nu) = 0,$$

ahol n a rétegek száma, d_j a j -edik réteg vastagsága, σ_j a j -edik réteg vezetőképessége, $\nu_j^2 = \nu^2 + i\omega\mu\sigma_j = \nu^2 + \gamma_j^2$. Az $f(z, \nu)$ függvény értéke a felszín és a forrás között $R_0(\nu)$ függvényében

$$f(z, \nu) = \frac{\exp(\nu h)}{2\nu} (\exp(-\nu h) + R_0(\nu) \exp(\nu h)),$$

$$h \leq z \leq 0.$$

$A_x(y, z)$ -t az $f(z, \nu)$ inverz Fourier-transzformáltjával számítjuk. Vegyük figyelembe, hogy $f(z, \nu)$ ν -nek páros függvénye, ezért $A_x(y, z)$ egy koszinusz-transzformálttal is számítható. A vektorpotenciál x irányú komponense rétegezett közegben

$$A_x(y, z) = \frac{I}{2\pi_0} \int_0^\infty \frac{\exp(\nu h)}{\nu} (\exp(-\nu z) + R_0(\nu) \exp(\nu z)) \cos(\nu y) d\nu. \quad (8)$$

A (8) képletben az integráljelen belül azt a függvényt, amellyel a koszinusz függvény meg van szorozva, magfüggvénynek ($f(z, \nu)$) is hívjuk. Az impedancia számításához szükséges elektromágneses térkomponenseket a vektorpotenciálból a (3) képletekkel számítjuk. Az elektromos térerősség x irányú komponensét $A_x(y, z)$ -nek $-i\omega\mu$ -vel való szorzásával kapjuk:

$$E_x(\omega, y, z) = -\frac{i\omega\mu I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(\nu h)}{\nu} (\exp(-\nu z) + R_0(\nu) \exp(\nu z)) \cos(\nu y) d\nu.$$

A mágneses térerősség y irányú komponense

$$H_y(\omega, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} A_x(y, z) = \frac{I}{2\pi_0} \int_0^\infty \exp(\nu h) (-\exp(-\nu z) + R_0(\nu) \exp(\nu z)) \cos(\nu y) d\nu.$$

Ezek a képletek szerepelnek Pirjola és Botler (2001) cikkében is. Az $E_x(\omega, y, z)$ -t és a $H_y(\omega, y, z)$ -t meghatározó képletek levezethetők az x irányú elektromos dipólra vonatkozó képletek integrálásával is. Figyelembe véve, hogy az elektromos dipól elektromágneses térkomponenseit meghatározó képletek a magfüggvény és a $J_0(\nu r)$ vagy a $J_1(\nu r)$, ($r = [x^2 + y^2]^{1/2}$) Bessel-függvény szorzatának integráljaként állnak elő, ehhez a

$$\frac{2\cos(\nu(y - y_0))}{y - y_0} = \int_0^\infty J_0(\nu \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) dx_0 \quad (9)$$

integrált kell alkalmazni. A (9) képlet Watson (1966) 13.47 (5) képletének egy speciális esete. Összességében ez egy bonyolultabb eljárás lenne, mivel az elektromos dipól esetén a vektorpotenciálnak z irányú komponense is van. A vektorpotenciál z komponenséhez tartozó tagok az x szerinti integrálás során kiesnek. Az impedancia értéke a felszínen ($z = 0$), végtelen vonalforrás hatása esetén

$$Z_{xy}(\omega, h) = \frac{E_x(\omega)}{H_y(\omega)} = i\omega\mu \frac{\int_0^\infty \frac{\exp(\nu h)}{\nu} [1 + R_0(\nu)] \cos(\nu y) d\nu}{\int_0^\infty \exp(\nu h) [1 - R_0(\nu)] \cos(\nu y) d\nu}. \quad (10)$$

Az impedanciából a magnetotellurikában jól ismert képletekkel látszólagos fajlagosellenállás- és fázisértékek számíthatók,

$$\rho_a(\omega) = \frac{|Z_{xy}(\omega)|^2}{\omega\mu}, \quad \phi(\omega) = \text{atan} \left(\frac{\Im Z_{xy}(\omega)}{\Re Z_{xy}(\omega)} \right).$$

A (10) képletben a ν a nevezőben is szerepel, ami a későbbiekben kényelmetlen lehet, mivel szükség lesz a magfüggvény $\nu = 0$ -nál felvett értékére. Ezért ezt a nevezőben levő ν -t érdemes kiküszöbölni egy átalakítással, amely a (7) rekurziós képletén alapul. A két függvény, amelyeknek a koszinusz-transzformáltja a (10) képletben szerepel, az exponenciális tényezők nélkül

$$\frac{1}{\nu} (1 + R_0(\nu)) = \frac{2(1 + R_1(\nu) \exp(-2\nu_1 d_1))}{\nu_1 (1 - R_1(\nu) \exp(-2\nu_1 d_1))}, \quad (11)$$

$$(1 - R_0(\nu)) = \frac{2(1 - R_1(\nu) \exp(-2\nu_1 d_1))}{(1 - R_1(\nu) \exp(-2\nu_1 d_1))} \quad (12)$$

alakban is írható. Magfüggvényként a (11), (12) képletek jobb oldalát akkor érdemes alkalmazni, ha szükség van a

$\nu \rightarrow 0$ határátmenetre, egyébként a bal oldali, tömörebb alak a célszerűbb. Elemezzük most az impedancia (10) képletét, hogyan alakul az értéke nagy magasságokra (h), vagy nagy távolságokra (ν). Tekintsük először a nagy magasság esetét! Ha figyelembe vesszük a Dirac- δ egy lehetséges előállítását mint ν függvényét,

$$\delta(\nu) = \lim_{h \rightarrow -\infty} \frac{|h|}{2} \exp(|\nu|h),$$

akkor a (10) képlet lényegesen leegyszerűsödik, ha a számlálót és a nevezőt is megszorozzuk h abszolút értékével, és azután tartunk $|h|$ értékével a végtelenbe. A Dirac- δ egy fontos tulajdonsága, hogy egy folytonos, integrálható f függvényre

$$\int_0^{\infty} \delta(\nu) f(\nu) d\nu = \frac{1}{2} f(0).$$

Ezt felhasználva meghatározható (10) számlálója és nevezője. A $\nu = 0$ behelyettesítés a (11) és (12) képletek alkalmazásával végezhető el. Így megkapjuk a vonalforrásra érvényes impedancia képletét a $h \rightarrow -\infty$ határátmenet esetére:

$$\lim_{h \rightarrow -\infty} Z_{xy}(\omega, h) = i\omega\mu \frac{(1 + R_1(0)\exp(-2\gamma_1 d_1))}{\gamma_1(1 - R_1(0)\exp(-2\gamma_1 d_1))}. \quad (13)$$

