Brassai Sámuel, a kolozsvári egyetem első matematikaprofesszora

Sámuel BRASSAI, the first professor of mathematics of the university of Cluj

Samuel BRASSAI, primul profesor de matematică al universităţii clujene

OLÁH-GÁL Róbert, SÁNDOR József

ABSTRACT

The aim of this paper is to examine and study , via concrete examples the mathematical activity by Samuel Brassai. Among other facts, we have enumerated and evaluated Brassai's mathematical works, connected with his activity as a university professor. We have called the attention to a wrong approximative method of solution of systems of linear equations, compared to his colleague's Mor Rethy, who was completely aware of Cramer's rule. We have remarked, that today it would be more appropriate to call the Cramer rule as the Leibniz-Maclaurin-Cramer rule, pointing out historical references. At the end of the paper, we have examined the fallacious proof given by Brassai for the famous Euclidean XI th axiom.

REZUMAT

Scopul acestei lucrări este de a examina şi studia prin exemple concrete acivitatea matematică a lui Sámuel Brassai. Printre altele, am înşirat şi evaluat lucrările matematice legate de activitatea sa de profesor universitar. Am atras atenţia asupra unei metode greşite a lui Brassai, de rezolvare aproximativă a sistemelor liniare de ecuaţii, în contrast cu metoda colegului sau, Mór Réthy, care cunoştea foarte bine regula lui Cramer. Remarcăm (prin dovezi istorice), că aztăzi ar fi mai potrivit să folosim denumirea de "regula lui Leibniz-Maclaurin-Cramer" pentru clasică regula a lui Cramer. În final, am examinat demonstraţia greşită dată de Brassai pentru celebra axioma XI a lui Euclid.

ÖSSZEFOGLALÓ

Jelen dolgozatban Brassai Sámuel matematikai munkásságát elemezzük konkrét példákon keresztül. Felsoroljuk Brassai legfontosabb matematikai publikációit és értékeljük professzori tevékenységét. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a többismeretlenes lineáris egyenletrendszerek megoldására Brassai egy rossz közelítő eljárást javasolt, amikor is a kartársa, Réthy Mór már jól ismerte a Cramer-szabályt. Továbbá megjegyezzük, hogy ma helyesebb volna a Cramer-szabályt Leibniz–Cramer–Maclaurin-szabálynak nevezni. A végén bemutatjuk Brassainak Euklidesz XI. axiómára adott bizonyításának helytelenségét.

Brassairól nagyon sok könyv, tanulmány, disszertáció és jegyzet jelent meg, de ezek az értékelők szinte egyértelműen megállapítják, hogy Brassai Sámuel matematikai munkássága körül van a legtöbb homály. Pedig 11 éven át volt az 1872-ben alakult kolozsvári Ferenc József Tudományegyetem elemi matematika professzora és innen is ment nyugállományba, nyugdíjaként meghagyván a teljes professzori fizetését. (Brassai összes állása és tisztsége közül ez volt a „legjobb" mind anyagilag, mind erkölcsileg.)

Brassai matematikai munkásságát nagyon vázlatosan és távirati stílusban, a következő szerzők elemezték: Vályi Gyula, Szénássy Barna, Oláhné Erdélyi Mária. Ezen jeles szerzők nem adnak konkrét példákat Brassai matematikai tevékenységéből.

Brassai halála után 114 évvel ki kell mondanunk azt az igazságot, hogy Brassai polihisztorságában, az összes többi tudományban való jártasságához képest a matematikában volt a legjáratlanabb. Matematikai publikációi csak elemi matematikai tankönyvekre szűkülnek, ezek közül a 9 kiadást megért *Számító Socrates* I-IV osztályosoknak íródott, *Algebra* tankönyve pedig jó esetben is középiskolás szinten áll.

Csak akkor érthető megállapításaink szigorúsága, ha elolvassuk a *XI. Axióma* c. akadémiai értekezletét, melyben szerinte bebizonyítja Euklidész XI. axiómáját. (Ezért ajánljuk ezt írásunk mellé újraközlésre).

Lényegében egyet kell értenünk Oláhné Erdélyi Mária megállapításával, hogy Brassai matematikai munkássága a módszertanra zsugorítható. Szerintünk ez is csak kisebb-nagyobb megjegyzésekkel, mert itt sem alkotott sok említésre méltó eredményt. Abban az időben már olyan tankönyvek voltak, mint Nagy Károly, Vállas Antal, Szász Károly, Franz Mocznik számtankönyvének Szász Károlyéktól való fordítása, stb. Bolyai Farkas módszertani dolgozataival, vagy az *Arithmetica elejé*vel, mint eredeti tudományos munkával össze sem hasonlítható egyik Brassai matematikai könyv sem.

Az első, aki értékelte Brassai matematikai munkásságát, az Vályi Gyula volt 1890-ben. Lényegében a Kolozsvár nevű polgári lap egy külön sorozatban emlékezett meg Brassairól és természetesen, felkérték az akkor legtekintélyesebb kolozsvári matematikaprofesszort, Vályi Gyulát, aki ráadásuk Brassainak hallgatója is volt, hogy emlékezzen meg Brassairól, mint matematikusról. Ha végignézzük a *Kolozsvár* c. lap ezen sorozatait láthatjuk, hogy ez az értékelés a legrövidebb (annak ellenére, hogy amint írtuk, Brassai kenyerének javát matematikai tudásával kereste), és ha őszintén olvassuk, láthatjuk, hogy nagyon udvariasan van megírva, de ugyanakkor matematikusi korrektséggel. Szó szerint ennyi Vályi Gyula tanulmánya:

„*Brassai a mathematikus.*

Brassai mathematikai irodalmi működése első sorban abból áll, hogy írt néhány kitűnő tankönyvet. Ezek között „Számító Socrates”-e a főbeli számvetésben, – algebrai gyakorlókönyve az algebrai műveletek begyakorlásában és az egyenletek megoldásában sokunknak fejlesztette eszét és logikai gondolkozását.

Ezen kívül lefordította az akadémia megbízásából Euclides geometriáját, a X, és XIII. könyvhöz nagyon tanulságos jegyzeteket csatolva. Ezekben Euclides tiszta geometriai fejtegetéseit az algebra nyelvén fordította le.

Brassai a kolozsvári tud.-egyetemen, ennek felállításától az 1882-83. egyetemi tanév végéig, az elemi mennyiségtant tanította. Rendesen a téli félévben algebrát és geometriát, a nyári félévben trigonometriát és analytica geometriát adott elő. Időnként az algebra történetéről is tartott előadást. Előadásait világosság és kritikai irány jellemezte, mint általában egész tudományos működését.

