Az egyenletesen változó mozgás pillanatnyi sebessége és a megtett út közötti összefüggés:

$$s(v) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \tag{1}$$

Írjuk fel (1)-et a pálya teljes hosszára, valamint a pálya első felére:

$$S = \frac{(v_0/2)^2 - v_0^2}{2a}, \tag{2}$$

illetve

$$\frac{S}{2} = \frac{(xv_0)^2 - v_0^2}{2a}. \tag{3}$$

A (3) egyenletet (2)-vel elosztva kapjuk, hogy

$$x^2 - 1 = -\frac{3}{8},$$

vagyis

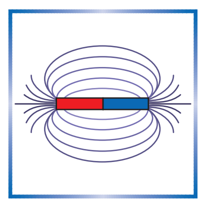
$$x = \sqrt{\frac{5}{8}} \approx 0{,}79.$$

Ezek szerint a test a pályaszakasz felezőpontjáig a kezdősebességének $(1 - x)$-ed részét, kb. 21%-át veszítette el.

Biró Kata (Miskolc, Földes F. Gimn., 10. évf.)

41 dolgozat érkezett. Helyes 17 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (2 pont) 2, hibás 13, nem versenyszerű 6 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

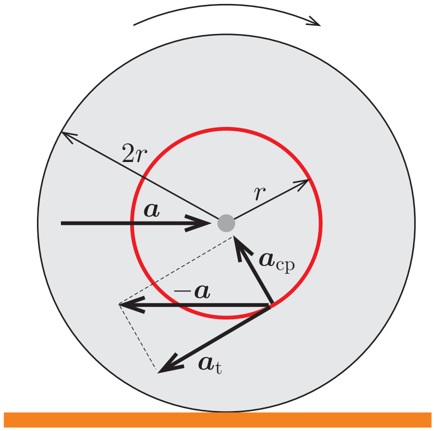


P. 5429. *Egy elektromos autó álló helyzetből indulva* 10 s *alatt egyenletes gyorsulással* 108 km/h *sebességet ér el. Kerekeinek sugara* 0,4 m, *a keréktárcsán található egy* 0,2 m *sugarú díszítőgyűrű. Az indulástól számítva mennyi idő múlva lesz ennek a vékony gyűrűnek olyan pontja, amely nem gyorsul? Mekkora ebben a pillanatban az autó sebessége?*

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. Az autó gyorsulása

$$a = \frac{108\ \mathrm{km/h}}{10\ \mathrm{s}} = \frac{30\ \mathrm{m/s}}{10\ \mathrm{s}} = 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$



A díszítőgyűrű valamelyik pontjának eredő gyorsulása akkor lehet nulla, ha ezen pont $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ tangenciális gyorsulásának és $\boldsymbol{a}_\mathrm{cp}$ gyorsulásának eredője egyenlő nagyságú és ellentétes irányú lesz az autó $\boldsymbol{a}$ gyorsulásával.

Mivel a tangenciális gyorsulás (a sugarak arányának megfelelően)

$$a_\mathrm{t} = \frac{a}{2} = 1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

nagyságú, továbbá a centripetális gyorsulás és a tangenciális gyorsulás egymásra merőleges vektorok, a Pitagorasz-tétel szerint

$$a_\mathrm{cp} = \sqrt{a^2 - a_\mathrm{t}^2} = 2{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A centripetális gyorsulás nagyságából kiszámíthatjuk a kerék tengelyétől $r = 0{,}2$ m távol lévő pontok kerületi sebességét:

$$a_\mathrm{cp} = \frac{v^2}{r}, \qquad \text{ahonnan} \qquad v = \sqrt{a_\mathrm{cp}\, r} = \sqrt{2{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}2\ \mathrm{m}} = 0{,}72\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ekkora kerületi sebességre a díszítőgyűrű pontjai az autó indulásától számított

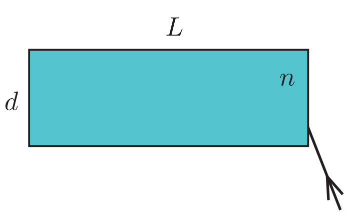
$$t = \frac{v}{a_\mathrm{t}} = 0{,}48\ \mathrm{s}$$

idő alatt tesznek szert. Ekkor az autó sebessége

$$v_\text{autó} = at = \left(3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) \cdot 0{,}48\ \mathrm{s} = 1{,}44\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 5\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

„Bármi jó” csapat:
Esztinka Anna Karolina és *Szalóki Szonja*
(Budapest, Városmajori Gimn., 11. évf.)

54 dolgozat érkezett. Helyes 23 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 11, hiányos (1–3 pont) 20 dolgozat.



P. 5433. *Egy vízzel töltött, téglatest alakú, elhanyagolható falvastagságú akvárium három függőleges oldala a vízből rájuk eső fényt visszaveri. Az akvárium szélessége* $d = 50$ cm, *hossza* $L = 120$ cm. *Az akvárium rövidebb oldalához vízszintes síkban valamekkora beesési szögben lézersugár érkezik. Az ábra felülnézetet mutat.* (*A víz törésmutatója:* $n = 4/3$.)

A kilépő fénysugár – többszöri tükröződés után – éppen a beeső fénysugárral párhuzamosan haladva hagyja el az akváriumot. Legfeljebb hány tükröződés történhetett?