Homogén féltér esetén $R_1(0) = 0$ teljesül. Ekkor az MT impedancia homogén féltérre jól ismert képletét kapjuk, $\nu =$

$$\begin{aligned} A_j(\nu) &= (\nu_j + \nu_{j+1}) + (\nu_j - \nu_{j+1})R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \\ &\quad + \left((\nu_j - \nu_{j+1}) + (\nu_j + \nu_{j+1})R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right) \exp(-2\nu_j d_j) \\ &= \nu_j \left(1 + R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right) + \nu_{j+1} \left(1 - R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right) \\ &\quad + \nu_j \exp(-2\nu_j d_j) \left(1 + R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right) - \nu_{j+1} \exp(-2\nu_j d_j) \left(1 - R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right) \\ &= \nu_j \left(1 + \exp(-2\nu_j d_j) \right) \left(1 + R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right) + \nu_{j+1} \left(1 - \exp(-2\nu_j d_j) \right) \left(1 - R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right), \end{aligned}$$

(14) nevezője:

$$\begin{aligned} B_j(\nu) &= (\nu_j + \nu_{j+1}) + (\nu_j - \nu_{j+1})R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \\ &\quad - \left((\nu_j - \nu_{j+1}) + (\nu_j + \nu_{j+1})R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right) \exp(-2\nu_j d_j) \\ &= \nu_j \left(1 + R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right) + \nu_{j+1} \left(1 - R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right) \\ &\quad - \nu_j \exp(-2\nu_j d_j) \left(1 + R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right) + \nu_{j+1} \exp(-2\nu_j d_j) \left(1 - R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right) \\ &= \nu_j \left(1 - \exp(-2\nu_j d_j) \right) \left(1 + R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right) + \nu_{j+1} \left(1 + \exp(-2\nu_j d_j) \right) \left(1 - R_{j+1}(\nu)\exp(-2\nu_{j+1}d_{j+1}) \right). \end{aligned}$$

Képezzük $A_j(\nu)$ és $B_j(\nu)$ hányadosát!

$$\begin{aligned} T_j(\nu) &= \frac{A_j(\nu)}{B_j(\nu)} = \frac{\nu_j \coth(\nu_j d_j) T_{j+1}(\nu) + \nu_{j+1}}{\nu_j T_{j+1}(\nu) + \nu_{j+1} \coth(\nu_j d_j)} \\ &= \frac{\coth(\nu_j d_j) (\nu_j / \nu_{j+1}) T_{j+1}(\nu) + 1}{(\nu_j / \nu_{j+1}) T_{j+1}(\nu) + \coth(\nu_j d_j)}. \end{aligned} \quad (15)$$

0, azaz $\nu_1 = \gamma_1$ esetén. A (7) rekurziós képlet alkalmazása akkor célszerű, ha az egyes térkomponenseket külön-külön is ki kívánjuk számítani. Ez, amint megmutattuk, a magnetellurikus impedancia számítására is alkalmas, de erre a feladatra a szakirodalomban egy másik rekurziós képlet terjedt el. Vezessük le ezt a fajta rekurziós képletet (7) felhasználásával! A levezetést tetszőleges ν értékre végezzük el, mivel a későbbiekben erre a térfrekvencia-tartománybeli (ν) impedanciára is szükségünk lesz. A (13) képlet alapján vezessünk be egy új függvényt!

$$T_j(\nu) = \frac{1 + R_j(\nu)\exp(-2\nu_j d_j)}{1 - R_j(\nu)\exp(-2\nu_j d_j)}.$$

Határozzuk meg a $T_j(\nu)$ -re is a rétegek sorszáma szerinti rekurziós képletet! Azért, hogy a levezetés során elkerüljük a bonyolult emeletes törtek használatát, jelöljük $A_j(\nu)$ -vel a $T_j(\nu)$ tört számlálóját és $B_j(\nu)$ -vel a nevezőjét,

$$T_j(\nu) = \frac{1 + R_j(\nu)\exp(-2\nu_j d_j)}{1 - R_j(\nu)\exp(-2\nu_j d_j)} = \frac{A_j(\nu)}{B_j(\nu)}. \quad (14)$$

(14)-ben először $R_j(\nu)$ helyébe írjuk be a (7) rekurziós képletet, majd a törtet bővítjük (7) nevezőjével, majd $(\nu_j + \nu_{j+1})$ -gyel. Külön számítjuk (14) számlálóját és nevezőjét. Kezdjük a számlálóval:

Ennek a rekurziós formulának létezik egy tömörebb alakja:

$$\begin{aligned} T_j(\nu) &= \coth \left(\nu_j d_j + \operatorname{arcoth} \left(\frac{\nu_j}{\nu_{j+1}} T_{j+1}(\nu) \right) \right), \\ T_n(\nu) &= 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Meg kell azonban jegyezni, hogy számítástechnikai szempontból előnyösebb a (15) képlet. Ha $\nu \rightarrow 0$, akkor megkapjuk a magnetotellurikára szokásos rekurziót:

$$T_j = \coth \left(\gamma_j d_j + \operatorname{arccoth} \frac{\gamma_j}{\gamma_{j+1}} T_{j+1} \right), \quad T_n = 1.$$

Az impedancia a felszínen a

$$Z_1 = i\omega\mu T_1 / \gamma_1$$

képlettel számítható. A szakirodalom leggyakrabban ezt a képletet használja (Berdichevsky, Zhdanov 1994). Ha a cél csak az MT esetre vonatkozó impedancia képletének a rekurziós levezetése, ez lényegesen egyszerűbb annál a módszernél, mint amelyet mi követtünk (13).