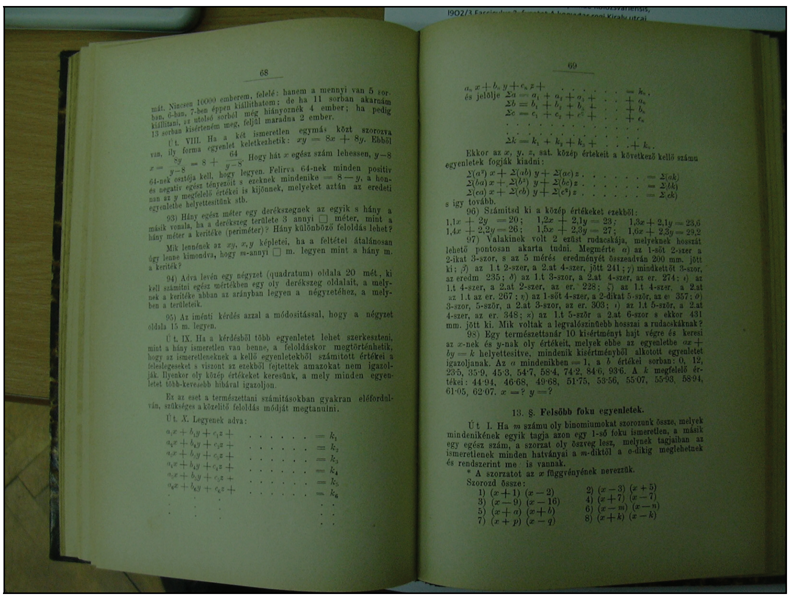
Brassai még ma is érdeklődik a mathesis iránt. Nagyon szeret foglalkozni mathematikai, különösen geometriai feladatok megoldásával. Ez neki valóságos szórakozás arra az időre, a mit, tudós-könyveit félre téve, pihenésre fordít.

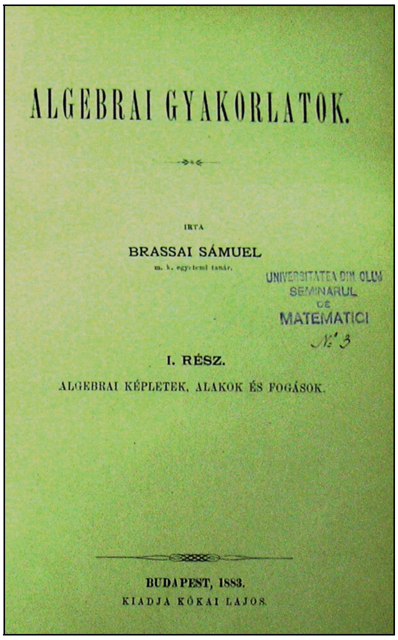
Vályi Gyula

Kolozsvár, 1890. csütörtök, június 19.”

Ha őszinték vagyunk, ennyi egy középiskolai matematikatanárról is elmondható! Matematikai munkássága a *Számító Socrates* (ahogy mondottuk, I-IV. osztálynak való fejszámolás) és az *Algebra* c. tankönyvére szűkül. Ez már akkor is nagyon kevés tudományos megvalósítás volt egy egyetemi matematikaprofesszor részéről. Szerencsére, mikor Vályi ezt a rövid értékelést felkérésre megírta, még nem jelent meg Brassai matematikai munkásságának a betetőzése: „a XI. axióma bizonyítása”. Ezt azért kell kihangsúlyoznunk, mert ez azt jelenti, hogy Brassai nem értette meg az euklideszi geometria axiomatikus rendszerének a lényegét. 1897-ben már David Hilbert készen volt az euklideszi axiómarendszer legmodernebb magalkotásával (ha akkor még nem is közölte), amely a mai, XXI. századi követelményeknek is maradéktalanul eleget tesz.

Lássunk akkor néhány részt Brassai *Algebra* tankönyvéből:




ALGEBRAI GYAKORLATOK.

IRTA

BRASSAI SÁMUEL

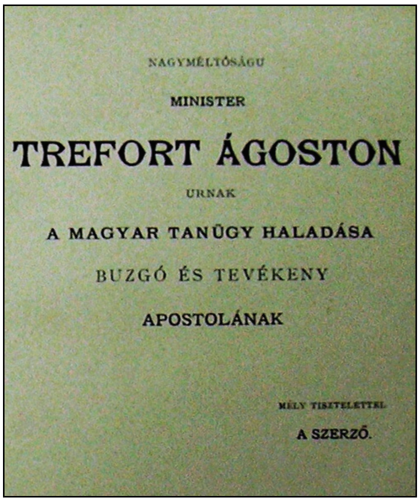
UNIVERSITATEA DIN CLUJ SEMINARUL DE MATEMATICI №3

I. RÉSZ.

ALGEBRAI KÉPLETEK, ALAKOK ÉS FOGÁSOK.

BUDAPEST, 1883.

KIADJA KÓKAI LAJOS.


NAGYMÉLTÓSÁGU

MINISTER

TREFORT ÁGOSTON

URNAK

A MAGYAR TANÜGY HALADÁSA

BUZGÓ ÉS TEVÉKENY

APOSTOLÁNAK

MÉLY TISZTELETTEL

A SZERZŐ.

„Út. IX. Ha a kérésből több egyenletet lehet szerkeszteni, mint a hány ismeretlen van benne, a feloldáskor megtörténhetik, hogy az ismeretleneknek a kellő egyenletekből számított értékei a feleslegeseket s viszont az ezekből fejtettek amazokat nem igazolják. Ilyenkor oly közép értékeket keresünk, amely minden egyenletet több-kevesebb hibával igazoljon.

Ez az eset a természettani számításokban gyakran eléfordulván, szükséges a közelítő feloldás módját megtanulni.

Út. X. Legyenek adva:

$$
\begin{aligned}
&a_1x + b_1y + c_1z + \ldots\ldots = k_1\\
&a_2x + b_2y + c_2z + \ldots\ldots = k_2\\
&a_3x + b_3y + c_3z + \ldots\ldots = k_3\\
&a_4x + b_4y + c_4z + \ldots\ldots = k_4\\
&a_5x + b_5y + c_5z + \ldots\ldots = k_5\\
&a_6x + b_6y + c_6z + \ldots\ldots = k_6\\
&\ldots.\\
&\ldots.\\
&\ldots.\\
&a_nx + b_ny + c_nz + \ldots\ldots = k_n
\end{aligned}
$$

és jelölje

$$
\begin{aligned}
&\sum a = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n\\
&\sum b = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n\\
&\sum c = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n\\
&\ldots\\
&\ldots\\
&\sum k = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n.
\end{aligned}
$$

Ekkor az x, y, z, sat. közép értékeit a következő kellő számu egyenletek fogják kiadni:

$$
\begin{aligned}
&\sum(a^2)x + \sum(ab)y + \sum(ac)z + \ldots\ldots = \sum(ak)\\
&\sum(ba)x + \sum(b^2)y + \sum(bc)z + \ldots\ldots = \sum(bk)\\
&\sum(ca)x + \sum(cb)y + \sum(c^2)z + \ldots\ldots = \sum(ck)
\end{aligned}
$$

s így tovább.

