B. 5274. *Az $a<b$ pozitív egészek szorzata négyzetszám. Mutassuk meg, hogy van olyan x pozitív egész, amelyre $a\leqslant x^2\leqslant b$.*

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Legyen $ab=n^2$. A számtani–mértani közepek közti egyenlőtlenség miatt $\frac{a+b}{2}>n$ (hiszen $a\neq b$). Így $a+b>2n$, vagyis

$$\begin{aligned} a+b&\geqslant 2n+1,\\ a-2n+b&\geqslant 1,\\ \left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2&\geqslant 1,\\ \sqrt{b}-\sqrt{a}&\geqslant 1. \end{aligned}$$

Tehát a $\left[\sqrt{a},\sqrt{b}\right]$ intervallum legalább egység hosszú, ezért kell lennie benne egésznek (hiszen két szomszédos egész különbsége 1); legyen ez az egész k.

Ekkor $\sqrt{a}\leqslant k\leqslant\sqrt{b}$, azaz $a\leqslant k^2\leqslant b$, és készen vagyunk.

Lovas Márton (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 12. évf.)

101 dolgozat érkezett. 5 pontos 58, 4 pontos 2, 3 pontos 2, 2 pontos 8, 1 pontos 10, 0 pontos 16 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (759–763.)

K. 759. Egy kilencfős társaságról tudjuk, hogy mindenki pontosan négy másik embert ismer a társaság tagjai közül. (Az ismeretség kölcsönös.)

a) Lehetséges-e, hogy a társaság tagjai között bármely két embernek van közös ismerőse?

b) Igaz-e, hogy egy ilyen társaság tagjai között bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy van közös ismerősük?

K. 760. Az $A(2;4)$, $B(6;4)$, $C(4;10)$ háromszöget az $x=a$, majd az $y=2$ egyenesre tükrözzük.

a) Mennyi a két tükrözés után kapott csúcsok második koordinátáinak összege?

b) Mennyi a értéke, ha a két tükrözés után kapott csúcsok első koordinátáinak összege 36?

K. 761. Jancsi a 3/5 számlálójához és nevezőjéhez is hozzáírja – vagy elé, vagy mögé – ugyanazt a számjegyet úgy, hogy a számlálóban és a nevezőben is kétjegyű szám szerepeljen. Mekkora a legnagyobb eltérés az így kapható számok között?

K/C. 762. Egy 5×5-ös táblázat huszonöt mezőjét valamilyen sorrendben kiválasztjuk, és egy számot írunk rá. Az aktuálisan választott mezőre azt a számot írjuk, amely megmutatja, hogy annak a mezőnek addig hány olyan oldalszomszédja van már, amelyre írtunk számot.

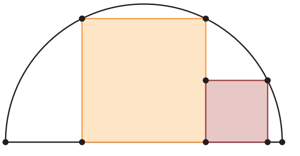
(Ezt a táblázatot pl. az alábbi sorrendben tölthettük ki: a5, b5, c5, d5, e5, e4, e3, e2, a4, a3, a2, a1, b1, c1, d1, e1, ...)

5	0	1	1	1	1
4	1	2	2	4	1
3	1	2	4	2	1
2	1	3	2	3	1
1	1	1	1	1	2
	a	b	c	d	e

Készítsünk még két ilyen kitöltést. Adjuk össze a kitöltésben lévő számokat.

Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan töltjük ki a szabálynak megfelelően a táblázatot, a számok összege minden esetben 40 lesz.

K/C. 763. Egy egységnyi sugarú félkörbe két olyan, az átmérőre illeszkedő négyzetet írunk, melyeknek van közös oldalszakasza, és egy-egy csúcsuk a körvonalra illeszkedik.



Tudjuk, hogy a kör középpontjából a két négyzet körön lévő csúcsaihoz húzott sugarak egymásra merőlegesek. Igazoljuk, hogy a két, ilyen módon megrajzolt négyzet területének összege állandó.

❄

Beküldési határidő: 2023. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (762–763., 1758–1762.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 762. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 763. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.