Térjünk most át arra az esetre, amikor a mérési pont y koordinátája tart a végtelenbe, azaz számítsuk ki a (10) képlet határértékét,

$$\begin{aligned} & \lim_{|y| \rightarrow \infty} Z_{xy}(\omega, y) \\ &= \lim_{|y| \rightarrow \infty} i\omega\mu \frac{\int_0^\infty e^{\nu h} \frac{2(1 + R_1(\nu)e^{-2\nu d_1})}{\nu_1(1 - R_1(\nu)e^{-2\nu d_1})} \cos(\nu y) d\nu}{\int_0^\infty e^{\nu h} \frac{2(1 - R_1(\nu)e^{-2\nu d_1})}{(1 - R_1(\nu)e^{-2\nu d_1})} \cos(\nu y) d\nu}. \end{aligned} \quad (17)$$

Ennél a határérték-számításnál, azért kell gondosan eljárni, mivel mind a számláló, mind a nevező a Riemann–Lebesgue-lemma miatt 0-hoz tart (Davies, 1983), hányadosuk ezért értelmezhetetlen. Ez a 0-hoz tartás fizikailag is természetes, hiszen a forrástól eltávolodva az elektromágneses komponensek 0-hoz tartanak. Az ilyen tört típusú határértékek számítására a matematikában a L'Hospital-szabály terjedt el, amely röviden azt jelenti, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén a határérték úgy is számítható, hogy a számlálót és a nevezőt deriváljuk, és akkor már nem 0/0 típusú határértéket kapunk. Mi most ennek a szabálynak a fordított változatát alkalmazzuk, azaz a számláló és nevező deriváltja helyett annak primitív függvényét vesszük. Ezt ritkán alkalmazzák, mivel a deriválás általában egyszerűsíti a függvényeket, például csökkenti a hatványkifejezések fokszámát, a primitív függvény viszont gyakran bonyolultabb. A (17) képlet a $\cos(\nu y)$ függvény y szerinti primitív függvényét véve így alakul

$$\begin{aligned} & \lim_{|y| \rightarrow \infty} Z_{xy}(\omega, y) \\ &= \lim_{|y| \rightarrow \infty} i\omega\mu \frac{\int_0^\infty e^{\nu h} \frac{2(1 + R_1(\nu)e^{-2\nu d_1})}{\nu_1(1 - R_1(\nu)e^{-2\nu d_1})} \frac{\sin(\nu y)}{\nu} d\nu}{\int_0^\infty e^{\nu h} \frac{2(1 - R_1(\nu)e^{-2\nu d_1})}{(1 - R_1(\nu)e^{-2\nu d_1})} \frac{\sin(\nu y)}{\nu} d\nu}. \end{aligned} \quad (18)$$

A számlálóra és a nevezőre is alkalmazzuk a Dirichlet-integrál-tulajdonságot, amely egy integrálható $f(\nu)$ függvényre a

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(\nu) \frac{\sin(\nu y)}{\nu} d\nu = \frac{\pi}{2} f(0)$$

határérték teljesülését jelenti. A (18) képletben a számláló és a nevező az $|y| \rightarrow \infty$ határátmenet esetén, a Dirichlet-integrálok tulajdonsága miatt (Davies 1983), megegyezik magfüggvény $\nu = 0$ helyen felvett értékével. Az egyszerűsítések után újra megkapjuk a (13) képletet, ugyanúgy, mint amikor a vonalforrás nagy magasságára ($h \rightarrow -\infty$) számoltuk az impedancia határértékét.

2.1. Numerikus vizsgálatok

Az 1. ábrán egy, az 1. táblázat szerinti modellen 100 km magasságban levő vonalforrás esetére vizsgáljuk a látszólagos fajlagos ellenállás és fázis változását az oldalirányú távolság függvényében. Az impedancia számítása a (10) képleten alapul. Látható, hogy a legtávolabbi vonalforrásra vonatkozó számolt adatok közelítik meg a legjobban a síkhullámú (MT) esetet. A Fourier-, illetve a koszinusz-transzformált számítására gyakran alkalmazzák a gyors Fourier-transzformációt (FFT). Ez a geofizikai számításoknál kevésbé célszerű, mivel itt általában logaritmikus lépésközzel mérnek és számolnak. A (10)-ben szereplő integrálok számítására elterjedt egy szűrőelméleten alapuló algoritmus, a számításainkat ezzel a módszerrel végeztük. A kiszámítandó integrálban integrandusként egy viszonylag lassan változó függvénynek egy oszcilláló függvénnyel való szorzata szerepel. Ez az alapja a szűrőelméleten alapuló integrálásnak (Anderson 1979). A hivatkozott cikkben Bessel-függvényekre kidolgozott eljárás szerepel, de hasonló szűréses integrálás létezik a koszinusz és szinusz függvényeket tartalmazó integrálok számítására, mivel a lényeg a függvények oszcilláló tulajdonságán van. A koszinusz és szinusz függvények egyébként speciális, $\frac{1}{2}$ -edrendű Bessel-függvényekkel is kifejezhetőek.

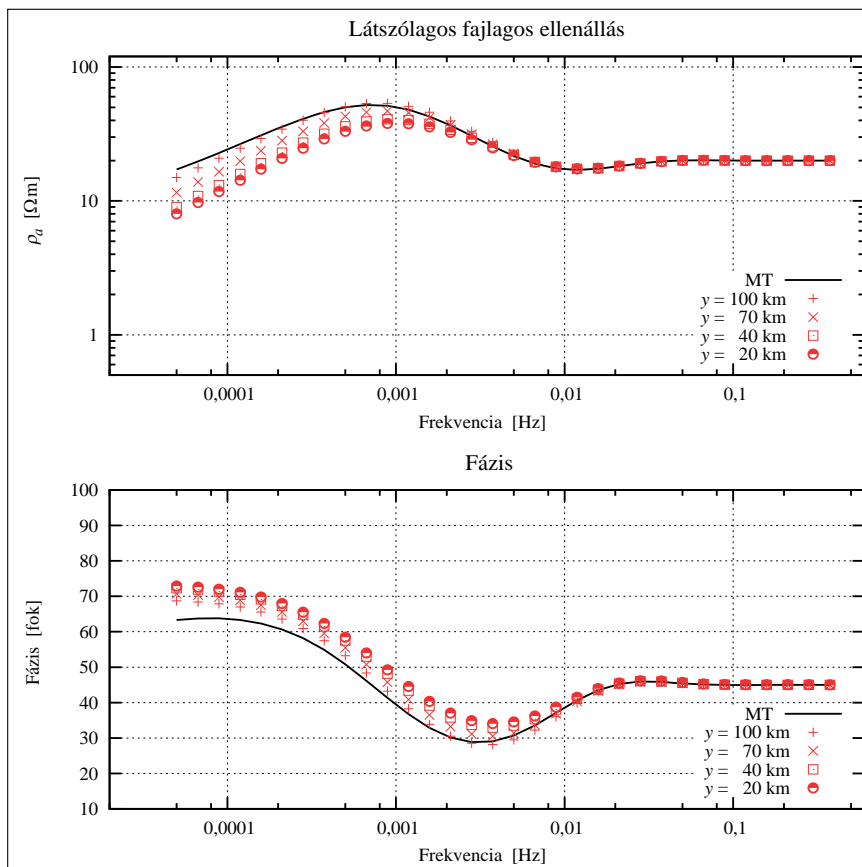
Az 1. táblázat rétegparamétereivel – vonalforrást feltételezve – szintetikus adatokat számítottunk $y = 70$ km-es oldal-távolságra és inverzióval MT görbékét illesztettünk hozzá. A szintetikus adatokhoz Gauss-eloszlású zajt adtunk úgy, hogy a relatív hiba nagy valószínűséggel ne haladja meg az 5%-ot.

