

# Pontforrás potenciáljának számítása kétdimenziós modell esetén<sup>1</sup>

PRÁCSER ERNŐ<sup>2</sup>

*A különböző egyenáramú mérések feldolgozása során egyre gyakrabban alkalmazzák a kétdimenziós matematikai modellezést. Tekintettel arra, hogy valamennyi egyenáramú mérés visszavezethető a pontforrás potenciáljára, ebben a cikkben kizárólag ezzel foglalkozunk. Összehasonlítjuk a modellezéshez használatos két legelterjedtebb módszert, a véges különbségek és a véges elemek módszerét, elsősorban a pontosság szempontjából.*

## E. PRÁCSER: Calculation of the potential of a point source for two-dimensional models

*Two-dimensional mathematical modelling is more and more frequently applied in processing of data obtained from direct current measurement. Considering, that all direct current methods can be reduced from the potential of a point source, only this will be discussed. The two most widely used methods of modelling, finite differences and finite elements, are compared, primarily from the point of view of accuracy.*

### Bevezetés

A két-, ill. a két és fél dimenziós egyenáramú direkt feladat megoldását három fő lépésre lehet bontani. Ezek: a potenciált meghatározó parciális differenciálegyenlet felírása, a differenciálegyenlet diszkrétizálása, végül az így kapott lineáris egyenletrendszer megoldása. A potenciált meghatározó parciális differenciálegyenlet a Maxwell-egyenletekből vezethető le, ez a geofizikai szakirodalomból már évtizedek óta ismert. Itt az egyik eldöntendő kérdés az, hogy a teljes potenciálra írjuk-e fel a differenciálegyenletet, vagy pedig különítsük el az elsődleges és a másodlagos potenciált. Azt is el kell dönteni, hogy a tartomány peremén milyen peremfeltételeket adjunk meg. A feladat diszkrétizálására két fő módszer terjedt el: a véges különbségek, és a véges elemek módszere. A lineáris egyenletrendszer megoldására is számos eljárás létezik, ezek lehetnek direkt, vagy iterációs módszerek [SZAMARSZKIJ 1989]. Ebben a cikkben ezeket a választási lehetőségeket hasonlítjuk össze. Csak egyetlen pontforrás potenciáljának a számításával foglalkozunk, a több forrást alkalmazó módszereket modellező számítások ugyanis visszavezethetők erre az esetre.

### Pontforrás potenciáljának a számítása

A pontforrás által keltett elektromos térerősség értékét egy  $\sigma(x, z)$  vezetőképességű féltérben keressük. Mivel az elektromágneses tér az idővel nem változik, a Maxwell-egyenletekből következik, hogy az  $\mathbf{E}$  elektromos térerősség vektor rotációja  $\mathbf{0}$ . Ezért  $\mathbf{E}$  előállítható mint az  $U$  skalárpotenciál gradiense:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\text{grad}U(x, y, z)$$

Ebből  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , és  $\text{div} \mathbf{J} = I \delta(x_0, 0, z_0)$  figyelembevételével következik, hogy az  $U$  potenciál eleget tesz a következő parciális differenciálegyenletnek:

$$\text{div}(\sigma(x, z) \text{grad}U(x, y, z)) = -I\delta(x_0, 0, z_0) \quad (1)$$

ahol a

$z$  koordinátatengely lefelé mutat,  
 $x_0, z_0$  a pontforrás koordinátái,  
 $\sigma(x, z)$  a vezetőképesség-függvény,  $z \geq 0$ ,  
 $I$  a betáplált áram erőssége,  
 $\mathbf{J}$  az áramsűrűség vektor,  
 $\delta$  a Dirac-függvény.

A  $z=0$  síkon az  $U$  potenciálfüggvény eleget tesz az

$$\mathbf{n} \text{grad}U = \frac{\partial}{\partial z} U = 0$$

peremfeltételnek, ahol  $\mathbf{n}$  a tartomány határára merőleges egységvektor. A  $\sigma(x, z)$  vezetőképesség-függvény nem függ  $y$ -től. Az  $U$  potenciálfüggvény viszont mindhárom koordinátától függ, azaz (1) egy háromdimenziós differenciálegyenlet. Ezért ezt a fajta feladatot két és fél dimenziósnek nevezzük. Az (1) egyenlet megoldását a Fourier-transzformáció alkalmazásával kétdimenziós egyenletek megoldására vezetjük vissza. Tekintettel arra, hogy az  $U$  függvény valós és  $y$ -ra nézve szimmetrikus, a Fourier-transzformáció helyettesíthető a koszinusz transzformációval. Az  $U(y)$  függvény koszinusz transzformáltja az  $\tilde{U}(\tilde{y})$  függvény:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\tilde{y}) &= \int_0^{\infty} U(y) \cos(\tilde{y}y) dy \\ U(y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{U}(\tilde{y}) \cos(\tilde{y}y) d\tilde{y} \end{aligned} \quad (3)$$