(*5 pont*) *Zsigri Ferenc* (Budapest) feladata nyomán

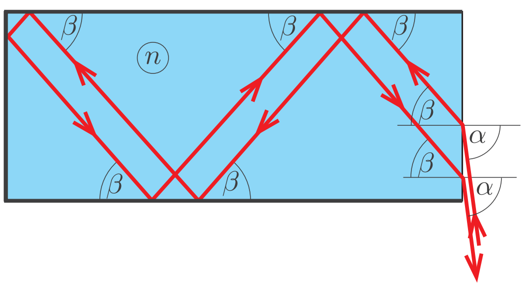
Megoldás. Legyen a fénysugár beesési szöge α, törési szöge pedig β. A törési törvény szerint

$$\sin\beta = \frac{1}{n}\sin\alpha < \frac{1}{n} = \frac{3}{4},$$

tehát β legnagyobb értéke

$$\beta_{\max} = \arcsin\frac{3}{4} \approx 48{,}6^\circ$$

lehet. (Kihasználtuk, hogy az arkuszszinusz-függvény 0 és $\pi/2$ között szigorúan monoton növekvő.) Nevezzük (a fénysugár által kijelölt vízszintes síkban) az akvárium 120 cm-es oldalával párhuzamos irányt „hosszantinak”, a rá merőlegeset pedig „keresztirányúnak”. Vegyük észre, hogy az akváriumban ide-oda tükröződő fény sebességének mind a hosszanti, mind pedig a keresztirányú komponense (azok nagysága) mindvégig ugyanakkora marad.



A fény az akvárium hosszát oda-vissza

$$t = \frac{2L}{c_{\text{víz}}\cos\beta}$$

idő alatt teszi meg ($c_{\text{víz}}$ a fény terjedési sebessége a vízben). Ennyi idő alatt a fény keresztirányban

$$h = c_{\text{víz}}t\sin\beta = 2L\,\mathrm{tg}\,\beta$$

utat tesz meg. A hosszanti falaknál történő visszaverődések N száma h/d egészrészénél legfeljebb 1-gyel nagyobb lehet:

$$N < \left[\frac{h}{d}\right] + 1 = \left[\frac{2L}{d}\,\mathrm{tg}\,\beta\right] + 1. \qquad (1)$$

Amennyiben N páratlan szám, úgy a vízben haladó fénysugár sebességének mind a hosszanti, mind pedig a keresztirányú komponense előjelet vált, tehát a kilépő fény a belépő fény irányával párhuzamosan hagyja el az akváriumot.

Mivel 0 és $\pi/2$ között a tangensfüggvény is szigorúan monoton növekvő, N legnagyobb értékét β legnagyobb értéke adja meg:

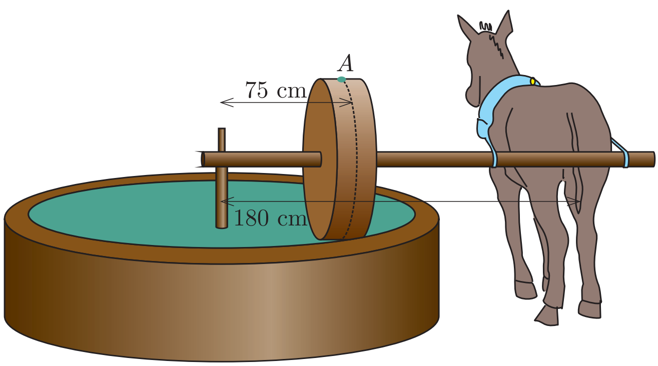
$$N < \left[\frac{2L}{d}\ \mathrm{tg}\,\beta_{\max}\right] + 1 = \left[\frac{240}{50}\ \mathrm{tg}\,48{,}6^\circ\right] + 1 = [6{,}44] = 6.$$

Mivel azonban N páratlan, $N_{\max} = 5$. A fénysugár a hosszanti oldalakon legfeljebb 5-ször, a rövidebb oldalon 1-szer, összesen tehát legfeljebb 6-szor tükröződhet.

Fajszi Karsa (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10 évf.)
dolgozatának felhasználásával

29 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 10, hibás 2 dolgozat.

P. 5438. *Egy spanyol gazdaságban a képen látható olajbogyópréssel törik péppé a bogyókat. A* 90 cm *átmérőjű zúzókerék tisztán gördülő síkja, amit az* ábrán *szaggatott vonal jelez, a tengelytől* 75 cm *távolságban van. A csacsi farka a tengelytől* 180 cm *távolságban verdesi a rudat, miközben az állat* 2,4 m/s *sebességgel körbe-körbe fut. A zúzókerékre egy* 1 g *tömegű olajbogyó ragad.*



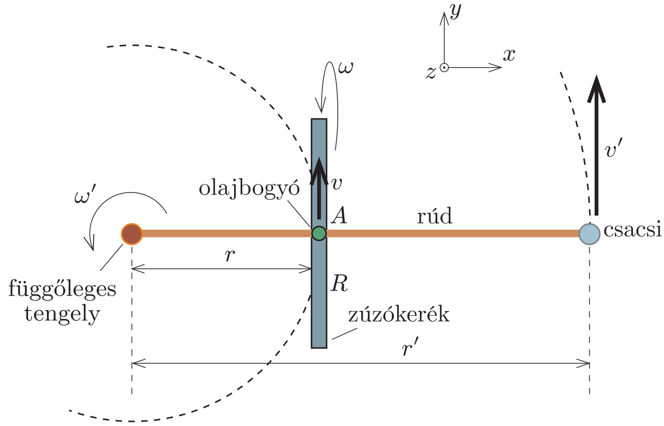
a) *Mekkora az olajbogyó sebessége, amikor a felső A pontba ér?*

b) *Mekkora a olajbogyó gyorsulása az A pontban?*

c) *Mekkora és milyen irányú eredő erőt fejt ki a zúzókerék az olajbogyóra a legfelső A pontban?*