1. táblázat | Modellparaméterek a forráshatás tanulmányozásához, ρ egy adott réteg fajlagos ellenállása, d a vastagsága

| Réteg | ρ [m] | d [m] |
|-------|------------|----------|
| 1. | 20,0 | 25000,0 |
| 2. | 300,0 | 100000,0 |
| 3. | 5,0 | ∞ |

2. táblázat | Szintetikus adatok (1. táblázat) inverziójával kapott modellparaméterek

| Réteg | ρ [m] | d [m] |
|-------|------------|----------|
| 1. | 20,0 | 23482,8 |
| 2. | 169,4 | 90154,6 |
| 3. | 2,6 | ∞ |



1. ábra Vonalforrásra számított látszólagos fajlagosellenállás- és fázisértékek különböző forrás-vevő távolságokra, $h = -100$ km, modellparaméterek az 1. táblázatban
Figure 1 Apparent resistivity and phase values calculated for line source at different source-receiver separations, $h = -100$ km, the layer parameters are in Table 1

A görbék illeszkedése a 2. ábrán látható. Az inverziós algoritmussal kapott modellparaméterek a 2. táblázatban láthatók. Az eltérés mértéke az 1. táblázat paramétereire képest – szintetikus adatokról lévén szó – nem elhanyagolható.

2.2. Síkbeli árameloszlás hatásának a számítása vonalforrások összegzésével

Most megmutatjuk, hogy a vonalforrás képletéből hogyan számíthatjuk egy adott vízszintes síkban elszórt áramok elektromágneses terét, illetve az impedanciát. Tekintsünk a síkban x irányú végtelen vonalforrásokat úgy, hogy a fázisuk az y koordinátának a periodikus függvénye! Eddig a vonalforrás y koordinátája 0 volt, most azt feltételezzük, hogy a vonalforrásnak az y koordinátája y_0 . Ekkor az egy vonalforráshoz tartozó vektorpotenciált meghatározó Helmholtz-egyenlet:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} A_x(y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_x(y, z) - k^2 A_x(y, z) = -I \delta(y - y_0) \exp(i v_p y_0) \delta(z - h). \quad (19)$$

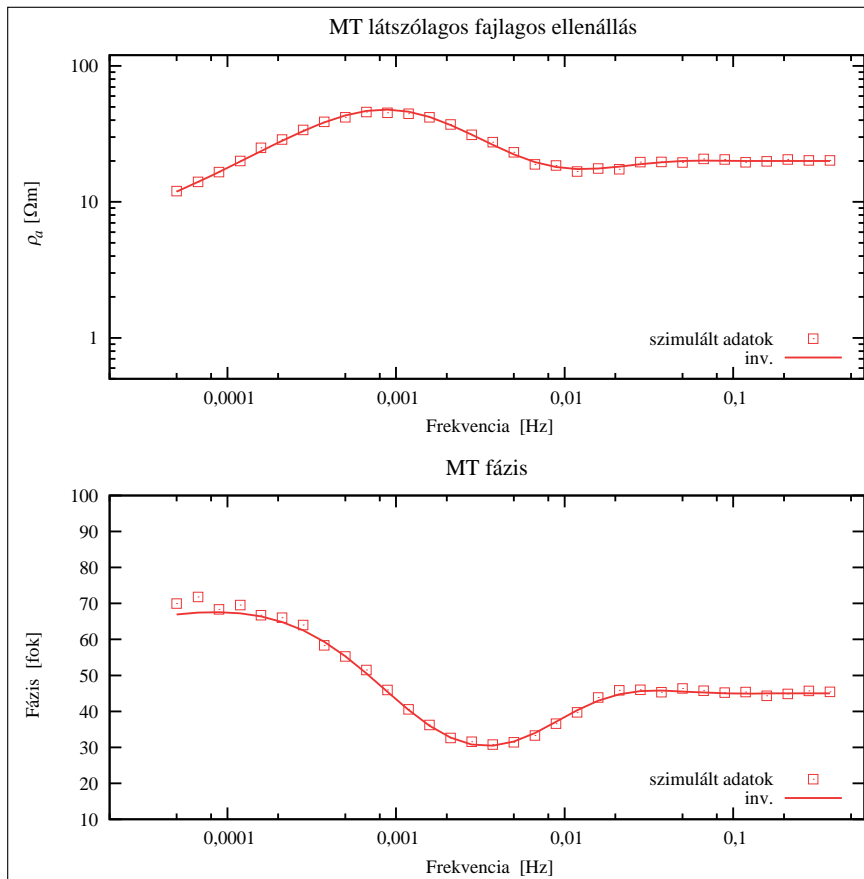
A megoldás ezzel a forrással ugyanúgy elvégezhető, csak az eredményül kapott térkomponenseket meg kell szorozni $\exp(i v_p y_0)$ -lal, valamint y helyébe $y - y_0$ írاندó. A teljes sík-

beli árameloszlás hatásához ezeknek a vonalforrásoknak a hatását kell integrálni a forrás y_0 koordinátája szerint. A v_p -t kétféleképpen is lehet értelmezni. Egyrészt a $v_p y_0$ az y_0 koordinátájú vonalforrás a fáziskülönbségét adja az $y = 0$ koordinátájú vonalforráshoz képest, másrészt megadja a síkbeli árameloszlás y koordináta szerinti periodicitását. Az elektromos térerősség x komponensének a képlete a felszínen:

$$E_x(\omega, y, z) = -\frac{i\omega\mu I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(vh)}{v} (1 + R_0(v)) \times \int_{-\infty}^\infty \cos(v(y - y_0)) \exp(i v_p y_0) dy_0 dv.$$