96) Számítsd ki a közép értékeket ezekből:

$\begin{cases} 1{,}1\,x + \quad 2\,y \;\; = 20 \\ 1{,}4\,y + \quad 2{,}2\,y = 26 \end{cases} \begin{cases} 1{,}2\,x + \quad 2{,}1\,y \;\; = 23 \\ 1{,}5\,y + \quad 2{,}3\,y = 27 \end{cases} \begin{cases} 1{,}3\,x + \quad 2{,}1\,y \;\; = 23{,}6 \\ 1{,}6\,y + \quad 2{,}3\,y = \; 29{,}2 \end{cases}$ „

Világos, hogy ezeket a több egyenletből álló, több ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszereket már akkor le kellett volna tárgyalni a Cramer-szabállyal, ahogy azt az elméleti fizika tanszéken tanító Réthy Mór megtette. Számunkra még megválaszolandó kérdés, hogy honnan vette Brassai azt az ötletet, hogy a lineáris egyenletrendszereknél a pontos megoldás helyett egy bizonyos megközelítéssel oldja meg. Mivel Brassai nem ismerte az egzakt megoldás algoritmusát, lehet, hogy valamilyen korabeli „természettani" könyvben olvashatta.

Idézzük fel Réthy Mór kéziratban lévő dolgozatát, melyet a MTA Könyvtár Kézirattára őriz és most forrásközleménykét bemutatjuk:

Réthy Mór kéziratban lévő dolgozata lineáris algebrából

(Véleményünk szerint ez volt Kolozsváron az első előadás lineáris algebrából)

„A determinánsok fejlődés-történetének rövid vázlata

Az újkori mathezis egyik leghatalmasabb segédeszközének a determinánsoknak felfedezése a 17-ik századba esik. E század kiváló alakja, a sokoldalú philosophus Leibniz volt az, aki a lineáris egyenlet megoldása problémája által rájuk vezettetve nagy fontosságukat felismerte és hasznukat L'Hospital francia matematikushoz intézett levelében (1693) a harmadfokú lineáris egyenlet megoldása problémáján részletesen kifejtette. (Acta Ered. 1700 p. 200). Felfedezésének fontosságát azonban annyira nem vették kortársai figyelemre, hogy még csak emléke is feledésbe ment és Cramer 1750-ben a determinánsokat újból felfedezte; indító okul ugyanaz a probléma szolgált nála is mint Leibniznél; a linearis egyenletrendszer megoldásának problémája (Introduction à l' analyse des lignes courbes algébriques, à Genéve 1750). Ő azonban csak a determinánsok definitiojáig jutott: részletes tulajdonságait nem ismerte fel. Vandermonde és Laplace voltak az elmélet tulajdonképpeni megalapítói. Az első 1771-ben bejelentette a Párizsi Akadémiának a következő évben napvilágot látott értekezésének eredményeit és módszereit. Az n-ed fokú determinánst az a mostani terminológiával élve – az egy sorbeli elemek adjungált determinánsai segélyével defineálva kifejti a szorzástétel kivételével a determinánsok mindazon alaptulajdonságait, melyeket előadásaimból láttunk volt. Laplace a Cramer által adott alapdefinitióból Vandermondetól függetlenül ugyanazon időben ugyanazon eredményekre jött: bizonyításai azonban a kellő egyszerűségek és általános érvényűség követeléseinek nem felelnek meg.

A mai simbolikus jelölést (a quadratikus schéma felállítását s a szigorú methodikusi levezetését Cauchy-nak köszönhetjük, ki az école polytechnique 17 kötetében 1812-ben a determinánsok alaptételeit levezeti a szorzási tételt is felfedezi és a lineáris egyenletek megoldására valamint más evvel kapcsolatos problémákra alkalmazza. Vele egyidőben Binet is foglalkozott a tárggyal; miként láttuk, a szorzási tételt ő is Cauchyval egyidejűleg fedezé fel.

E munkákkal a disciplina alapjai szilárdul meg voltak vetve annál inkább mert kitűnt, hogy a mathezis minden ágában kiválón alkalmazható, sőt tényleg Lagrange által a geometriában (Sur les piramides; nouvelle mein de l'Akademie de Berlin 1773) és Gauss által a számelméletben (Disqui. arithm (1801) kiterjedt mértékben alkalmaztatott is. Nincs azonban ok feltenni a tárgyat, a determinánsok elméletét amit kevésbbé teljesen kifejtették, teljesen ismerték, vagy csak fontosságát is kellően méltányolták volna. De igenis teljesen tisztában voltak avval, hogy azon speciális problémáknál, melyeket vele tárgyalták, milyen fontos a szerepük és mik a tulajdonaik. – Név szerint Lagrange „sur les piramides" munkájában a harmadfokú determináns alaptulajdonságaival és még szorzási tételével is találkozunk.

Ezentúl hátramaradt a tudományágnak nagyobb elterjedését úgyszólván népszerűséget biztosítani és a mathezis különböző problémáira való alkalmazás által minél magasabb fejlettségre emelni. Itt elsősorban Jacobi és Hesse, Cayley, Clebs, Hermite és más első rendű mathematikusok állnak és mondhatni, hogy a tárgyat a jelenkor nevezetesebb mathematikusai műveli és tovafejti.

Bevezetés

I. Probléma: Megoldandó két egyenletből álló egyenletrendszer két ismeretlennel.

$$1,\quad \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = a_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = b_3 \end{cases}$$

Az első egyenletet szorozva λ_1 a másodikat λ_2-vel és összeadva ered

2, $P_1x_1 + P_2x_2 = P_3$ *ahol*

$$P_1 = a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2$$
$$P_2 = a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2$$
$$P_3 = a_3\lambda_1 + b_3\lambda_2$$

Válasszuk meg a λ_1 és λ_2 értékeit úgy, hogy P_1=0 legyen; legegyszerűbb választás mellyel e czélt elérhetni.