(*5 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház

I. megoldás. A mozgás leírásánál használjuk az *1. ábrán* látható koordinátarendszert, valamint az ábra jelöléseit. (A vektorokat félkövér betűkkel fogjuk jelölni, a nagyságukat pedig ugyanazzal a betűvel, de nem félkövérrel, pl. $|\boldsymbol{v}| = v$.)



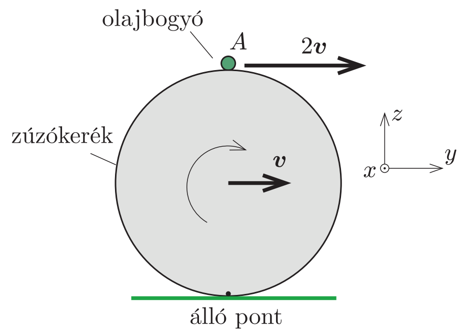
1. ábra

a) A zúzókerék középpontjának sebessége a csacsi v' sebességéből és a sugarak arányából számolható:

$$v = \frac{r}{r'}v' = \frac{75\ \mathrm{cm}}{180\ \mathrm{cm}} \cdot 2{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Mivel a kerék tisztán gördül, vagyis a *2. ábrán* látható legalsó pontjának sebessége nulla, az A pont sebessége

$$v_A = 2v = 2{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$



2. ábra

b) A zúzókerék tengelye a függőleges rúd körül

$$\omega' = \frac{v}{r} = \frac{1{,}0\ \mathrm{m/s}}{0{,}75\ \mathrm{m}} = 1{,}33\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

szögsebességgel fordul körbe a vízszintes $x-y$ síkban. (Ha a szögsebességet forgástengely irányú vektornak tekintjük, akkor a jobbkéz-szabály szerint $\boldsymbol{\omega}'$ függőlegesen felfelé irányul.)

„Üljünk bele" egy olyan koordináta-rendszerbe, amelynek origója a zúzókerék középpontjánál van, és ω' szögsebességgel forog a függőleges tengely körül. Ebben a rendszerben a zúzókerék mindig ugyanazon a helyen van, de ω szögsebességgel forog a rögzített helyzetű, vízszintes tengelye körül.

A forgó rendszerben az olajbogyóra ható „valódi erő" (a nehézségi erő és a kerék által kifejtett kényszererő $\boldsymbol{F}$ eredője) mellett fellépnek ún. tehetetlenségi erők is. Az egyik ilyen erő a függőleges tengely körüli forgásból származó

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{cf}} = m\boldsymbol{r}\omega'^2$$

centrifugális erő, ahol $\boldsymbol{r}$ a függőleges forgástengelytől az A pontba mutató vízszintes vektor). Ha a forgó rendszerben egy tömegpont (esetünkben az A pontbeli olajbogyó) $\boldsymbol{v}$ sebességgel mozog, akkor hat rá még az

$$\boldsymbol{F}_{\text{Coriolis}} = 2m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}'$$

Coriolis-erő (lásd pl. a „Négyjegyű" 1.2.5. alpontját a tehetetlenségi erőkről).

A tehetetlenségi erőkkel kiegészített Newton-féle mozgásegyenlet a forgó koordináta-rendszerben:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{cf}} + \boldsymbol{F}_{\text{Coriolis}} = m\boldsymbol{a}_{\text{forgó}},$$

ahol $\boldsymbol{a}_{\text{forgó}} = -\boldsymbol{R}\omega^2$, hiszen az A pont R sugarú körpályán ω szögsebességgel forog. ($\boldsymbol{R}$ függőlegesen felfelé irányuló, R nagyságú vektor.) Másrészt az álló (inercia-) rendszerben igaz, hogy

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_{\text{álló}}.$$

Ezekből az egyenletekből adódik, hogy a keresett gyorsulás az olajbogyóprés álló koordináta-rendszerében:

$$\boldsymbol{a}_{\text{álló}} = -\boldsymbol{R}\omega^2 - \boldsymbol{r}\omega'^2 - 2\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}'.$$

A vektorok irányát és nagyságát figyelembe véve az utolsó tagot a $2\omega'^2\boldsymbol{r}$ módon is felírhatjuk. Ezzel az álló rendszerbeli gyorsulásvektor vízszintes komponense:

$$a_x = -3\omega'^2 r = -4{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

a függőleges komponense

$$a_z = -R\omega^2 = -\frac{v^2}{R} = -2{,}22\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

a nagysága pedig

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_z^2} = 4{,}58\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c) Az m tömegű olajbogyóra ható erőket a Newton-egyenletből kapjuk meg:

$$F_x = ma_x = -3mr\omega'^2 = -4{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{N},$$

illetve $F_z - mg = ma_z$ szerint

$$F_z = m(g + a_z) = m\big(g - R\omega^2\big) = 7{,}59 \cdot 10^{-3}\ \text{N}.$$