A $H_y(\omega, y, z)$ komponensre vonatkozó képletet külön már nem is írjuk fel, hanem $E_x(\omega)$ -val együtt közvetlenül az impedanciát meghatározó képletbe helyettesítjük be. A végtelen síkban elszórt áramforrás esetére érvényes impedanciát meghatározó képlet:

$$Z_{xy}(\omega) = E_x(\omega) / H_y(\omega) = \frac{\int_0^\infty \frac{e^{vh}}{v} (1 + R_0(v)) \int_{-\infty}^\infty \cos(v(y - y_0)) e^{i v_p y_0} dy_0 dv}{\int_0^\infty \frac{e^{vh}}{v} (1 - R_0(v)) \int_{-\infty}^\infty \cos(v(y - y_0)) e^{i v_p y_0} dy_0 dv}. \quad (20)$$



2. ábra Inverzióval kapott MT görbék (2. táblázat) illeszkedése az 1. táblázat paraméterein alapján számolt szintetikus adatokhoz (vonalforrás, $h = -100$ km, $y = 70$ km)
Figure 2 The fit of MT inversion curves (Table 2) to the synthetic data, calculated from the parameters of Table 1

A képlet számlálójában és nevezőjében is a belső integrál egy $y_0 = -y_0$ helyettesítéssel a $\cos(v(y + y_0))$ függvény Fourier-transzformáltjává alakítható, amely ismert:

$$\pi [\delta(v - v_p) + \delta(v + v_p)] \exp(i v_p y).$$

Ha ezt beírjuk a (20) képletbe, akkor felhasználva a Dirac- δ tulajdonságát, a v szerinti integrálásra sincs szükség, hiszen a magfüggvénynek csak a $v = v_p$ helyen felvett értéke marad. Azt is érdemes figyelembe venni, hogy a mérési hely y koordinátája, amely az egyes komponensek esetében $\exp(i v_p y)$ alakban még része volt a képleteknek, az impedancia képletéből egyszerűsítéssel kiesik. Ugyanígy a tört egyszerűsítésével esik ki a képletből a forrás h magassága is. Az impedancia végül

$$\begin{aligned} Z_{xy}(\omega) &= \frac{E_x(\omega)}{H_y(\omega)} \\ &= i\omega\mu \frac{1 + R_0(v_p)}{v_p(1 - R_0(v_p))}. \end{aligned} \tag{21}$$

A következő részben ennek a képletnek adjuk meg egy tömörebb levezetését, és elemezzük a v_p térfrekvencia torzító hatását az impedanciára.

3. Az impedancia számítása arra az esetre, ha az indukáló tér fázisa az y szerint periodikusan változik

Ellentétben a vonalforrásra vonatkozó számítással, most a forrás helyének a koordinátái nem szerepelnek a kiindulási képletekben. Az előző rész levezetése a síkban eloszló áramforrásokra vonatkozólag – amelyet most egy tömörebb levezetéssel helyettesítünk – már bizonyította, hogy az impedanciára kapott képlet független a forrás magasságától. Most csupán azt tételezzük fel, hogy az indukáló mágneses térnek csak y irányú komponense van, és az x koordináta irányában a tér változatlan. Képlettel kifejezve az indukáló mágneses tér a felszínen

$$H_y(y_0 + y, \omega) = H_y(y_0, \omega) \exp(i v_p y). \tag{22}$$

A forrásra vonatkozó egyéb feltételezésre nincs szükség, hiszen az elektromágneses térkomponensek számítása most nem célunk, csak az impedanciát, azaz E_x és H_y arányát kívánjuk meghatározni. Ezért $H_y(y_0, \omega)$ értéke bármi lehet. A térkomponensek mint a mágneses vektorpotenciál függvényei:

$$\mathbf{E} = -i\omega\mu \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (23a)$$

$$\mathbf{H} = -\gamma^2 \mathbf{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad (23b)$$

ahol ω a körfrekvencia, $\gamma^2 = i\omega\mu\sigma$ a hullámszám, μ a mágneses permeabilitás, σ a közeg vezetőképessége. μ értéke számításaink során megegyezik annak vákuumbeli értékével. Az \mathbf{A} vektorpotenciálnak esetünkben csak függőleges komponense van. Az elektromágneses térkomponensek értékei mint a vektorpotenciál függvényei a Maxwell-egyenletekből vezethetők le, számos publikáció foglalkozik ezzel a módszerrel (Kaufmann, Keller 1985, Weaver 1994), ennek a lépéseit ezért most nem részletezzük. Csak azt jegyezzük meg, hogy most a mágneses vektorpotenciált alkalmazzuk, ellentétben a vonalforrás esetével, amikor az elektromos vektorpotenciál alapján számoltunk. Az hogy a kétféle vektorpotenciál közül melyiket választjuk, általában a forrás jellegétől függ, de jelen esetben a gerjesztő tér egyszerű leírhatósága miatt bármelyik vektorpotenciált alkalmazhatjuk. Lényegében Price (1962) is az itt bemutatott módszerrel számítja az elektromágneses térkomponenseket, valamint az impedanciát, csak nem mondja ki, hogy az általa használt $Z(z)P(x, y, v_p)$ függvény egy mágneses vektorpotenciálnak a függőleges irányú komponense, és a vízszintes irányú komponensek 0-val egyenlők.

Az impedancia számításához szükséges elektromágneses térkomponensek (23) alapján

$$E_x(y, z) = -i\omega\mu \frac{\partial}{\partial y} A_z(y, z), \quad (24)$$

$$H_y(y, z) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} A_z(y, z). \quad (25)$$

A vektorpotenciál z irányú komponense a Helmholtz-egyenlet megoldásával számítható

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_z(y, z, v_p) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z(y, z, v_p) \\ = \gamma^2 A_z(y, z, v_p). \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a változók szétválasztásának módszerét, és vegyük figyelembe a $H_y(y, z)$ y szerinti periodikus tulajdonságát! Ugyanez a tulajdonság érvényes $A_z(y, z, v_p)$ -re is, amelyet ezért kereshetünk az

$$A_z(y, z, v_p) = f(z, v_p) C \exp(i v_p y)$$

alakban, ahol C az elektromágneses tér erősségét meghatározó állandó, az impedancia számításakor kiesik. $A_z(y, z, v_p)$ -nek ezt az alakját beírva a Helmholtz-egyenletbe, majd egyszerűsítve $f(z, v_p)$ -re kapunk egy differenciálegyenletet:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z, v_p) = (\gamma^2 + v_p^2) f(z, v_p).$$