λ_1=-b_1, λ_2=a_1 λ_1 és λ_2 ezen értékei mellett azután $\begin{matrix} P_2 = a_1b_2 - a_2b_1 \\ P_3 = a_1b_3 - a_3b1 \end{matrix}$ *és a 2, egyenletből lesz*

$(a_1b_2 - a_2b_1)x_2 = a_1b_3 - a_3b_1$ *honnan föltéve, hogy* $a_1b_2 \neq a_2b_1$

$$x_2 = \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ *Hasonlókép* } x_1 = \frac{a_3b_2 - a_2b_3}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

<u>Megjegyzés</u>. 1, Az x_1 és x_2 kifejezésekben a nevező közös

2. A számláló kifejezése kijő a nevezőjéből, ha a_1b_1 illetve a_2b_2 helyett tétetik a_3b_3.

Következmény.

$$a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 = 0$$
$$a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + c_2\lambda_3 = 0$$

homogén egyenletrendszer megoldása $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3$

ahol $\Delta_1 = b_1c_2 - b_2c_1;\quad \Delta_2 = c_1a_2 - c_2a_1;\quad \Delta_1 = a_1b_2 - a_2b_1$

II. Probléma: Megoldandó három egyenletből álló egyenletrendszer három ismeretlennel.

$$1,\quad \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_4 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_4 \end{cases}$$

Az egyenleteket megszorozva sorban λ_1, λ_2, λ_3-mal és összeadva ered

2, $P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 = P_4$ *ahol*

$$P_1 = a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3$$
$$P_2 = a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + c_2\lambda_3$$
$$P_3 = a_3\lambda_1 + b_3\lambda_2 + c_3\lambda_3$$
$$P_4 = a_4\lambda_1 + b_4\lambda_2 + c_4\lambda_3$$

Válasszuk meg már mostan a λ_1 λ_2 λ_3 λ_4 értékeit úgy, hogy P_1=P_2=0 legyen. Ennek elérésére az előbbi következményben foglalt tétel értelmében egyik legegyszerűbb mód, ha

$\lambda_1 = \Delta_1,\quad \lambda_2 = \Delta_2,\quad \lambda_3 = \Delta_3$ *tétetik. A λ-ák ezen értékei mellett azután*

$\begin{matrix} P_3 = a_3\Delta_1 + b_3\Delta_2 + c_3\Delta_3 \\ P_4 = a_4\Delta_1 + b_4\Delta_2 + c_4\Delta_3 \end{matrix}$ *és a 2 egyenlet ezzé lesz:* $x_3(a_3\Delta_1 + b_3\Delta_2 + c_3\Delta_3) = a_4\Delta_1 + b_4\Delta_2 + c_4\Delta_3$

honnan föltéve, hogy $a_3\Delta_1 + b_3\Delta_2 + c_3\Delta_3 \neq 0$ *ered* $x_3 = \dfrac{a_4\Delta_1 + b_4\Delta_2 + c_4\Delta_3}{a_3\Delta_1 + b_3\Delta_2 + c_4\Delta_3}$ *vagy kifejezve felírva*

$$x_3 = \frac{a_1b_2c_4 - a_1b_4c_2 + a_2b_4c_2 - a_2b_1c_4 + a_4b_1c_2 - a_4b_2c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1} \text{ *éppenúgy*}$$

$$x_2 = \frac{a_1b_4c_3 - a_1b_3c_4 + a_4b_3c_1 - a_4b_1c_3 + a_3b_2c_4 - a_3b_4c_1}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}$$

$$x_1 = \frac{a_4b_2c_3 - a_4b_3c_2 + a_2b_3c_4 - a_2b_4c_3 + a_3b_4c_2 - a_3b_2c_4}{a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1}.$$

Megjegyzés. 1., Az x_1, x_2, x_3 kifejezésekben a nevező közös.

2., A számlálók kifejezései a nevezőjéből kijönnek, ha létezik $a_1b_1c_1$ illetve $a_2b_2c_2$ illetve $a_3b_3c_3$ helyett $a_4b_4c_4$.

Következmény.

$$a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1\lambda_3 + d_1\lambda_4 = 0$$
$$a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + c_2\lambda_3 + d_2\lambda_4 = 0$$
$$a_3\lambda_1 + b_3\lambda_2 + c_3\lambda_3 + d_3\lambda_4 = 0$$

egyenletrendszer megoldása ez: $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta_4$, *ahol*

$$-\Delta_1 = b_1c_2d_3 - b_1c_3d_2 + b_2c_3d_1 - b_2c_1d_3 + b_3c_1d_2 - b_3c_2d_1$$
$$\Delta_2 = c_1d_2a_3 - c_1d_3a_2 + c_2d_3a_1 - c_2d_1a_3 + c_3d_1a_2 - c_3d_2a_1$$
$$-\Delta_3 = d_1a_2b_3 - d_1a_3b_2 + d_2a_3b_1 - d_2a_1b_3 + d_3a_1b_2 - d_3a_2b_1$$
$$\Delta_4 = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

Eddig tart Réthy Mór kéziratban lévő jegyzetéből közölt részlet.

Látható, hogy Brassai egy több egyenletből álló, több ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert intuitív módon és gyenge közelítéssel old meg, pedig akkor már ismerték a lineáris algebra alapjait.

Valószínű ez késztette Réthy Mórt, hogy írjon egy, a determinánsok elméletébe bevezető jegyzetet. Abban a jegyzetben Réthy Mór megadja a lineáris egyenletrendszerek helyes megoldását, a Cramer szabállyal.

Carl B. Boyer, *A history of mathematics*, 2nd ed. Wiley, 1968 c. könyvében azt írja, hogy Colin Maclaurin már 1730-ban megadta a szabályt a 2×2 és 3×3-as egyenletrendszerekre, és publikálta is az 1748-ban megjelent *Treatise of algebra* c. könyvében, sőt a könyvben a 4×4-es rendszerekre is kijelentette a módszert. Cramer, 1750-ben megjelent könyvének egy függelékében (melyet Réthy Mór is említ) jelentette ki az általános esetet, bizonyítás nélkül. Mivel Cramer könyve nagyon híres lett, a kevésbé ismert Maclaurin-féle könyv háttérbe szorulván, Cramer neve került forgalomba. Azonban, a legújabb felfedezések fényében mondhatjuk, hogy Maclaurin előtt már Leibniz bevezette a determinánsokat a lineáris egyenletrendszerek megoldása érdekeben[1]. Így a leghelyesebb lenne a Cramer-szabály helyett Leibniz-Maclaurin-Cramer-féle szabályról beszélni.

Lehet, hogy Réthy Mórt zavarta legjobban Brassai matematikaprofesszori tevékenysége. Noha Réthy Mór az elméleti fizikát oktatta, láthatta, tapasztalhatta, hogy hallgatói fura matematikai módszerekkel érkeznek szemináriumaira. (Természetesen ha matematikai igazságról volt szó, akkor Martin Lajos tekintélyét sem kímélte, ugyanis Martin Lajos is felsőbb matematikát tanított differenciálegyenletek nélkül.)

Réthy valószínűleg sokat szenvedett matematikusi professzortársai elmaradottsága miatt, és jelezhette a Minisztériumban is, hogyha nem akarnak a világ közvéleménye előtt nevetségessé válni, akkor ezen a helyzeten változatni kell.