Az eredő erő nagysága:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = 8{,}58 \cdot 10^{-3}\ \text{N}.$$

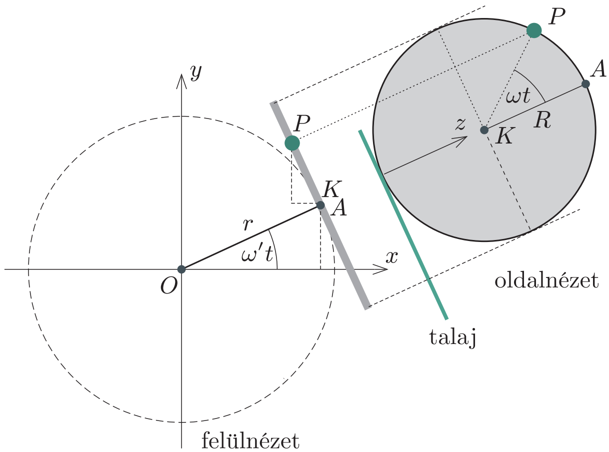
Az $\boldsymbol{F}$ vektor az x, z síkban fekszik, és az iránya a negatív x tengellyel

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{F_z}{-F_x}\right) = 62{,}2^\circ$$

nagyságú szöget zár be.

Bencz Benedek (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Az olajbogyó sebességét és gyorsulását a talajhoz képest álló inerciarendszerben is kiszámíthatjuk.*



3. ábra

A *3. ábrán* látható derékszögű koordináta-rendszerben a kerék K középpontjának koordinátái az olajbogyó A ponton való áthaladása után t idő elteltével:

$$\boldsymbol{r}_K = (r\cos\omega' t, r\sin\omega' t, R).$$

Ennyi idő alatt a zúzókerék síkja $\omega' t$ szöggel fordult el a függőleges tengely körül, a keréknek a rúd körüli elfordulása pedig ωt. Ez utóbbi miatt az olajbogyó P pontja $R\sin\omega t$ távolságra kerül az A ponton átmenő függőleges egyenestől. Az ábráról leolvasható, hogy az olajbogyó koordinátái t idő elteltével:

(1) $$x(t) = r\cos\omega' t - R\sin\omega' t\cdot\sin\omega t,$$

(2) $$y(t) = r\sin\omega' t + R\cos\omega' t\cdot\sin\omega t,$$

(3) $$z(t) = R(1+\cos\omega t).$$

Az $x(t)$ függvény a

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

azonosság felhasználásával így is felírható:

$$x(t) = r\cos\omega' t + \frac{R}{2}\cos(\omega'+\omega)t - \frac{R}{2}\cos(\omega'-\omega)t.$$

* Ennek a tárgyalásmódnak az az előnye, hogy nem hivatkozik (a középiskolai oktatásban elkerülendőnek mondott) tehetetlenségi erőkre; hátránya viszont az, hogy a mozgást leíró függvények bonyolultabb alakúak.

Ez három koszinuszos függvény összege, éppen olyanoké, mint amelyek egy-egy kezdősebesség nélkül induló, harmonikus rezgőmozgást írnak le. Az analógia alapján a P pont x tengely irányú gyorsulása $t=0$ pillanatban:

$$a_x(0)=-r\omega'^2-\frac{R}{2}(\omega'+\omega)^2+\frac{R}{2}(\omega'-\omega)^2=-r\omega'^2-2R\omega\omega'=-3r\omega'^2.$$

Hasonlóan számíthatjuk ki az $y(t)$ és $z(t)$ összefüggéseket. Ezekből leolvashatjuk, hogy

$$v_y(0)=2r\omega',\qquad a_y(0)=0,$$

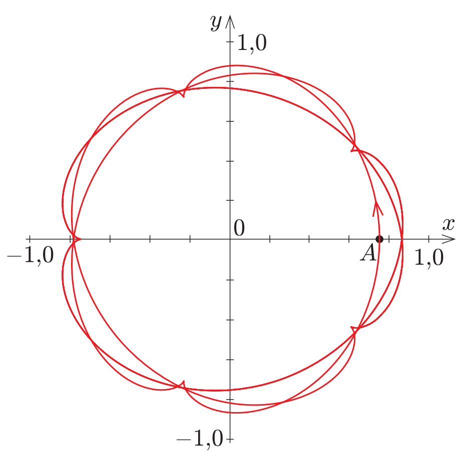
továbbá

$$v_z(0)=0,\qquad a_z(0)=-R\omega^2.$$

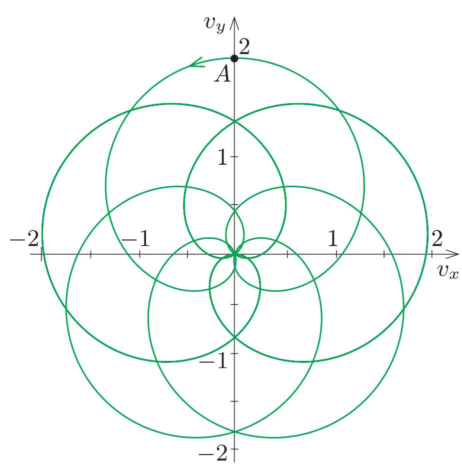
Ezeket az eredményeket felsőbb matematikai módszerekkel, az (1), (2) és (3) kifejezések első, illetve második deriváltjából is megkaphatjuk.