Az (1) egyenlet a koszinusz transzformáció után:

$$\begin{aligned} \text{div}(\sigma(x, z) \text{grad}\tilde{U}(x, \tilde{y}, z)) - \\ - \tilde{y}^2 \sigma(x, z) \tilde{U}(x, \tilde{y}, z) = -\frac{I}{2} \delta(x_0, z_0) \end{aligned} \quad (4)$$

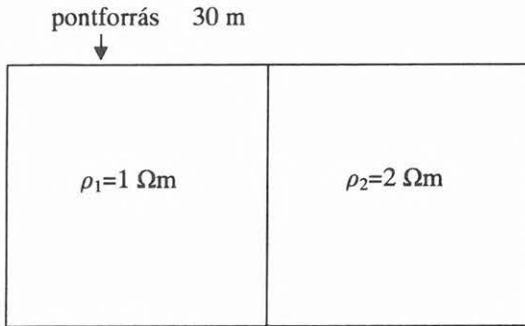
Ezt a differenciálegyenletet kell megoldani az  $\tilde{y}$  értékek egy sorozatára, majd az  $\tilde{U}$  függvényre alkalmazva az inverz koszinusz transzformációt, megkapjuk a háromdimen-

<sup>1</sup> Beérkezett: 1998. augusztus 10-én

<sup>2</sup> Magyar Állami Eötvös Loránd Geofizikai Intézet, H-1145 Budapest, Kolumbusz u. 17-23.

ziós  $U$  potenciálfüggvényt. Itt most a forrás és az észlelés helye is az  $y=0$  síkban van, ezért az inverz koszinusz transzformált egy integrálással egyszerűsödik. A továbbiakban a rövidség kedvéért a  $\sigma$  és az  $\tilde{U}$  függvények argumentumait nem írjuk ki.

A számításokat egy olyan kétdimenziós modellen teszteljük, amelynek ismert az analitikus megoldása (1. ábra).



1. ábra. Kétdimenziós modell a számítások teszteléséhez

Fig 1. Two dimensional model for the test of the calculation

A modell egy függőleges síkkal kettéosztott féltér, a sík két oldalán különböző fajlagos ellenállásokkal, és a síktól balra eső pontforrással. Erre a modellre a potenciált az  $(x, y, z)$  koordinátájú pontban a következő analitikus képlet adja meg:

$$U = \begin{cases} \frac{I\rho_1}{2\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{k_{1,2}}{r_1} \right) & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{I\rho_2}{2\pi} \frac{1-k_{1,2}}{r} & \text{ha } x > 0 \end{cases} \quad (5)$$

ahol

$\rho_1, \rho_2$  — a fajlagos ellenállások,

$$k_{1,2} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1},$$

$$r = \sqrt{(x+l)^2 + y^2 + z^2},$$

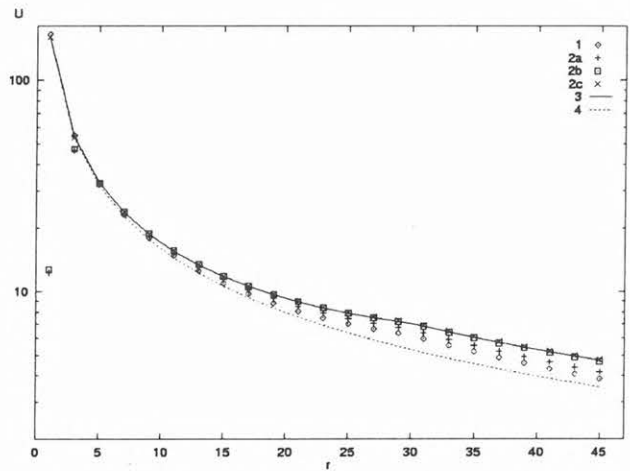
$$r_1 = \sqrt{(x-l)^2 + y^2 + z^2},$$

$I$  — a tápáram erőssége,

$l$  — a forrás távolsága a határsíktól.

A koordináta rendszer origója a határsíkra esik a felszínen.

A 2. ábra 3-as görbéje az (5) képlettel számított potenciál értékek alapján készült. Ehhez fogjuk hasonlítani a numerikusan számolt potenciál értékeket. A modell paraméterei:  $l = 30$  m,  $\rho_1 = 1 \Omega\text{m}$  és  $\rho_2 = 2 \Omega\text{m}$ . Az ábrán a 4-es görbe a homogén féltérhez tartozó potenciálgörbe. Tekintettel arra, hogy az ábrázolt adatok egy részénél a különböző számításokhoz tartozó értékek teljesen egybeesnek, annak érdekében, hogy különböző módszerek pontosságát jobban meg tudjuk ítélni, az adatokat táblázatos formában is közöljük (1. táblázat). Az eredmények mV-ban értendők  $I = 1\text{A}$  tápáram esetére.