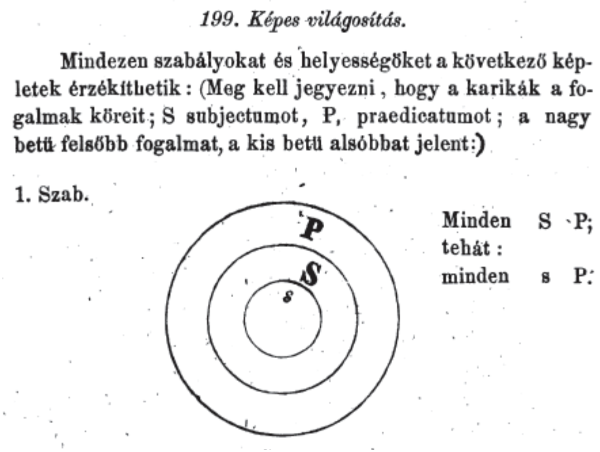
Trefort Ágoston miniszter el is határozta Brassai nyugdíjaztatását, amiért Brassai borzasztóan megsértődött. (Pedig akkor már 82 éven felül volt és meghagyták teljes professzori fizetését). Milyen szomorú, ha a tekintélyt és a külsőségeket veszik figyelembe a tudományos világban is. Sajnos az MTA csak beleesett a kelepcébe, amikor mindenféle bírálat mellőzésével közölték 1898-ban Brassai: XI. axióma „bizonyítását”. Látható, hogy ez minden, csak nem bizonyítás. Egy szép, olvasmányos logikai-filozófiai játék, amelyet ma is előszeretettel űznek a filozófusok. Az égvilágon semmi köze a tényekhez (a matematikai igazsághoz), de „szórakoztató és érthető” eszmefuttatás.

Alkotott-e valami érdemlegeset Brassai a matematikában. Szerintünk igen, egy keveset a matematikai logikában.

Szerintünk a Euler-Venn-diagramokat Brassai is felfedezte. Igazából Brassai a filozófiában és a lélektan-logikában volt otthon. Ez Brassai legerősebb oldala. Mikor megválasztották az MTA rendes tagjává, nem véletlenül tették át az MTA filozófiai osztályába a matematikai osztályból.

---

[1] E. Knobloch, Determinants, in: Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences,ed. by I.Grattan-Guinness, Routledge, vol.1, 1994, pp.766-774.



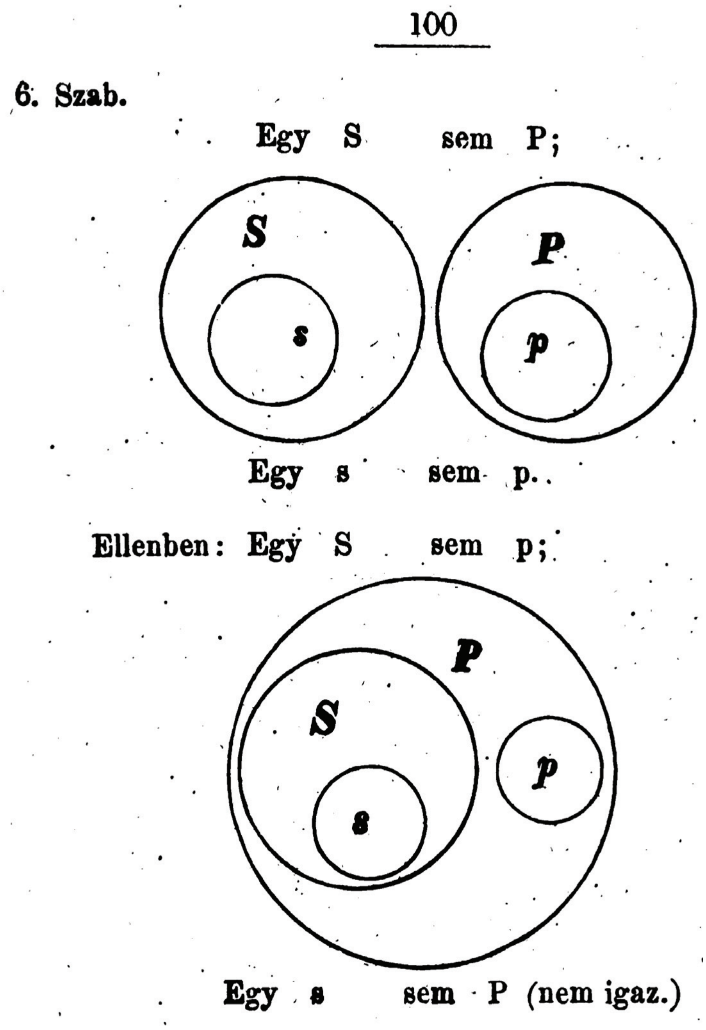
199. Képes világosítás.

Mindezen szabályokat és helyességöket a következő képletek érzékítbetik: (Meg kell jegyezni, hogy a karikák a fogalmak köreit; S subjectumot, P, praedicatumot; a nagy betű felsőbb fogalmat, a kis betű alsóbbat jelent:)

1. Szab.

Minden S P;
tehát:
minden s P.

Tulajdonképpen a szillogizmusok magyarázata, de a köröket, ha halmazoknak vesszük akkor tökéletes Euler-Venn-diagramok!



100

6. Szab.

Egy S sem P;

Egy s sem p.

Ellenben: Egy S sem p;

Egy s sem P (nem igaz.)

Ha az alábbi „szabályokat” átfogalmazzuk a halmazelmélet nyelvére, akkor

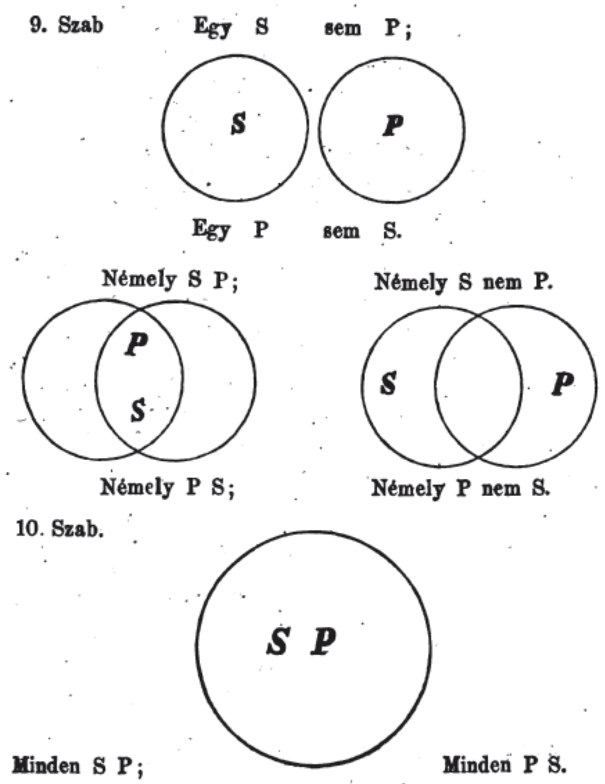
$A \cap \Phi = \Phi \cap A$

$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$, illetve ha

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ és $B \subseteq A$

Persze, az eseményalgebra nyelvén, vagy halmazelmélet nyelvén vagy a logika nyelvén is megfogalmazhatjuk, hogy A esemény bekövetkezése maga után vonja B esemény bekövetkezését, egyenértékű $A \subseteq B$, vagy $A \Rightarrow B$.