Megjegyzés. Hasonló módon számíthatjuk ki az olajbogyó gyorsulását abban a pillanatban, amikor az A-val átellenes helyzetben van (feltételezve, hogy még ott is hozzátapad a zúzókerékhez). Meglepő módon azt kapjuk, hogy a pálya legalsó pontjánál (vagyis ott, ahol az olajbogyó sebessége nulla) a vízszintes irányú gyorsulása $+r\omega'^2$, tehát a bogyó „kifelé” gyorsul. Ennek szemléletes magyarázata az, hogy az olajbogyó pályája nem egy r sugarú hengerpaláston fekszik, hanem egy r és egy $\sqrt{r^2+R^2}$ sugarú henger közötti térrészben található. A bogyó bizonyos helyzetekben egyre jobban eltávolodik a függőleges tengelytől, emiatt lehet kifelé irányuló sebessége és gyorsulása is.

Érdekes (és látványos) eredményhez jutunk, ha az olajbogyó mozgását (a helyét, sebességét és gyorsulását) grafikusan ábrázoljuk. A z tengely irányú mozgás ismerős lehet, az egy olyan harmonikus rezgőmozgás, aminek „egyensúlyi helyzete” $z=R$, amplitúdója R, körfrekvenciája pedig a kerék (a saját tengelye körüli) forgásának ω szögsebessége. A meglepetést a mozgás vízszintes síkbeli lefolyása okozza.

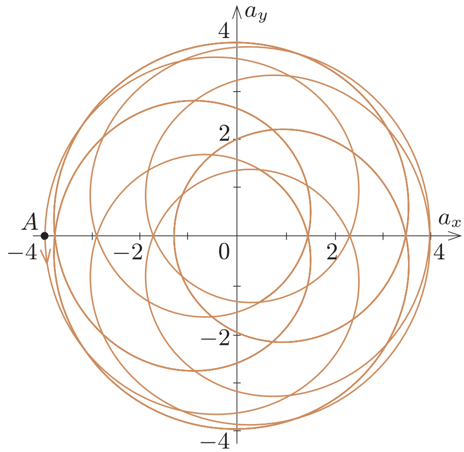


4. ábra



5. ábra

Ha egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $x(t)$ és $y(t)$ koordinátájú pontokat, tehát megadjuk a pályagörbét paraméteres alakban (ezt számítógépes program, pl. a GeoGebra vagy a WolframAlfa segítségével is megtehetjük), akkor a *4. ábrán* látható piros görbét kapjuk. Hasonlóan járhatunk el, ha a koordinátatengelyekre $v_x(t)$-t és $v_y(t)$-t mérjük fel, vagyis a sebességhodográfot rajzoljuk meg (az *5. ábrán* látható zöld görbe), illetve ha a gyorsulás komponenseit adjuk meg az idő függvényében, tehát a gyorsuláshodográfot készítjük el (a *6. ábrán* a barna görbe). (A tengelyeken a megfelelő mennyiségek SI mértékegységrendszerben mért nagyságát adtuk meg.)



6. ábra

A feladatban szereplő helyzetben az olajbogyó helyét, sebességét és gyorsulását az ábrákon A betű és egy kis fekete kör jelöli. Az idő múlásának irányára az ábrákon látható nyilak utalnak. (A hodográfokról szóló rövid cikket a KöMaL honlapján olvashatjuk*.)

(*G. P.*)

65 dolgozat érkezett. Teljes értékű Bencz Benedek megoldása. Kicsit hiányos (3–4 pont) 30, hiányos (1–2 pont) 27, hibás 5, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5444. *Egy vékony, hosszú, függőleges, szigetelőrúdon súrlódásmentesen mozoghat egy kicsiny töltött golyócska. Ha egy ezzel azonos töltésű, ugyancsak kicsiny testet helyezünk a rúd tövébe, a mozgó golyó h_0 magasságban lesz egyensúlyban. Milyen messzire távolíthatjuk el a rúdtól vízszintes irányba az alsó testet úgy, hogy a rúdon lévő golyó még egyensúlyban lehessen valahol? Milyen magasan van ez a hely?*

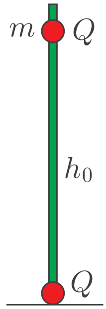
(*6 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata nyomán

Megoldás. Legyen a szigetelőrúdon lévő golyócska tömege m, töltése Q. Ha a rúd tövéhez helyezett másik töltés h_0 magasságban tudja az mg súlyú golyócskát egyensúlyban tartani (lásd az *1. ábrát*), akkor fennáll:

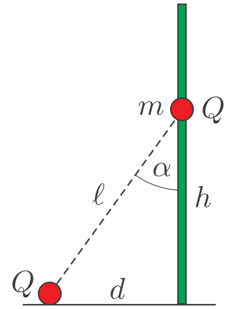
$$k\frac{Q^2}{h_0^2} = mg. \tag{1}$$

Vizsgáljuk most a rúdtól d távolságban elhelyezett töltés és a rúdon lévő golyócska egyensúlyának lehetőségét. Ha a két töltött test között h a magasság-