Ez a függvény rétegezett féltér esetére ugyanúgy határozható meg rekurzióval, mint a pont- és a vonalforrás képletének a magfüggvénye. Ellentétben a pont- és a vonalforrásokkal, nincs szükség az $A_z(y, z, v_p)$ függvény v_p szerinti integrálására, mivel most csak egyetlen v_p értékhez tartozó $A_z(y, z, v_p)$ függvény adja a Helmholtz-egyenlet megoldását. Ez annak a következménye, hogy most az elektromágneses

tér y szerinti változását eleve rögzítettük ($\exp(i v_p y)$). A $Z(\omega, v_p)$ impedancia számítása a (24) és (25) képletek alapján könnyen elvégezhető akár mint $f(z, v_p)$, akár mint $R_0(v_p)$ függvénye,

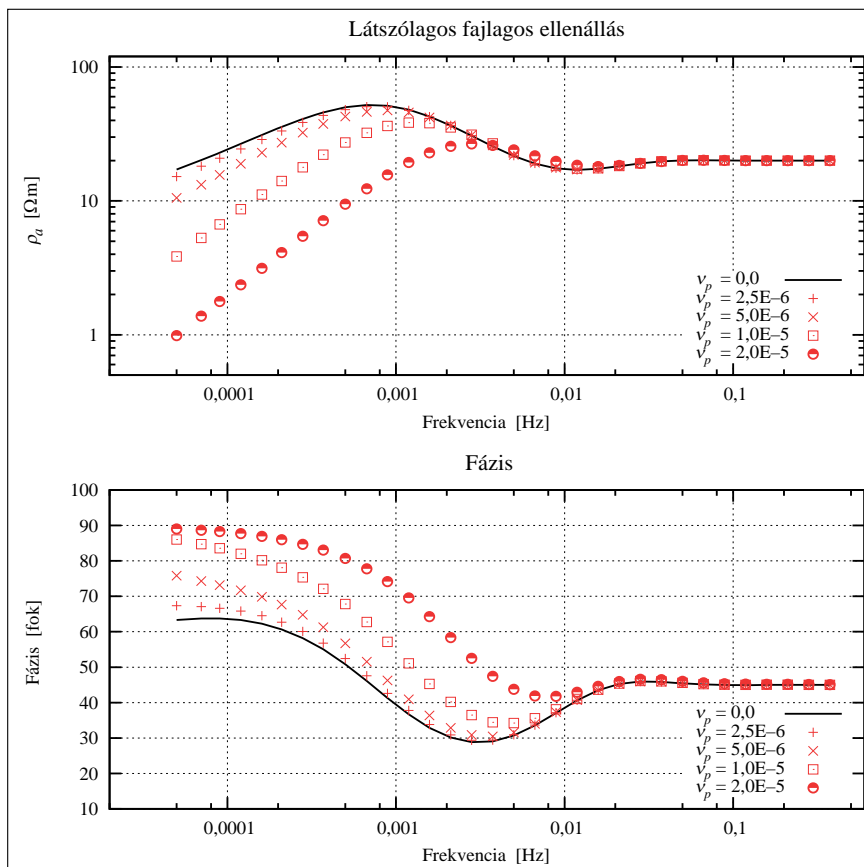
$$Z(\omega, v_p) = \frac{i\omega\mu f(0, v_p)}{\frac{\partial}{\partial z} f(0, v_p)} = \frac{i\omega\mu(1 + R_0(v_p))}{v_p(1 - R_0(v_p))}.$$

Ugyanazt a képletet kaptuk, mint az előző részben szereplő (21), csak lényegesen egyszerűbben, nem volt szükség kétszeres integrálásra, majd annak leegyszerűsítésére. Egyúttal azt is megállapíthatjuk, hogy a Maxwell-egyenletek kétféle kiindulásból való megoldása ugyanazt az impedanciát adja eredményül. Az előző részben egy vízszintes síkban levő árameloszlásra számoltunk, és az egyenletek felírásakor a Dirac- δ -kkal figyelembe vettük a forrás pontos leírását, most viszont csak abból a feltételezésből indultunk ki, hogy a felszínen a gerjesztő mágneses térnek periodikus tulajdonsága van (22).

Az előző rész levezetésének abban az esetben lehet létjogosultsága, ha az a sík, amelyben az árameloszlást feltételezzük, y irányban véges. Ekkor a (20) képletben a belső integrálokat a végtelen határok helyett véges határokkal kell számítani. Nyilvánvaló, hogy a végtelen síkban levő árameloszlásnál mint forrásnál is igaz az, hogy $v_p \rightarrow 0$ esetén megkapjuk az MT impedanciát. Hasonló feltételekkel számolva Price (1962) is egy, a (21)-gyel ekvivalens képletet vezet le, de nem az általános n réteges modellre, hanem csak egy speciális kétréteges esetre. Az akkori időkben még nem volt meg a számítástechnikai feltétele annak, hogy bonyolultabb algoritmusokkal számoljanak és alkalmazzák a már akkor is ismert általános n réteges esetre vonatkozó megoldást. Ádám (1970) már az általános, n réteges esetre érvényes (16) képlettel végzett számításokat elemzi Srivastava (1965) alapján, figyelembe véve a v_p térfrekvencia változásának a hatását az MT látszólagos fajlagos ellenállásra és fázisra.

3.1. A v_p hatása a látszólagos fajlagos ellenállásra és a fázisra

A 3. ábrán megfigyelhető, hogy a v_p térfrekvencia változása milyen változásokat okoz a (21) képlettel számolt látszólagos fajlagosellenállás- és fázisértékekben az eredeti magnetotellurikus ($v_p = 0$) értékekhez képest. A modellparamétereket az 1. táblázat tartalmazza. Az elektromágneses tér nagyobb frekvenciáira valamennyi görbe a magnetotellurikus görbével esik egybe, a legnagyobb a különbség a kis frekvenciák és a nagy v_p térfrekvenciák esetén. Az MT görbék grafikus megjelenítéséből az látszik, hogy nagy térfrekvenciák esetén a síkban eloszló áramok elektromágneses terének a síkhullámtól való eltérése nagyobb torzítást okoz, mint amilyent a vonalforrás térbeli jellemzőinek a hatása a forrás közelében (1. ábra). Nem elégedhetünk meg azonban csupán azzal, hogy megállapítjuk, hogy a v_p térfrekvencia milyen módon torzítja a magnetotellurikus görbét, hanem meg kell vizsgálni azt is, hogy milyen réteg-



3. ábra Látszólagos fajlagosellenállás- és fázisgörbék különböző v_p értékekkel, az 1. táblázat modelljére

Figure 3 Apparent resistivity and phase curves with different v_p values, for the model in Table 1

paramétereket kapunk a görbékéből. Az MT mérés célja ugyanis a földben levő rétegek fajlagos ellenállásának és a vastagságának a meghatározása. Első kísérletként elvégeztünk egy inverziót az 1. táblázat paramétereivel számított szintetikus adatokon, $v_p = 10^{-5}$ -nel. Az adatokhoz Gauss-eloszlású zajt adtunk úgy, hogy a relatív hiba nagy valószínűséggel ne haladja meg az 5%-ot. Ennél az első kísérletnél a szintetikus adatokhoz magnetotellurikus görbét próbáltunk illeszteni.