Brassai Sámuel logika könyve még ma is jól használható, néhány kisebb-nagyobb pontosítással.



Brassai halála (1897) után egy évvel (1898) az MTA Értesítője kiadta Brassai: *A XI. Axióma* c. dolgozatát amelyben Brassai „bebizonyítja” a XI. axiómát. Most térjünk rá Brassai hattyúdalára, a XI. axióma bizonyítására.

Ha ezt nem írta volna meg (vagy legalább nem közölték volna), akkor még matematikusnak is megmaradt volna! Nagy hibát követett el az Akadémia, hogy minden bírálat, szakmai lektorálás nélkül közölték. 1898-ban 4 évvel Bolyai János centenáriuma előtt! Amikor a tudós világ végre Amerikától Japánig, Londontól Rómáig egyértelműen elfogadta, hogy a nemeuklideszi geometria a XIX. sz. egyik legnagyobb matematikai alkotása. Akkor már a nemeuklideszi geometria több modelljét is ismerték. Az *Appendix*et már lefordították szinte az összes világnyelvre. Már kezdték kidolgozni a nemeuklideszi geometria modelljéit. Pontosan tudták, hogy a negatív konstans görbületű felületek belső geometriája egyenértékű a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriával. Ekkor előáll a Kolozsvári Egyetem matematikaprofesszora és bejelenti alkímiai felfedezését, hogy aranyat tud csinálni.

1872-ben már Lindemann bebizonyította a π transzcendenciáját, 1893-ban Felix Klein megírja a téma egyik monográfiáját: *Nichteuklidische Geometrie*, Paul Stäckel már a két Bolyai legnagyobb szakértője, aki több német nyelvű cikket is közölt a Bolyaikról, Réthy Mór, König Gyula, Schlesinger Lajos már több értékes dolgozatot közölt a nemeuklideszi geometria köréből.

Nézzük akkor egy kicsit konkrétabban miben áll Brassai bizonyítása:

Röviden arról van szó, hogy Brassai csak annyit tesz, hogy Euklidész 16. tételét:

„*Minden háromszögben az egyik oldal meghosszabbításakor keletkezett külső szög nagyobb mind a két szemközti belső szögnél.*” kontrapozicionálja, vagyis azt a logikai szabályt alkalmazza, hogy ha p-ből következik q, az egyenértékű azzal, hogy non q-ból következik non p. És Brassai szerint ezzel meg is oldotta ezt a kétezer éves problémát! Brassai szavai szerint: „*Ha két egyenes vonalat egy harmadik vág és megnyújtva külszögeket alkot és ez nem nagyobb az átellenes belsőnél, a két első egyenes vonal nem találkozik egymással és így a parallelizmus értelmezése szerint az a két vonal parallel.*” Brassai a szöget szegletnek nevezi. Brassai még bevezeti a kétszöget! Kétszög [kétszeg, (diagonon, diangulum)] is értelmetlen az euklideszi geometriában. Kétszög az vagy egy közönséges szög, vagy két párhuzamos egyenes. Ilyen formán Brassai a külső szög tételének a kontrapozíciójával nem kap új ismeretet.

A külső szög tétele az egy abszolút geometriai tétel, tehát nyilván nincs igaza Brassainak (egy ilyen abszolút geometriai bizonyítás megvan a második szerző: *Geometriai egyenlőtlenségek* c. könyvének 9. oldalán, de az olvasó több részletet is találhat Kerékjártó Béla *Les fondements de la géométrie* nevezetes könyvének 119. oldalán).

A külső szög tétele nem ekvivalens a XI. axiómával, hiszen független tőle!

Brassai mint matematikaprofesszor teljesen tisztában kellett volna legyen azzal, hogy matematikai fogalmakat és tételeket nem lehet filozófiailag bebizonyítani (még odáig is elmerészkedik, hogy Gausst félnótás öregembernek gondolja, akinek hallucinációi vannak). Ezek után nehezen tekinthetünk Brassaira úgy, mint korának jól képzett matematikusára. Tény, hogy a MTA megbízásából 1865-ben Brassai magyarra fordította Euklidész *Elemei*t. Talán ez a legnagyobb matematikaprofesszori érdeme. Sajnos, a fordítás nyelvezete már akkor maradi volt, így az 1900-as évek elején Baumgartner Alajos (1865–1930) újra magyarra fordítja az *Elemek* első hat könyvét. A magyar matematikusok ma Mayer Gyula 1983-as fordítását használják.

IRODALOM

Brassai Sámuel: A XI. axióma., Akadémiai Értesítő, 9. 1898, pp. 415-427.

Brassai Sámuel: Algebrai gyakorlatok, I. rész Algebrai képletek, alakok és fogások. Budapest, 1883., Kiadja Kókai Lajos.

Brassai Sámuel: Logika, lélektani alapon fejtegetve, Pest 1858, Ehnich Gusztáv könyvnyomdája.

Brassai Sámuel: Számító Socrates. Fejbeli számvetés, gyakorlati kérdésekben. Angol mintára, hazai tárgyakhoz és viszonyokhoz alkalmazva. Kolozsvár, 1843.

Euklides Elemei XV könyv. Fordította **Brassai Sámuel**, M. Tud. Akadémia R. Tag. Kiadta A Magyar Tudományos Akadémia., Pest, Eggenberger Ferdinánd Magy. Akad. Könyvárusnál, 1865.

Euklidész: Elemek, első 6 könyv, fordította: **Baumgartner Alajos**, Középisolai Matematikai Lapok, 1903-1905.

Euklidész: Elemek, fordította és jegyzetekkel ellátta: **Mayer Gyula**, Gondolat Kiadó, 1983.

Brassai Sámuel emlékezete, Összeállította: **Gazda István**, Tájak-Korok-Múzeumok Egyesület, Budapest, 1997.

Kerékjártó Béla: Les fondements de la géométrie (tome premier), Akad. Kiadó, Budapest, 1955.

Knobloch, E.: Determinants, in: Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences,ed. by I.Grattan-Guinness, Routledge, vol.1, 1994.

Oláh-Gál Róbert: Réthy Mór (1846-1925) Erdélyben a modern felsőfokú matematikai oktatás és kutatások elindítója., Természet Világa, 2010. február. (141. évf. 2. sz.) pp.78-80.

Oláhné Erdélyi Mária: Brassai Sámuel a matematikai műveltségért (1978), Pedagógiai Szemle, 1978. pp.68-69.

Sándor József: Geometriai egyenlőtlenségek, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1988.

Szénássy Barna: A magyarországi matematika története a 20. század elejéig. Polygon , Szegedi Egyetemi Kiadó, 2008.

Vályi Gyula: Brassai a mathematikus, Kolozsvár, 1890. május 24.