* `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`



1. ábra



2. ábra

különbség, és az őket összekötő egyenes α szöget zár be a függőlegessel (*2. ábra*), akkor

$$k\frac{Q^2}{\ell^2}\cos\alpha = mg, \tag{2}$$

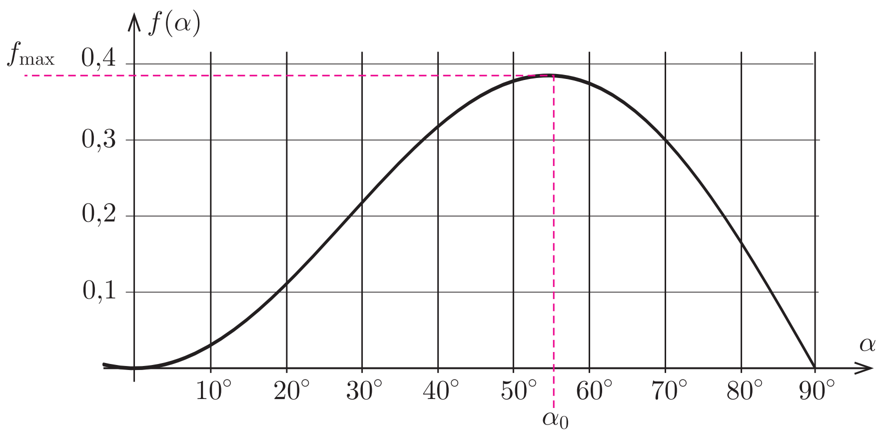
ahol $\ell = d/\sin\alpha$ a két töltés távolsága. (1) és (2) összevetéséből kapjuk, hogy az egyensúly feltétele:

$$\frac{d^2}{h_0^2} = \sin^2\alpha\,\cos\alpha. \tag{3}$$

Kérdés: Legfeljebb mekkora d mellett van megoldása a (3) egyenletnek, vagyis mekkora az

$$f(\alpha) = \sin^2\alpha\,\cos\alpha$$

függvény maximuma a $0 < \alpha < \pi/2$ intervallumon? Ábrázolva $f(\alpha)$-t, a függvény grafikonjáról (*3. ábra*) leolvashatjuk, hogy $\alpha_0 \approx 55°$ és $f_{\max} \approx 0{,}38$.



3. ábra

Ennek megfelelően

$$d_{\max} = h_0\sqrt{f_{\max}} \approx 0{,}62\,h_0 \quad \text{és} \quad h_{\min} = d_{\max}\cdot \operatorname{ctg}\alpha_0 \approx 0{,}44\,h_0.$$

Az $f(\alpha)$ függvény lokális maximumát differenciálszámítással, vagy számítógépes segítség (pl. a `WolframAlpha`) felhasználásával pontosabban is megkaphatjuk. Ezek szerint

$$\alpha_0 = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54{,}73^\circ \qquad \text{és} \qquad f_{\max} = \frac{2}{\sqrt{27}} \approx 0{,}3849,$$

továbbá

$$d_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{27}}}\, h_0 \approx 0{,}6204\, h_0$$

és

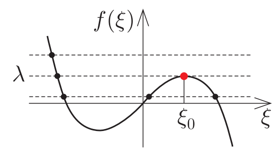
$$h_{\min} = \frac{h_0}{\sqrt[4]{27}} \approx 0{,}4387\, h_0.$$

(*Több dolgozat alapján*)

Megjegyzés. $f(\alpha)$ maximumát (*4. ábra*) nemcsak differenciálszámítással, hanem elemi módszerekkel is meg lehet határozni. Vezessük be a $\xi = \cos\alpha$ jelölést, és keressük az

$$f(\xi) \equiv \xi(1-\xi^2)$$

függvény (lokális) maximumát. Ezt ott (annál a λ értéknél) találjuk, amelynél a



4. ábra

$$\text{(4)} \qquad \xi^3 - \xi + \lambda = 0$$

harmadfokú egyenlet három valós gyöke közül kettő egybeesik. (A 4. ábrán láthatjuk, hogy (4)-nek vagy három, vagy egy valós gyöke van.) A keresett λ és ξ_0 értékeket a gyökök és együtthatók közötti összefüggésből kaphatjuk meg. Mivel (4)-ben nem szerepel másodfokú tag, a három gyök összege *nulla.* Ha a kétszeres gyök ξ_0, akkor a harmadik gyök $-2\xi_0$, és a gyöktényezős alak

$$\xi^3 - \xi + \lambda \equiv (\xi-\xi_0)^2(\xi+2\xi_0) \equiv \xi^3 - 3\xi_0^2\xi + 2\xi_0^3.$$

A különböző hatványok együtthatóit rendre összehasonlítva kapjuk, hogy

$$-3\xi_0^2 = -1, \qquad \text{azaz} \qquad \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

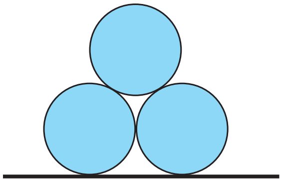
továbbá

$$\lambda = f_{\max} = 2\xi_0^3 = \frac{2}{\sqrt{27}},$$

összhangban a korábban kapott eredményekkel.

(*W. F.*)

27 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 3, hiányos (2–3 pont) 4, nem versenyszerű 2 dolgozat.