Az illeszkedés eredménye a 4. ábrán látható („1. inv.” görbe). A kapott modellparaméterek a 3. táblázatban szerepelnek. Az első réteg paramétereit, amint az elvárható volt, elfogadható pontossággal kaptuk meg, a második réteg paraméterei viszont nagymértékben eltérnek a szintetikus adatok számításához használt modelltől. A 4. ábra „1. inv.” fázisgörbéje kis frekvenciák esetén nem illeszkedik tökéletesen a szimulált mérési adatokhoz. Ez arra enged következtetni,

hogy nem is létezik megfelelő MT ($v_p = 0$) görbe, azaz a $v_p = 10^{-5}$ -nel számított görbéhez csak egy másik, $v_p \neq 0$ -val számított görbe illeszkedhet.

3.2. A v_p -t ismeretlenként kezelt inverzió

Egy olyan inverziós algoritmus adná vissza az elvárt modellparamétereket, amely az előremodellezés során figyelembe venné a v_p értékét. v_p értéke azonban ismeretlen, ezért egy olyan inverziós algoritmussal érdemes kísérletezni, amelyik a v_p -t is ismeretlennek tekinti, azaz a jó illeszkedés érdekében a modellparaméterek mellett a v_p értékét is folyamatosan változtatja.

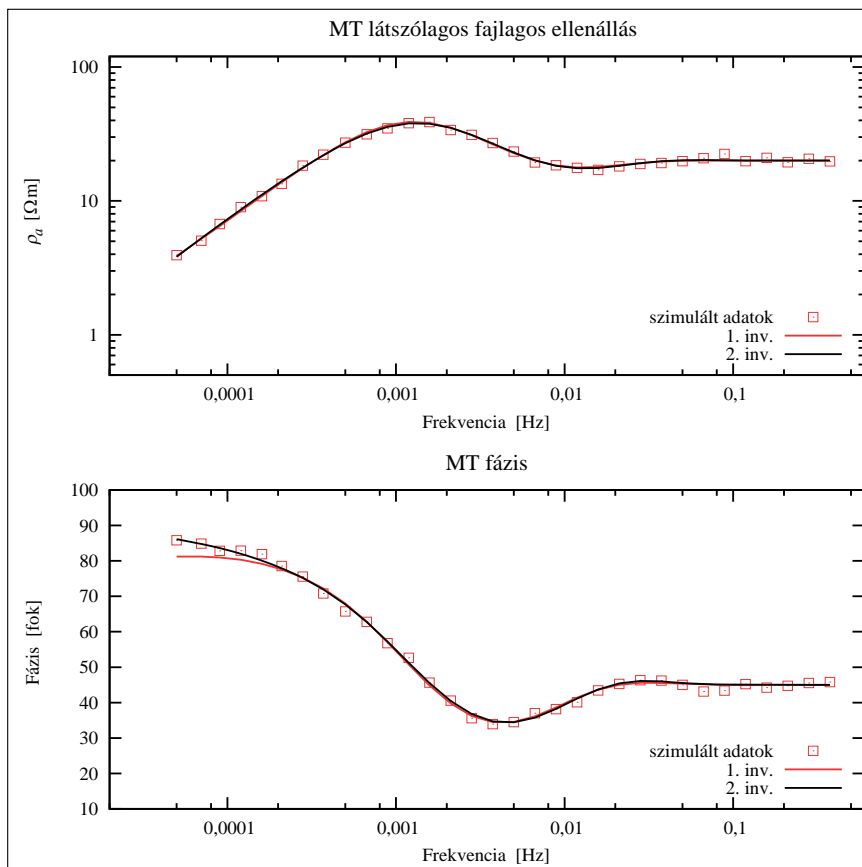
Az alkalmazott inverzió a linearizált inverzió, ennek az alapjaival most nem foglalkozunk, mivel az egy évtizedek óta rutinszerűen alkalmazott eljárás a geofizikában. Csupán az inverziónak a Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásán (SVD) alapuló alapképletét írjuk fel (Jackson 1972), mivel ennek a sajátértékei alapján minősítjük a most végzett inverziókat. Az adatok és a paraméterek megváltozása közötti összefüggést a

$$\Delta \mathbf{p} = \mathcal{V} \mathbf{A}^{-1} \mathcal{U}^T \Delta \mathbf{m}$$

képlet adja meg, ahol \mathbf{p} a modellparaméterek, \mathbf{m} az adatok vektora, az \mathcal{U} és \mathcal{V} mátrixok az SVD adat-, illetve paramé-

3. táblázat MT görbeillesztés eredménye az 1. táblázat alapján számolt szintetikus adatokhoz

| Réteg | ρ [m] | d [m] |
|-------|------------|----------|
| 1. | 19,9 | 24250,5 |
| 2. | 106,7 | 63926,8 |
| 3. | 0,1 | ∞ |



4. ábra Inverzióval kapott MT görbék (3., 4. táblázat) illeszkedése a szintetikus adatokhoz (1. táblázat)

Figure 4 The fit of MT inversion curves (Tables 3, 4) to the synthetic data (Table 1)

ter-térbeli sajátvektorait tartalmazza, Λ a sajátértékeket tartalmazó átlós mátrix. Ennek a típusú inverzióknak egy kissé részletesebb kifejtése egy más jellegű geofizikai inverziós feladat kapcsán szerepel a szerző egy korábbi munkájában (Prácsér 2010). A 4. ábra „1. inv.”-vel jelölt inverziójához tartozó sajátértékek csökkenő sorrendbe rendezve,

$$\lambda_1 = 5,35225, \quad \lambda_2 = 4,40277, \quad \lambda_3 = 1,63771, \\ \lambda_4 = 0,13763, \quad \lambda_5 = 0,09209.$$

Az inverzió minőségét jól jellemzi a legnagyobb és a legkisebb sajátértékek aránya. Egy adott sajátérték összefüggésbe hozható bizonyos modellparaméterekkel. Esetünkben a viszonylag kicsi λ_4 és λ_5 értékek azt jelzik, hogy a modellünk esetén a második és a harmadik rétegek fajlagos ellenállásai csak bizonytalanul határozhatók meg. Például, ha a második réteg fajlagos ellenállását növeljük, akkor a harmadik réteg fajlagos ellenállásának csökkentésével elérhető, hogy az MT görbék alig változzanak.