2. ábra. Különböző módszerekkel számolt potenciálgörbék  
Fig. 2. Potential curves calculated with different methods

$r$	véges diff.	véges elemek			(5) képlettel	homogén féltér
		a	b	c	számolt	
1	165,09	12,29	12,76	160,09	160,05	159,15
3	54,84	46,80	47,26	53,98	53,98	53,05
5	32,44	32,05	32,50	32,80	32,80	31,83
7	23,11	23,42	23,86	23,74	23,74	22,74
9	18,00	18,42	18,87	18,72	18,72	17,68
11	14,77	15,23	15,67	15,55	15,55	14,47
13	12,56	13,03	13,47	13,37	13,37	12,24
15	10,96	11,42	11,86	11,79	11,79	10,61
17	9,76	10,21	10,65	10,60	10,60	9,36
19	8,82	9,27	9,70	9,67	9,67	8,38
21	8,08	8,52	8,96	8,94	8,94	7,58
23	7,49	7,92	8,36	8,35	8,35	6,92
25	7,02	7,43	7,88	7,88	7,88	6,37
27	6,63	7,04	7,49	7,50	7,50	5,89
29	6,33	6,73	7,18	7,20	7,20	5,49
31	5,97	6,37	6,82	6,85	6,85	5,13
33	5,56	5,94	6,40	6,43	6,43	4,82
35	5,20	5,56	6,03	6,06	6,06	4,55
37	4,87	5,22	5,69	5,74	5,74	4,30
39	4,58	4,92	5,39	5,44	5,44	4,08
41	4,31	4,64	5,13	5,18	5,18	3,88
43	4,07	4,39	4,88	4,94	4,94	3,70
45	3,86	4,16	4,66	4,72	4,72	3,54

1. táblázat. Különböző módon számított potenciál értékek  
Table 1. Potential values calculated with different methods

### Megoldás a véges különbségek módszerével

A (4) differenciálegyenlet diszkrétizálásának egyik módja a véges különbségek módszere. Ehhez az  $(x, z)$  síkon felvesszünk egy véges kiterjedésű rácsot és az  $\tilde{U}$  skalár potenciált ezekben a rácpontokban számítjuk ki. A rács egyes elemeinek a mérete különböző lehet. A módszer lényege az, hogy a potenciál egy adott rácpontban és a vele szomszédos rácpontokban felvett értékei között lineáris kapcsolatot határozunk meg, amelyek együttesen egy

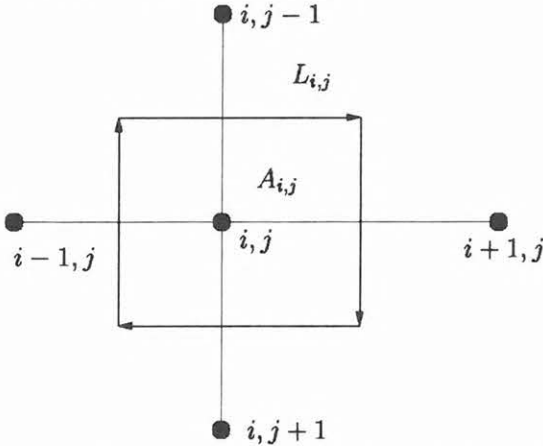
lineáris egyenletrendszer alkotnak [DEY, MORRISON 1979]. A lineáris egyenletrendszer meghatározásához a (4) egyenlet mindkét oldalának vesszük az integrálját a 3. ábrán látható  $A_{i,j}$  tartományon. A potenciált meghatározó differenciálegyenletben a potenciál második deriváltja is szerepel. Ha alkalmazzuk a Gauss-tételt, akkor az  $A_{i,j}$ -n vett integrál az  $L_{i,j}$ -n vett vonal menti integrállá egyszerűsödik:

$$\iint_{A_{i,j}} \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \tilde{U}) dx dz = \int_{L_{i,j}} \sigma \mathbf{n} \operatorname{grad} \tilde{U} dl, \quad (6)$$

ahol

$L_{i,j}$  — az  $A_{i,j}$  tartomány határa,

$\mathbf{n}$  — az  $L_{i,j}$ -re merőleges egységvektor.



3. ábra: A (6) integrál integrálási tartománya egy rácspont környezetében a véges különbségek módszerével történő megoldáshoz

Fig 3. The domain of the integration of the integral (6) for the solution with the finite differences method in the vicinity of a grid point

Ennek alapján a (4) egyenletnek az  $A_{i,j}$  tartományon vett integrálja:

$$\int_{L_{i,j}} \sigma \mathbf{n} \operatorname{grad} \tilde{U} dl - \iint_{A_{i,j}} \tilde{y}^2 \sigma \tilde{U} dx dz = -\frac{I}{2} \delta_s \quad (7)$$

ahol

$$\delta_s = \begin{cases} 1 & \text{ha } i, j \text{ a forrás helye} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A (7) egyenletben már csak a potenciál első deriváltja szerepel, ami helyettesíthető a differenciáhányadossal, az integrálok pedig könnyen számíthatók. Így megkapjuk a szomszédos csomópontokhoz tartozó potenciál értékek közötti lineáris összefüggést. Minden egyes csomóponthoz tartozó potenciál érték 4 szomszédos csomóponthoz tartozó potenciál értékkel áll lineáris kapcsolatban.

