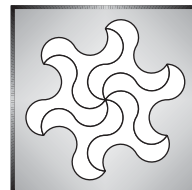


Matematika feladat megoldása

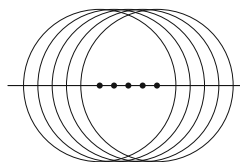


B. 5022. Adott a síkon néhány egységsugarú kör, mindegyik középpontját kékre színezzük. A körvonalakon megjelölünk néhány pontot pirossal úgy, hogy minden körvonalra pontosan 2 piros pont illeszkedjen. Legfeljebb mekkora a kék pontok száma, ha összesen 25 színezett pont van?

(3 pont)

Javasolta: Róka Sándor (Nyíregyháza)

Megoldás. Egy egységsugarú kört toljunk el ugyanabban az irányban négyszer, 0,0002 távolságra. Az így kapott öt darab egységkör középpontjai egy 0,0008 hosszúságú szakaszon helyezkednek el; ezért közülük bármely kettőnek két közös pontja van, és semelyik háromnak nincs közös pontja. Az utóbbi tulajdonság igazolásához tegyük fel, hogy valamelyik három körnek Q közös pontja. A Q középpontú, egységnyi sugarú körvonalon ekkor mindhárom kör középpontja rajta lenne, ami lehetetlen, hiszen az öt kör középpontjai kollineárisak.



Színezzük ezután az öt középpontot pirosra, a metszéspontokat pedig kékre. Bármelyik két körhöz két kék (metszés)pont tartozik, amelyek a két kört egyértelműen meghatározzák, így a kék pontok száma $2 \cdot \binom{5}{2} = 20$. A feladat feltételeit így kielégíti az a 20 darab egységsugarú kör, amelyek középpontjai a kék pontok. Tehát a kék pontok száma lehet 20.

Megmutatjuk, hogy 20-nál több viszont nem lehet. Több, mint 20 kék ponttal ugyanis legfeljebb 4 piros pont lehetne. Ekkor viszont csak az lehet kék pont, ami a piros pontok köré rajzolt egység sugarú körök metszéspontjában van, hiszen különben nem lehetne legalább két pirostól egységnyi távolságra. Azonban a négy körnek legfeljebb $2 \cdot \binom{4}{2} = 12$ metszéspontja lehet (bármely kettőnek legfeljebb kettő). Tehát legfeljebb 4 piros pontnál legfeljebb 12 kék pont lehet, ami nyilván ellentmondás.

Ezzel készen vagyunk: beláttuk, hogy 20 kék pontnál több nem lehet, és mutattunk példát 20-ra.

Hegedűs Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

66 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 18 versenyző: Bencsik Ádám, Fraknói Ádám, Füredi Erik Benjámín, Györfi Ádám György, Hegedűs Dániel, Jánosik Máté, Kovács Tamás, Nádor Benedek, Nagy Nándor, Németh Norbert Marcell, Nguyen Bich Diep, Nyitrai Boglárka, Soós Máté, Terjék András József, Tiderenczl Dániel, Tóth Balázs, Tóth Ábel, Zsigri Bálint. 2 pontos 20, 1 pontos 7, 0 pontos 21 dolgozat.