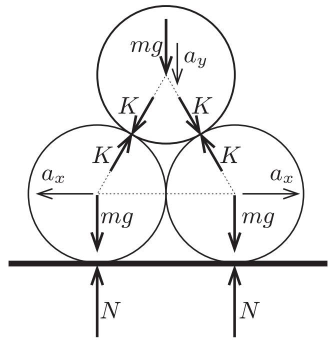


P. 5447. *Három egyforma,* 5 cm *sugarú jéghengert készítünk, és azokat az* ábrán *látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük. A súrlódás mindenhol elhanyagolható.*

Mekkora gyorsulással indulnak el a jéghengerek?

(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

Megoldás. A testekre ható erőket az *1. ábrán* tüntettük fel. Súrlódás hiányában mindegyik erő hatásvonala a megfelelő jéghenger tömegközéppontján halad keresztül. A két alsó henger között nem hat erő, mert az induláskor rögtön eltávolodnak egymástól egy kicsit.



1. ábra

A hengerek középpontja az indulás pillanatában szabályos háromszöget alkot. A három test mozgásegyenlete (az ábrán jelölt gyorsulásokkal):

(1) $$mg - 2\frac{\sqrt{3}}{2}K = ma_y,$$

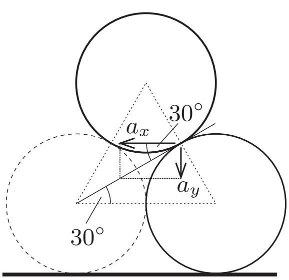
(2) $$\frac{1}{2}K = ma_x,$$

továbbá az alsó testek függőleges irányú mozgásának hiánya miatt

(3) $$mg + \frac{\sqrt{3}}{2}K - N = 0.$$

Az utolsó egyenletet (hacsak nem akarjuk kiszámítani a talaj által kifejtett N nyomóerőt) elhagyhatjuk, nem lesz szükségünk rá.

Az (1) és (2) egyenlet három ismeretlent tartalmaz, a megoldáshoz tehát még egy összefüggést kell keressünk. Ez egy kinematikai kényszerfeltétel lesz, ami azt fejezi ki, hogy a felső henger és az egyik (mondjuk a jobb oldali) jéghenger folyamatosan érintkezik egymással, a tengelyeik távolsága időben állandó marad.



2. ábra

A két gyorsulás kapcsolatára akkor tudunk kifejezést felírni, ha az egyik (mondjuk a jobb oldali) alsó henger vonatkoztatási rendszeréből tekintjük a mozgást. Ekkor az alsó henger áll, a felső pedig a_x gyorsulással mozog balra, miközben a_y gyorsulással mozog lefelé (*2. ábra*). (Ezek a gyorsulások nemcsak a henger tengelyére, hanem bármely pontjára, így az alsó hengerrel érintkező pontjaira is érvényesek.)

A felső henger eredő gyorsulása a vízszintessel 30°-os szöget kell hogy bezárjon, mert az alsó hengerhez se nem közeledik, se nem távolodik attól. (A hengerek kezdetben álltak, így minden pontjuknak nulla a centripetális gyorsulása.) Ezek szerint

$$a_x \sin 30^\circ = a_y \cos 30^\circ,$$

vagyis

$$\frac{a_y}{a_x} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{4}$$

Az (1), (2) és (4) egyenletekből (K kiküszöbölése után) a keresett gyorsulásokra

$$a_x = \frac{\sqrt{3}}{7} g \qquad \text{és} \qquad a_y = \frac{1}{7} g$$

adódik.

Nemeskéri Dániel (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.)

48 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 18, hibás 3, nem versenyszerű 10 dolgozat.

P. 5450. *Az* $f = 5$ cm *fókusztávolságú gyűjtőlencse optikai tengelyén, a lencsétől jobbra* 30 cm*-re és balra* 18 cm*-re található, pontszerűnek tekinthető szentjánosbogarak elkezdenek egymás felé mozogni* 2 cm/s *sebességgel. Mennyi idő múlva kerül fedésbe egymással a két bogár képe?*

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

Megoldás. A leképezési törvény szerint ha egy f fókusztávolságú gyűjtőlencsétől t távol lévő tárgy képe a lencsétől k távolságban jön létre, akkor fennáll, hogy:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

ahonnan a képtávolság

$$k = \frac{tf}{t-f}. \tag{1}$$

(Előjel-konvenció: k pozitív, ha a lencsét elhagyó sugarak összetartanak, így valódi kép alakul ki a tárggyal ellentétes oldalon; k negatív, ha a fénysugarak széttartóak maradnak, ekkor a kép látszólagos és a tárgy oldalán jön létre.)

Valamekkora t idő alatt mindkét bogár ugyanakkora, $x = vt$ távolságot tesz meg. (Ha a távolságokat cm, az időt s, a sebességet pedig cm/s egységekben mérjük, akkor $x = 2t$.)

A lencsétől balra lévő (B) bogár legfeljebb a lencséig tud eljutni, tehát $x < 18$. Eközben a másik, a lencsétől jobbra lévő (J) bogár nem kerül 12 cm-nél közelebb a lencséhez, tehát annak fókusztávolságán kívül marad ($t > f$). A J bogár valódi képe a lencse bal oldalán jöhet csak létre. A B bogár képe akkor eshet fedésbe J képével, ha B a lencsétől f-nél kisebb távolságba kerülve a képe látszólagos, az tehát ugyancsak a lencse bal oldalán alakul ki.