A tartomány határán itt az  $\tilde{U}$  potenciál és  $\mathbf{n} \operatorname{grad} \tilde{U}$  lineáris kombinációja van rögzítve. A lineáris egyenletrendszer megoldása a Cholesky-dekompozícióval történik.

Az ezzel a módszerrel számított eredmények az 1. táblázat 2. oszlopában láthatók, és ezekből az adatokból készült a 3. ábra 1. görbéje. A pontosság nem a legjobb, de ennek ellenére, ha a módszert az egymáshoz közeli pontokban a potenciálkülönbségek számítására használjuk, akkor hatékonyan alkalmazható. A gyakorlatban ugyanis általában a potenciálkülönbséget mérik. Előnye ennek a módszernek, hogy a forrás közvetlen közelében is viszonylag pontosan

adja meg a potenciál értékét. A lineáris egyenletrendszer megoldását kísérletképpen a konjugált gradiens módszerrel is elvégeztük, de lényegében az is ugyanazt az eredményt adta. Ezt a fajta megoldást a véges térfogatok módszerének is szokták nevezni [STOYAN, TAKÓ 1997].

### Megoldás a véges elemek módszerével

A (4) egyenletet ebben az esetben is a végtelen kiterjedésű feltételnek egy véges kiterjedésű  $A$  tartományán oldjuk meg. A véges elemes módszer részletes tárgyalása most nem célunk, ezzel a matematikai szakirodalom foglalkozik [STOYAN, TAKÓ 1997] és az egyenáramú modellezésre is alkalmazták már [UCHIDA et al. 1986, GYIMESI 1989]. Itt csak a megoldás főbb lépéseit említjük meg. A (4) egyenlet alapján egy variációs feladatot fogalmazzunk meg. Az  $A$  tartományon keresünk egy olyan  $\tilde{U}$  függvényt, amelyre minden  $\Psi$  függvénnyel fennáll a következő egyenlőség:

$$\iint_A \Psi \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \tilde{U}) dx dz - \tilde{y}^2 \iint_A \Psi \sigma \tilde{U} dx dz = -\frac{I}{2} \Psi(x_0, z_0) \quad (8)$$

Annak érdekében, hogy ne legyen szükség a  $\sigma$  vezetőképesség-függvény első, és az  $\tilde{U}$  potenciál függvény második deriváltjára, a

$$\operatorname{div}(\Psi \sigma \operatorname{grad} \tilde{U}) = \Psi \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \tilde{U}) + \sigma \operatorname{grad} \tilde{U} \operatorname{grad} \Psi$$

egyenlőség felhasználásával a (8) egyenletet írjuk át:

$$\begin{aligned} & - \iint_A \sigma \operatorname{grad} \Psi \operatorname{grad} \tilde{U} dx dz - \tilde{y}^2 \iint_A \Psi \sigma \tilde{U} dx dz + \\ & + \iint_A \operatorname{div}(\Psi \sigma \operatorname{grad} \tilde{U}) dx dz = -\frac{I}{2} \Psi(x_0, z_0) \end{aligned} \quad (9)$$

A bal oldal harmadik integrálját írjuk át a Gauss-tétel felhasználásával:

$$\begin{aligned} & - \iint_A \sigma \operatorname{grad} \Psi \operatorname{grad} \tilde{U} dx dz - \tilde{y}^2 \iint_A \Psi \sigma \tilde{U} dx dz + \\ & + \int_L \Psi \sigma \operatorname{grad} \tilde{U} \mathbf{n} ds = -\frac{I}{2} \Psi(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (10)$$

$L$  jelenti a tartomány határát az alján és a két oldalán. A felszínen azért nem kell integrálni, mert ott  $\frac{\partial}{\partial z} U = 0$ ,

mivel a levegő fajlagos ellenállása végtelen, és ezért az áramok nem folyhatnak keresztül a  $z=0$  síkon. Ezt az egyenletet a véges elemek módszerével oldjuk meg. Feltesszük, hogy az a tartomány, ahol az  $\tilde{U}$  potenciált keressük, függőleges és vízszintes egyenesekkel téglalap alakú cellákra van osztva. Ez a véges elemes megoldáshoz tartozó rács. A véges elemes megoldás alapfüggvényei olyan függvények, amelyek egy adott rácspontban az 1 értéket veszik fel, értékük minden más rácspontban 0, és csak a rácsponttal szomszédos cellákban különböznek 0-tól. Ezekkel az alapfüggvényekkel lehet előállítani a potenciál értékét a teljes tartományon a rácspontokban felvett értékek alapján. Egy alapfüggvény a neki megfelelő rácspont körül levő négy téglalapon egy-egy polinommal van meghatá-

rozva, amely polinom a megfelelő rácsponton az 1, a téglalap többi csúcspontján pedig a 0 értéket veszi fel. Például a  $\Phi_{i,j}(x,z)$  polinom értéke  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  és  $z_j \leq z \leq z_{j+1}$  esetén

$$\Phi_{i,j}(x,z) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \cdot \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j}$$