4. táblázat MT görbeillesztés eredménye az 1. táblázat alapján számolt szintetikus adatokhoz, ismeretlennek tekintett v_p -vel

| Réteg | ρ [m] | d [m] |
|-------|------------|----------|
| 1. | 20,0 | 25064,8 |
| 2. | 289,3 | 96088,4 |
| 3. | 5,75 | ∞ |

A 4. táblázat tartalmazza annak az inverzióknak az eredménymodelljét, amely a v_p térfrekvenciát ismeretlennek tekintette. Ez azt jelenti, hogy a v_p térfrekvencia és a rétegparaméterek együttesen mint komponensek adják a \mathbf{p} paramétervektort. A görbék illeszkedése szintén a 4. ábrán („2. inv.”) látható. Tekintettel arra, hogy zajjal terhelt szintetikus adatokról van szó, a kapott modellparaméterek és a szintetikus adatok számítására alkalmazott modellparaméterek eltérése elfogadható. Az inverzióhoz tartozó 6 sajátérték:

$$\lambda_1 = 5,53154, \quad \lambda_2 = 4,97432, \quad \lambda_3 = 2,00083, \\ \lambda_4 = 0,63929, \quad \lambda_5 = 0,07669, \quad \lambda_6 = 0,04094.$$

A legkisebb sajátértékek ennél az inverzióknál is a 2. és 3. rétegek ellenállásaival vannak kapcsolatban. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a v_p térfrekvencia a nagyobb abszolút értékű sajátértékekkel hozható összefüggésbe, ezért jól meghatározható. Az ábrán látható MT görbéket eredményül adó inverzió futtatásakor is tapasztalható volt, hogy az algoritmus nagy biztonsággal határozza meg a v_p térfrekvenciát ($v_p = 1,005 \cdot 10^{-5}$). A relatív hiba a pontos értékhez képest kevesebb, mint fél százalék. Még abban az esetben is, amikor a v_p kezdeti becslése durván eltért az elvárttól, az inverziós algoritmus már az első néhány iteráció után pontosan adta vissza a helyes értéket, miközben a 2. és a 3. réteg ellenállása lényegesen lassabban tartott a helyes értékhez. Ezért akkor sem kockáztatunk sokat, ha valódi MT mérésekre alkal-

mazzuk ezt az eljárást, mivel akkor a ν_p -re egy 0-hoz közeli ($\nu_p = 6,4 \cdot 10^{-8}$) értéket kapunk, és a modellparaméterekre is megkapjuk az elvárt értékeket, azaz a módosított inverzió speciális esetként tartalmazza a síkhullámú esetre végzett mérések inverzióját.

4. Összefoglalás

Matematikailag levezettük, hogy a végtelen vonalforrás esetére érvényes impedancia a forrástól távolodva határértékben a síkhullámú MT impedanciához tart. Kétféle forrástípusra megmutattuk, hogy azok paraméterei hogyan torzítják az MT látszólagos fajlagos ellenállást és a fázist.

Hivatkozások

- Anderson W. L., 1979: Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering. *Geophysics* 44/7, 1287–1305
- Ádám A., 1966: A magnetotellurikus (MT) módszer Price-féle kritikájáról. (A pulzációs tér kiterjedésének meghatározása.) *Geofizikai Közlemények* XVI, 1–2
- Ádám A., 1970: A földi elektromágneses tér szerepe a Föld belső szerkezetének kutatásában. *MTA X. Osztályának közleményei* 4, 385–417
- Berdichevsky M. N., Zhdanov M. S., 1984: *Advanced theory of deep geomagnetic sounding*. Elsevier, Amsterdam – Oxford – New York – Tokyo, p. 408
- Davies B., 1983: *Integráltranszformációk és alkalmazásaik*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 292. o.
- Dmitriev V. I., Berdichevsky M. N., 1979: The fundamental model of magnetotelluric sounding. *IEEE Proc.* 67, 1034–1044
- Jackson D. D., 1972: Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 28, 97–109
- Keller G. V., Frischknecht F. C., 1966: *Electrical methods in geophysical prospecting*. Pergamon Press, Oxford – New York – Toronto – Sydney – Braunschweig

Szintetikus adatokon való inverzióval azt is megmutattuk, hogy a forrás geometriai paraméterei hogyan befolyásolják a magnetotellurikus inverzióval kapott rétegparamétereket. A síkban eloszló vonalforrásokra egy új inverziós eljárást mutattunk be, amely a térfrekvenciát is ismeretlen paraméterként kezeli és a rétegparaméterekkel együtt határozza meg. Az így meghatározott rétegparaméterek megbízhatóságát elsősorban az adatokat terhelő zajok korlátozzák, a 0-tól különböző térfrekvenciának nincs számottevő negatív hatása. A bemutatott inverzió alkalmazásával a rétegparaméterek mellett kapunk egy ν_p térfrekvencia-értéket is, amely az elektromágneses teret gerjesztő síkbeli árameloszlásnak egy fontos jellemzője.

- Kaufmann A. A., Keller G. V., 1983: *Frequency and transient soundings*. Elsevier, Amsterdam – Oxford – New York, p. 684
- Kaufmann A. A., Keller G. V., 1985: *Inductive mining prospecting part I: Theory*. Elsevier, Amsterdam – Oxford – New York – Tokyo, p. 620
- Pirjola R., Boteler D., 2002: Calculation methods of the electric and magnetic fields at the Earth's surface produced by a line current. *Radio Science* 37, 3
- Prácser E., 2010: A mágneses permeabilitás meghatározása inverzióval. *Magyar Geofizika* 51/4, 175–184
- Price A. T., 1962: The theory of magnetotelluric methods when the source field is considered. *Journal of Geophysical Research* 67, 5
- Scriba H., 1974: A numerical method to calculate the electromagnetic field of a horizontal current dipole. *Pageoph.* 112, 801–809
- Srivastava S. P., 1965: Method of interpretation of magnetotelluric data when source field is considered. *Journal of Geophys. Res.* 70/4, 945–954
- Watson G. N., 1966: *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge at the University Press, p. 804
- Weaver J. T., 1994: *Mathematical methods for geo-electromagnetic induction*. John Wiley & Sons, Inc., New York – Chichester – Toronto – Brisbane – Singapore, p. 316