Valamekkora x út megtétele után a J bogár tárgytávolsága $30-x$, a B bogáré $18-x$ lesz. A megfelelő képtávolságok (1) szerint:

$$k_{\mathrm{J}} = \frac{5(30-x)}{25-x} > 0 \qquad \text{és} \qquad k_{\mathrm{B}} = \frac{5(18-x)}{13-x} < 0.$$

(Az utóbbi egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x > 13$, vagyis a bogár már áthaladt a lencse fókuszpontján.)

A két kép átfedésének feltétele: $k_{\mathrm{B}} = -k_{\mathrm{J}}$, vagyis

$$\frac{5(30-x)}{25-x} + \frac{5(18-x)}{13-x} = 0.$$

Innen a

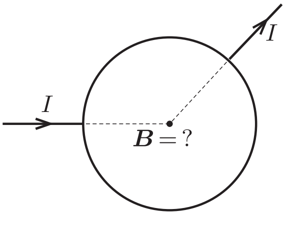
$$(30-x)(13-x) + (25-x)(18-x) = 2(x^2 - 43x + 420) = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei: $x_1 = 15$ és $x_2 = 28$. Mivel $x_2 > 18$, csak az $x = 15$ cm elmozdulás fogadható el. Ekkora utat a szentjánosbogarak 7,5 s alatt tesznek meg, és 15 cm, illetve 3 cm távol lesznek a lencsétől. Mindkettőjük képe a lencse bal oldalán, a lencsétől 7,5 cm távolságban jön létre.

Megjegyzés. Ha lehetővé tesszük, hogy a bogarak (pl. a lencse közepén lévő lyukon keresztül) áthaladjanak a lencsén, akkor további helyzetekben is fedésbe kerülhet a képük. $x = 33$ cm elmozdulás után J a lencse bal oldalára, a lencsétől 3 cm-re, B pedig a jobb oldalon 15 cm-nyire kerül. Ez az helyzet a fentebb számolt eset tükörképe, a képek tehát itt is egybeesnek. További megoldás: $x = 24$ cm; ennél a bogarak a lencse jobb oldalán, a lencsétől 6 cm távolságban találkoznak. Mivel ugyanott vannak, nyilván a képeik is egybeesnek.

Több dolgozat alapján

41 dolgozat érkezett. Helyes 26 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 11, nem versenyszerű 2 dolgozat.



P. 5459. *Egyenletes vastagságú ellenálláshuzalból R sugarú kört hajlítunk. A kör egyik pontjánál „sugárirányban” I erősségű áramot vezetünk be, egy másik pontjánál pedig (ugyancsak sugárirányban) elvezetjük azt.*

Milyen irányú és mekkora nagyságú a mágneses indukcióvektor a kör középpontjában?

(*3 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

Megoldás. A körvezető az áram bevezetési és kivezetési pontjai között haladó körívekre bontható. Ezen körívek párhuzamosan kapcsolt ellenállások. Párhuzamosan kapcsolt ellenállások esetében az $I_{1,2}$ áramerősségek fordítottan arányosak az $r_{1,2}$ ellenállásokkal. Az ellenállások viszont egyenesen arányosak az $i_{1,2}$ ívhosszakkal. Tehát az áramerősség fordítottan arányos az ívhosszal, vagyis

$$I_1 \cdot i_1 = I_2 \cdot i_2.$$

A mágneses indukció a kör középpontjában a körívben folyó áram erősségének és az ívhossznak a szorzatával arányos. A két ívhosszdarab járuléka a mágneses indukcióvektorhoz azonos nagyságú, de ellentétes irányú, tehát a kör középpontjában az eredő mágneses indukcióvektor *nullvektor.*

Klement Tamás (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

42 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 3, hibás 7, nem versenyszerű 5 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 421. Húzzunk fekete, puha grafitceruzával vonalakat egy papírlapra. Feltételezhetjük, hogy a grafit atomi rétegekben „kenődik”, és a szomszédos atomi rétegek közötti távolság 0,34 nm. Határozzuk meg, hogy hány szénatom magasságú egy vonal!

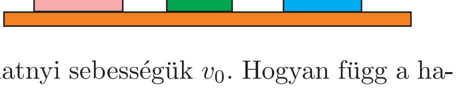
(*6 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

G. 809. Egy könnyű reszelővel kis méretű munkadarabot vízszintes síkban reszelünk. A két kezünk által kifejtett erők eredőjének hatásvonala átmegy a munkadarab felületének a közepén, és ez a hatásvonal 30°-os szöget zár be a függőlegessel. Mekkora a reszelő és a munkadarab közötti súrlódási együttható?

(*3 pont*)

G. 810. Tizenegyesrúgáskor a labda átlagsebessége elérheti a 150 km/h értéket is. A kapusnak mennyi ideje van a védésre, ha az elrúgás pillanatában a kapu közepén áll, és a labda a kapu egyik alsó sarka felé mozog? Van-e igazságtartalma a következő mondásnak: *„Büntetőt jól védeni nem lehet, csak rosszul rúgni.”*?

(*3 pont*)



G. 811. Vízszintes lapon három hasábot állandó F erővel húzunk az *ábrán* látható módon. A hasábok mindvégig egy egyenes mentén mozognak, pillanatnyi sebességük v_0. Hogyan függ a hasábokat összekötő fonalakban ébredő fonálerő a hasábok és a lap közötti μ csúszási súrlódási együttható értékétől?

(*4 pont*)