$\Phi_{i,j}$  értéke az  $i,j$  pontot csúcspontként tartalmazó másik három cellán is hasonlóan adható meg. A  $\Phi_{i,j}$  függvényt kalapfüggvénynek is szokás nevezni. A véges elemes megoldásnak itt most azt a változatát alkalmazzuk, ahol a levezetés során kihasználjuk, hogy a cella egy téglalap, azaz az oldalai merőlegesek egymásra. A véges elemes módszer háromszögekre bontott tartományokra is megvalósítható, például olyan formában, hogy minden egyes téglalapot egy átlóval háromszögekre bontunk [UCHIDA et al. 1986]. A háromszögekre konstruált  $\Phi$  alapfüggvény ekkor egy lineáris függvény lesz, aminek az az előnye, hogy teljesen általános háromszög esetében is könnyen számítható az integrálja. Ez azért jelentős, mert ekkor a véges elemes hálózat úgy torzítható, hogy a felszín jól közelít egy kívánt topográfiát.

A (10) egyenlet  $\tilde{U}$  megoldását keressük a következő alakban:

$$\tilde{U}(x, \tilde{y}, z) = \sum_k u_k \Phi_k(x, z), \quad (11)$$

ahol a  $\Phi_k$  alapfüggvény tulajdonságai miatt az  $u_k$  együttható a potenciálfüggvény  $k$ -ik rácspontban felvett értékét jelenti. A számítás célja ezeknek az  $u_k$  együtthatóknak a meghatározása. Itt az  $i,j$  pontokat sorba rendezzük a  $k$  indexszel. A továbbiakban ha a  $\Phi$  alapfüggvény egy indexszel szerepel, az azt jelenti, hogy a rácspontok lineárisan vannak rendezve, két index pedig az  $(x, z)$  síkon való sorszámozást jelent. A (11) összeget írjuk be és (10) egyenletbe és  $\Psi$  helyett vegyük a  $\Phi_l$  alapfüggvényt:

$$\begin{aligned} & - \sum_k \left( \iint_A \sigma \text{grad} \Phi_l \text{grad} \Phi_k dx dz \right) u_k - \tilde{y}^2 \sum_k \left( \iint_A \sigma \Phi_l \Phi_k dx dz \right) u_k + \\ & + \sum_k \left( \int_L \sigma \Phi_l \text{grad} \Phi_k \mathbf{n} ds \right) u_k = - \frac{I}{2} \Phi_l(x_0, z_0) \end{aligned} \quad (12)$$

Az  $\tilde{U}$ -t meghatározó (11) összeg  $u_k$  együtthatóira tehát egy lineáris egyenletrendszert kaptunk. Ha ezt a lineáris egyenletrendszert próbálnánk megoldani, akkor problémát jelentene, hogy (12) bal oldalának harmadik tagja miatt a lineáris egyenletrendszer mátrixa nem lenne szimmetrikus. Ez azért kedvezőtlen, mert a szimmetrikus mátrixú lineáris egyenletrendszerek megoldására gyorsabb algoritmusok léteznek, mint az általános mátrixúra. Ha a tartomány oldalán és az alján is felvesszük a  $\frac{\partial}{\partial x} U = 0$ , ill. a  $\frac{\partial}{\partial z} U = 0$  peremfeltételt, akkor a (12) egyenletben az  $L$  határ mentén vett integrál értéke 0 lesz. Ez azt is jelenti, hogy az  $A$  tartomány alul és felül is szigetelével van körbevéve. Ekkor a (12) lineáris egyenletrendszer mátrixa már szimmetrikus. A (12) egyenletben szereplő, a  $\Phi_l$  alapfüggvényeket tartalmazó integrálok analitikusan számíthatók.

## A potenciál számítása rögzített peremfeltételekkel

Az, hogy az  $A$  tartomány oldalt is és alul is szigetelével van körülvéve, nem felel meg a gyakorlati eseteknek. Ezt a kedvezőtlen hatást úgy csökkenthetjük, hogy oldalt és alul rögzítjük az  $\tilde{U}$  értékét és ezáltal minden olyan  $u_k$  értékét is, amely valamelyik oldalsó vagy alsó határon levő csomópontoz tartozik. Az  $\tilde{U}$  értékét úgy határozzuk meg, hogy egy olyan homogén félteret veszünk, amelynek a fajlagos ellenállása a kétdimenziós modell átlagos ellenállásával egyezik meg. Ehhez az egyenletrendszer mátrixát úgy kell átalakítani, hogy a mátrixban az  $L$  határvonalon lévő pont sorszámának megfelelő sor és oszlop csak egyetlen 1-es értéket tartalmazzon, azaz a  $j$ -ik oszlop a  $j$ -ik egységvektor legyen és hasonló teljesüljön a sorvektorra is. Ez a módosítás megőrzi a mátrix szimmetriáját, viszont módosul az egyenletrendszer jobb oldala. Az így számolt potenciál értékek grafikusan a 2. ábra 2a. görbéjével vannak ábrázolva, és az 1. táblázat  $a$  oszlopa is ezeket tartalmazza. A rögzített peremfeltételekhez tartozó (12) egyenletet a konjugált gradiens módszerrel oldottuk meg. A megoldás során 15  $\tilde{y}$  értékre oldottuk meg a kétdimenziós direkt feladatot. A legkisebb  $\tilde{y}$  értéke 0,0005, a legnagyobb pedig 54,8. A véges elemes rács 63x63 csomópontból állt, és az elemek oldalhosszúsága 1 m volt.