Brassai Sámuel: A XI. axioma (Akad. Ért. IX. köt. 146.) c. dolgozatának újraközlése

A XI. axioma.
(néhai Brassai Sámuel tt. hátrahagyott értekezése.[2])
Carmina non prius audita.

1 §. Személyességek[3].

2 §.

Egy rossz hírbe hozott elméletet szándékozom nem rehabilitálni, mert erre nincs szüksége, miután egyikét a tőle származó, vagy vele kapcsolatos állítmányoknak, a melyek a tiszta és alkalmazó mathesisben mindennapi szolgálatot tesznek, senki kétségbe nem vonta, hanem, hogy neki a kellő tisztességet megadjam, s a mennyire tőlem kitelik, másokat is reávegyek, hogy velem kezet fogjanak. A parallelák elmélete az, a melyre nézve már régóta keletkezett az a – még eddig el nem hárított – vád, hogy főelve nincs megbizonyítva s nem is lehet megbizonyítani, jóllehet egy kis könyvtárt tesznek a kisértmények gyűjteményei, a melyek e végett írattak.

[2] A M. Tud. Akadémia 1898. február 21-én tartott összes ülésén bemutatván néhai Brassai Sámuel tt. hátrahagyott kézirata „A XI. axiomáról", – határoztatott, hogy „e dolgozat hálás kegyelettel s a szabályszerű bírálat mellőzésével, minden változtatás vagy helyesbítés nélkül, közzé fog tétetni". (Akad. Ért. IX. köt. 146.)

[3] Ebben a részben Brassai személyes véleményét mondja el, hogy miért lett az MTA Filozófiai Osztályának rendes tagja. (OGR megjegyzése).

Ezt az elvet egy tétel fejezi ki, a mely Euklides elemei korábbi kiadásában a XI. axioma, az újabb és tökélyesebbikben az „5-dik postulatum” czímet viseli és következőkép van szerkesztve:

„*Hogy ha két egyenes vonalat úgy vág keresztül egy egyenes vonal, hogy az azon egyfelőli belső szegleteket két deréknél kisebbé teszi, a két egyenes vonal határtalanul kinyújtva összeérjen affelé, melyről a két deréknél kisebb szegletek vannak*”.

Világos ebben a tételben két charakteristika, ú. m. egyfelől bizonyos szegletek, másfelől két egyenes vonal convergentiája van összeállítva, mintha azok egymástól függenének. De éppen ez a függés nincs semmiképpen kimutatva. És ezt a kimutatást keresték a geometrák oly számosan, hogy kiadott munkáikból – mint fölebb mondám – könyvtár telnék. De bizonyos az is, hogy egyikök sem ért czélt és a XI. axióma mind a mai napig bebizonyítatlan és bebizonyíthatatlannak tartatik.

Mindezek ellenére nem aludt ki bennem a remény, hogy azt a magában nem evidens igazságot valamelyik másból dedukálni lehetne és ez a gondolat január havában – egy álmatlan éjszakán – eszembe ötölvén, tovább űztem-fűztem s hiszem, hogy meg is leltem az Elemekben egy theoremát, mely a siker kilátásával kecsegtetett. Hogy megcsalt-e, vagy nem csalt, az a reményem, hogy a parallelák theoriája kulcsát benne leltem meg, az alternatíva fogja eldönteni, hogy gondolatmenetemet vagy tökélyes beleegyezés, vagy homerosi kaczaj fogja követni.

Az Elemek I. könyve XVI. propositiója volt az, a mely így hangzik: „*Minden háromszegnek, ha egy oldala megnyújtatik, a külső szöglet az átelleni belsők akármelyikénél nagyobb*”. Ehhez a Major propositióhoz nem kerestem Minort, természetesen nem is volt jogom hozzá, de igenis volt az úgynevezett conversió per accidens próbája alá vetni.

A theorema állító egyetemes (universalis affirmativa) lévén, két módon lehet megfordítani, azaz subjectumát a praedicatumával felcserélni úgy, hogy az a convertált ítélet szintoly igaz legyen, mint az eredeti.

Az első mód: Conversio per accidens. Midőn az eredeti praedikatum subjectummá, a subjectumot praedicatummá, a volt „A” ítéletet „J”-vé tesszük. Ez a mód partikuláris ítéletet szülvén, világos, hogy nem vettük hasznát.

A második mód: Contrapositio, mely azt rendeli, hogy az ítéletet fordítsuk meg és mind magát az ítéletet, mind ennek subjectumát tegyük negatívvá. Pl. „Minden madár tollas állat”, Contrapositio: Egy nem tollas állat sem madár”.

Más példa: „A diagonális vonal az egyenközényt kettévágja”. Contrapositio: „A mely vonal az egyenközényt nem vágja ketté, nem diagonális”.

Alkalmazzuk a mi tárgyunkra. A contraponálandó tétel: „a háromszeg külső szeglete nagyobb az ellentétes belsőnél”.

Minthogy a contrapositioban éppen az jő kérdésbe, a minek a külső szegletéről van szó, az eredeti subjectumot nem vehetvén alapúl, hanem csak a génusát, ú. m. a planimetriai alakot, a melyből a szóba vett külszeglet származik, a mégis törzsalaknak nevezett contrapositió tehát ez lesz:

„Ha egy planimetriai törzsalak oldala megnyújtásából származó külszeglet nem nagyobb az ellentett belsőnél, a törzsalak nem háromszeg”.

De erre alighanem csóválják a fejöket és mondhatjátok s mondják is: Hisz ez egy üres negatio, melynek nincs semmi realis értelme, annál kevésbbé alkalmazhatósága. A nem háromszeg a világon minden lehet, ha kell még „libasült” is.

A parallelák elméletében egy hajszányit sem haladtunk. Ez ugyan formális és számba veendő objectió, de nem áthághatatlan avagy áttörhetlen barricade; a feladat t.i. az, hogy felfedezzük, mint positív fogalom rejlik az alatt a negatív ítélet alatt: hogy „A” nem „B”. Vizsgáljuk közelebb. Elsőben is az igaz, hogy a nem B praedicatum ítéletek száma töménytelen és felsorolásuk nem minapokat, hanem esztendőket vehetne igénybe. Erre hát senki sem vállakoznék. De ezt pedig modus in rebus – a mint régebben szokták mondani – most pedig: „modus vivendi” és a logikának az az eljárása, a melyet classificatiónak neveznek, a mely arra utasít, hogy a „B” helyett ennek egy felsőbb fogalmával nevezhetjük el és most már csak az ítéletet A, B, minden létező alkalmazásásban kell kikeresnünk, a mi pedig rendesen megbírható feladat. Lássunk egy mindennapi példát:

Valaki, a ki csak a salvia officinalist (kerti zsályát) ismerné, egy salvia sclarea példányát kapja kezébe, a miről hát csak annyit állíthat, hogy az nem salvia officinalis. Nota bene most már tehát csak abban kell járnia, hogy a nem officinalis salviák lajstromát a kezébe vegye, a melyet pedig megkap egy teljes flórában pl. De Candolle prodromusában vagy Kew Gardené-ban. Az itt felsorolt növényfajok között, diagnosisánál fogva, megleli a salviát, mint „sclariát” és a naegatív ítélet: - ez a növény nem salvia officinalis”, positivvá: Ez a növény „salvia sclareá”-vá válik.