E megoldás legnagyobb hátránya, hogy a forrás közelében rendkívül nagy a potenciálszámítás hibája. A véges térfogatok módszerével végzett számítások viszont a forrás közelében is pontos eredményt adnak. A különbséget az okozza, hogy a véges térfogatok módszerénél a diszkrétizálás során a nagyobb nagyságrendű tagot az  $L_{i,j}$  vonal menti integrálás adja (7). Ennél az a lényeg, hogy az  $L_{i,j}$  oldalfelző pontjaiban megfelelő pontossággal lehessen becsülni az  $U$  függvény deriváltját. Ez pedig még akkor is lehetséges, ha az  $U$  potenciálfüggvénynek valamelyik csomópontban szingularitása van (ott van az áramforrás). Annak ellenére ugyanis, hogy maga a szingularitás numerikus eszközökkel nem írható le, az adott csomópontoz hozzárendelhető egy olyan érték, hogy a differenciahányados megfelelő legyen. A véges elemes megoldásban a diszkrétizálás során szükség van a cellán vett integrálra. Ez pedig azt feltételezi, hogy a potenciál minden egyes cellában előáll az adott cella sarokpontjaiban vett értékek lineáris kombinációjaként. Ez pedig nyilvánvalóan nem teljesül akkor, ha a szingularitás a cella valamelyik pontjába esik (belső vagy határpont). Ezért pontatlan a véges elemes számítás a forrás közelében. A forrástól 3-4 cellányira ez a hiba lényegesen lecsökken. Meg kell persze jegyezni, hogy a terepi mérések során sem célszerű a mérőelektrodát a tápelektroda közvetlen közelében elhelyezni, ezért a terepi mérések modellezésekor ez a hiba nem túl jelentős. A forrás közelében fellépő hibáktól eltekintve a véges elemes módszernek ez a változata pontosabb megoldást ad, mint a véges térfogatok módszere. Ennek az lehet az oka, hogy a véges térfogatok módszere esetében 5 szomszédos csomópontoz tartozó potenciál érték áll egymással lineáris kapcsolatban:

$$u_{i-1,j}, u_{i,j-1}, u_{i,j}, u_{i,j+1}, u_{i+1,j}$$



a véges elemek módszerénél pedig 9 potenciál érték között van lineáris kapcsolat:  $u_{m,n}$  ahol  $m=i-1, i, i+1$ ,  $n=j-1, j, j+1$ .

Erre az esetre kísérleteztünk egy másfajta lineáris egyenletrendszer megoldó algoritmussal, a szukcesszív felülrelaxálással [SZAMARSZKIJ 1989]. Abban az esetben, amikor a véges elemes rács egyenlő oldalú cellákat tartalmazott, ez a fajta számítás gyorsabb volt, mint a konjugált gradiens módszer. Abban az esetben viszont, amikor a cellák mérete különböző volt, az iteráció nem konvergált. Ez azért volt így, mert ebben az esetben az egyenletrendszer mátrixában egy adott sorban az átlóban lévő elem és a többi elem viszonya kedvezőtlenebbé vált. A felülrelaxálás alkalmazhatóságának az egyik elégséges feltétele az, hogy a mátrix minden egyes sorában a főátlóban lévő elem nagyobb legyen, mint a többiek összege.

### A potenciál számítása vegyes peremfeltételekkel

A valóságot jobban megközelítő eredményeket kaphatunk, ha a tartomány  $L$  határán a

$$\mathbf{ngrad}\tilde{U} = 0$$

peremfeltételt a

$$\mathbf{ngrad}\tilde{U} + \alpha \tilde{U} = 0$$

peremfeltételre cseréljük. Ezáltal az áramok az  $L$  határon is keresztül folyhatnak.  $\alpha$  értékének a megválasztása meghatározó a pontosság szempontjából. Közvetve azt határozza meg, hogy az áramvonalak hogyan keresztezik a tartomány határát.

Ezt figyelembe véve (10) átírható:

$$-\iint_A \sigma \mathbf{grad}\Psi \mathbf{grad}\tilde{U} dx dz - \tilde{y}^2 \iint_A \Psi \sigma \tilde{U} dx dz - \int_L \Psi \sigma \alpha \tilde{U} ds = -\frac{I}{2} \Psi(x_0, z_0) \quad (13)$$

A (13) képletből (11) figyelembe vételével kapjuk a

$$-\sum_k \left( \iint_A \sigma \mathbf{grad}\Phi_k \mathbf{grad}\Phi_k dx dz \right) u_k - \tilde{y}^2 \sum_k \left( \int_A \sigma \Phi_k \Phi_k dx dz \right) u_k - \sum_k \left( \int_L \sigma \alpha \Phi_k \Phi_k ds \right) u_k = -\frac{I}{2} \Phi_k(x_0, z_0) \quad (14)$$

lineáris egyenletrendszert, ami már szimmetrikus. Az  $\alpha$ -t úgy választjuk meg, hogy a homogén féltérre kiszámítjuk a potenciált, annak deriváltját, és az ezekből kapott  $\alpha$ -t használjuk. A peremfeltételek magadása tökéletes sohasem lehet, mivel a teljesen pontos peremfeltételek megadásához ismerni kellene azt a potenciálfüggvényt, amelynek a számítása a célunk. Az így számított eredmények az 1. táblázat  $b$  oszlopában láthatók, grafikusan pedig ezek képezik a 2. ábra 2b. görbéjét. A pontosság lényegesen jobb, mint az előző módszer esetében (az  $a$  oszlop az 1. táblázatban, illetve a 2a. görbe a 2. ábrán), a forrás közelében azonban megmaradtak a nagy eltérések.

### Modellszámítás az elsődleges és másodlagos potenciál szétválasztásával

A számítások pontosságát úgy javíthatjuk, hogy a potenciált elsődleges ( $U_p$ ) és másodlagos ( $U_s$ ) összetevőre bontjuk, ezáltal a numerikus algoritmust elegendő a másodlagos potenciálra elvégezni.  $U_p$  a forrás által, homogén féltérben keltett potenciál,  $U_s$  pedig azt tükrözi, hogy a modell mennyiben tér el a homogén féltértől. A számítások relatív hibája ekkor csak a lényegesen kisebb abszolút értékű másodlagos potenciált terheli. Ennek különösen a forrás közelében van jelentősége. A (4) egyenletben  $\tilde{U}$  helyébe írjuk  $\tilde{U}_p + \tilde{U}_s$ -t

$$\operatorname{div}(\sigma \mathbf{grad}\tilde{U}_p) + \operatorname{div}(\sigma \mathbf{grad}\tilde{U}_s) - \tilde{y}^2 \sigma \tilde{U}_p - \tilde{y}^2 \sigma \tilde{U}_s = -\frac{I}{2} \delta(x_0, z_0) \quad (15)$$

ahol  $\tilde{U}_p$  egy olyan homogén féltérhez tartozó potenciál, amelynek a vezetőképessége megegyezik a kétdimenziós modellnek a forrás környezetében lévő vezetőképességével, azaz érvényes a

$$\sigma_0 \Delta \tilde{U}_p - \tilde{y}^2 \sigma_0 \tilde{U}_p = -\frac{I}{2} \delta(x_0, z_0) \quad (16)$$

egyenlőség, ahol  $\sigma_0$  a kétdimenziós modell vezetőképessége a forrás közelében,  $\Delta$  pedig a Laplace-operátor.  $\tilde{U}_p$  ismert:

$$\tilde{U}_p = \frac{I}{2\pi\sigma_0} K_0(\tilde{y}r) \quad (17)$$

ahol  $K_0$  a módosított másodfajú Bessel-függvény.

(15) és (16) alapján a másodlagos potenciálra érvényes a

$$\operatorname{div}(\sigma \mathbf{grad}\tilde{U}_s) - \tilde{y}^2 \sigma \tilde{U}_s = -\mathbf{grad}\tilde{U}_p \mathbf{grad}\sigma \quad (18)$$

egyenlet. Ennek az egyenletnek a bal oldala formailag megegyezik (4) bal oldalával. A másodlagos potenciált így egy ugyanolyan differenciálegyenlet megoldása adja, mint az összegzett potenciált meghatározó differenciálegyenlet. Az egyetlen különbség az, hogy az eredeti forrás helyett fiktív források lépnek fel minden olyan csomópontban, ahol különböző vezetőképességű elemek találkoznak. A (18) egyenlet jobb oldala ismert, az egyetlen problémát  $\mathbf{grad}\sigma$  számítása jelenti, mivel a  $\sigma$  vezetőképesség függvény hagyományos értelemben nem differenciálható, az általánosított deriváltban pedig megjelenik a Dirac- $\delta$ . A parciális differenciálegyenlet diszkrétizálásakor ennek az általánosított értelemben vett deriváltnak az integrálja lép fel, így a Dirac- $\delta$  kiesik.

$$\iint_A \Phi_{j,k} \mathbf{grad}\tilde{U}_p \mathbf{grad}\sigma dx dz = (\sigma_2 - \sigma_1) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{U}_p(z_j - z_{j-1})/2 + (\sigma_4 - \sigma_3) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{U}_p(z_{j+1} - z_j)/2 + (\sigma_3 - \sigma_1) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{U}_p(x_k - x_{k-1})/2 + (\sigma_4 - \sigma_2) \frac{\partial}{\partial z} \tilde{U}_p(x_{k+1} - x_k)/2 \quad (19)$$

ahol  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  az egy csomópont körül levő négy cella

vezetőképessége.

Az így számított potenciál értékek vannak az 1. táblázat c. oszlopában és ezekből készült a 2. ábra 2c. görbéje. Valamennyi görbén, még a kevésbé pontosakon is, 30 méternél megfigyelhető a modell függőleges határfelülete feletti törés. Az elsődleges és a másodlagos potenciál szétválasztásának egy másik előnye, hogy az inverz koszinusz transzformáltat elegendő rövidebb intervallumon is számítani. Az eddigiekben használt  $15 \tilde{y}$  helyett itt elegendő volt 10 is.

$r$	$\rho_1=0,1 \Omega\text{m}$		$\rho_2=10 \Omega\text{m}$	
	véges e.	Hankel-tr.	véges e.	Hankel-tr.
1	149,70	149,65	179,65	186,27
3	43,71	43,67	73,46	80,02
5	22,71	22,67	52,01	58,52
7	13,92	13,89	42,57	49,03
9	9,25	9,21	37,07	43,49
11	6,45	6,41	33,34	39,72
13	4,66	4,62	30,55	36,90
15	3,47	3,43	28,33	34,65
17	2,65	2,61	26,49	32,79
19	2,07	2,03	24,91	31,19
21	1,66	1,62	23,53	29,79
23	1,36	1,32	22,31	28,54
25	1,15	1,09	21,20	27,42
27	0,89	0,93	20,20	26,41
29	0,86	0,80	19,29	25,48
31	0,76	0,70	18,45	24,63
33	0,69	0,63	17,68	23,85
35	0,63	0,57	16,96	23,12
37	0,58	0,52	16,28	22,44
39	0,54	0,48	15,66	21,80
41	0,51	0,44	15,06	21,21

2. táblázat: Pontforrás potenciálja kétréteges modell felszínén a véges elemes módszerrel és a Hankel-transzformációval számolva  
 Table 2. The potential of a point source on the surface of the two layer model calculated with the finite element method and the Hankel transformation

Végül teszteljük a módszert egy egydimenziós modellen, amelyre a potenciál egy Hankel-transzformációval számítható (2. táblázat). A kétréteges modell első rétegének paraméterei:  $\rho_1=1 \Omega\text{m}$ ,  $d_1=10 \text{m}$ . Abban az esetben, ha  $\rho_2=0,1 \Omega\text{m}$ , a véges elemes modellezés csak kismértékben tér el a Hankel-transzformációs eredménytől.  $\rho_2=10 \Omega\text{m}$  esetén az eltérés nagyobb, de a lényeg az, hogy a két oszlop különbsége az  $r$  forrás-észlelés távolság különböző értékeire csaknem állandó. Egyébként az (1) egyenletnek az egy-

mástól csak egy állandóban különböző potenciálfüggvények egyformán megoldásai. A gyakorlati alkalmazás esetében általában a potenciálkülönbség értékek számításának van jelentősége, ezért ekkor az ismertetett számítás eredményesen alkalmazható, annak ellenére, hogy maga a potenciál egy állandóban különbözik a pontos értéktől.

## Összefoglalás

Ha csak a direkt feladat pontos számítására koncentrálnunk, akkor célszerű az elsődleges és a másodlagos potenciált különválasztani, a tartomány határán pedig vegyes peremfeltételeket megadni. Abban az esetben, amikor a direkt feladatot számító eljárást az inverz feladat megoldásához használjuk, akkor egyéb szempontok is felmerülnek. Ekkor ugyanis egy szelvény mentén kell a számításokat végezni ugyanarra a modellre. Ebben az esetben hatékonyabb a számítás akkor, ha az elsődleges és a másodlagos potenciált nem választjuk külön.

Ha különválasztjuk, akkor a fiktív forrásokat a tápelektroda minden egyes helyzetére újra kell számolni. Ha amellett, hogy az elsődleges és a másodlagos potenciált nem akarjuk szétválasztani, az is szempont, hogy a forrás közelében ne lépjenek fel durva hibák, akkor a véges különbségek módszerét célszerű alkalmazni.

## HIVATKOZÁSOK

- DEY A., MORRISON H. F. 1979: Resistivity modelling for arbitrary shaped two-dimensional structures. *Geophysical Prospecting* 27, 106-136
- GYIMESI M., SIMON A. 1989: Approximate calculation of the electrical field of a buried DC source using the finite element method for several 2D methods. 43th International Geophysical Symposium, Abstracts and papers of the technical program. Budapest, Hungary, p. 261-270
- STOYAN., TAKÓ G. 1997: Numerikus módszerek III. ELTE TypoTeX, Budapest
- SZAMARSKIJ A. A. 1989: Bevezetés a numerikus módszerek elméletébe. Tankönyvkiadó, Budapest
- UCHIDA T., MURAMAKI Y., TANAKA S., OGAWA Y. 1986: Two-dimensional interpretation of Schlumberger and CSAMT soundings at a Northern part of the Joso Terrace, Ibaraki Prefecture, Central Japan (in Japanese). *Geophys. Explor. (Butsuri Tansa)* 39, 243-254