Ezzel az egyszerű és tökélyesen biztos móddal jutottak a természettudósok a naturális historia-beli sok százezer fajok ismeretéhez és meghatározásához. Annak ellenére, hogy maga a faj fogalom mind a mai napig sincs meghatározva.

Nem késtem ezt a feddhetetlen eljárást követni és a contrapositióban „háromszeg" helyett a proximum génusát: „planimetriai három egyenes oldalú alak"-ot venni fel, miszerint a XVI. propositiót így contraponáljuk: „Ha a planimetriai három oldalú alak egyik oldala megnyújtásával származó külszeglet nem nagyobb az ellentett belsőnél, a törzsalak nem az a fajta a háromoldaláknak, a melyet háromszegnek neveznek!" Mi hát?

A „nem háromszeg" szószerinti legszélesebb értelemben tehát az, hogy A tuskó, kova, koldusbot, hold, Sirius. Ámde ily esetben épeszű ember ítéletet nem mond, tehát tagadni sem kell. De hogy ne is mondhasson, azzal vesszük elejét, hogy A-nak a génusát tesszük subjectumnak és contrapositiónak ezt a kifejezést kapja:

„Három egyenes vonalból a lapon alkotott alak, ha a külszeglet nem nagyobb az ellentett belsőnél, a törzsalak nem háromszeg". Ezzel azonban eddigelé nem nyertünk semmit, sőt csak-nem kárt tettünk magunknak. Mert ha módosított contrapositiónkba a három egyenes oldalú figurát – a miben semmi sem gátol – teszszük, ím így: „A háromszeg egy oldalát megnyújtva, ha a külső szeglet nem nagyobb a belső ellentettnél, a háromszeg nem háromszeg, két ellentmondásba keveredtünk. Elsőbben a tényállással, mert az a feltevés, hogy a háromszeg külszeglete ne legyen nagyobb a belsőnél, a XVI. propositio szerint lehetetlen és az, hogy a háromszeg „nem háromszeg" formaliter hamis!

És mikép jöttünk ebbe a bajba? Mivel nem fontoltuk meg, hogy A-ra igen bő palástot adtunk. Mert: három egyenes oldalú figura három és csak három ú.m. háromszeg, kétszeg és három egyközű egyenes vonal lehet és közülük csak a kétszeg felel meg a kívánalomnak s a contrapositió igazságának. „Egy háromoldalú planimetriai alak egyik oldala megnyújtásából származó külső szeglet, ha nem nagyobb, mint az átelleni belső, a törzsalak nem háromszeg."

A megfordításkor nem lehet csupán csak „külső szegletet" írni, mert ez bővebb fogalom volna, mint az, a mely a megfordított ítéletben leledzik.

Most már jobban értesülve, alkalmazzuk a tanulságot jelen feladatunkra. Világos, hogy a „nem háromszeg" sem libasültet, sem Siriust, hanem háromszeggel rokon planimetriai alakot teszen, a mely az előzmények szerint három egyenes vonalból van alkotva. Ilyen alak csupán csak három van és lehet.

Első a háromszeg (triangulum), a melynek oldalai három combinatiója, ab, ac, bc, találkoznak, illetőleg vágják egymást. Második a kétszeg, (diagonon, diangulum) a mely nincs felvéve a mathesis glossologiájába, pedig a mint jelen tárgyalásom sejteti, okvetlenül szükségünk volna és van reá, helyessége felöl pedig a legparányibb kétség sem foroghat fenn. Ebben a két pár oldal *ab* és *ac* találkozik, a harmadik *(bc)* nem találkozik, a mi világos és meghatározott különbség. Harmadik alakot, ha annak – vagy figurának – mondhatom, három egymással nem találkozó vonal értelmezésével lehet ismertetni.

Ezek közül már a szóban forgó "nem háromszeg" csak a második alakot, a "kétszeg"-et jelentheti és jelenti.

Most már a műszókat felcserélve, a fennebbi contraposítiót így szerkeszthetjük: Ha két egyenes vonalat egy harmadik vág és megnyújtva külszegletet alkot és ez nem nagyobb az átelleni belsőnél, a két első egyenes vonal nem találkozik egymással és így a parallelismus egyszerű értelmezése szerint az a két vonal parallel.

De ezzel még nincsen egészen vége vizsgálatunknak.

A XVI. követő propositió az "Elemek"'-ben ugyanis így hangzik: "*Minden* háromszegnek két szeglete, akárhogy is véve, kisebb két deréknél".

Ha ezt a tételt a XVI. propositiónál szükségnek talált módosításokkal contraponáljuk, a következő állításra jutunk: Ha egy planimetriai háromoldalú figurának egyik oldala megnyújtásával külszegletet alkotunk és a külszeglet nem nagyobb két deréknél, a keletkező figura kétszeg, a melynek két oldala nem találkozhatik és ennélfogva parallel két egyenes vonal.

Minthogy már a kétszeg két oldalának parallelismusa a kétszeg fogalmának elválhatatlan charakteristikája, a contrapositio, parallel két vonaltól és egy vágó egyenes vonaltól alkotott kül szeglet és a parallel vonalok között határozott és másolhatatlan viszonyt fejez ki és ez a viszony egyik esetben éppen az, a mi a másikban, t. i. hogy a parallel vonalakat vágó egyenes vonal és a két belső szeglet összegének fele egyenlők, nota bene ezt, mint egyszerű algebrai feladatot, részletesen kimutatni t. hallgatóimra nézve feleslegesnek tartok.

Minthogy már a parallelák elméletében állított vagy gyanított bizonytalanság csupán csak a XI. axióma hibás szerkesztésében rejlik és a két feddhetetlen contrapositlóval merőben el van enyésztetve, az ennek következtében származott idétlen szülöttnek, a nem-euklidesi geometriának is el kell enyésznie.

Igaz, hogy a nem-euklides-féle geometria pártolói elfogultságukat nagy nevekkel támogatják, hogy a többit elhallgassam a Gausséval, a ki egész haláláig a világ legelső mathematikusának maradt, de én arra a hivatkozásra nem sokat adok, mert az igaz, hogy Gauss érdeklődött az eszme iránt, annyira, hogy hallván az értekezésnek egy muszka újságban való megjelenését, ő maga, hogy elolvashassa 80 esztendős korában, az előtte egészen idegen orosz nyelv megtanulására vállalkozott. De, hogy aztán, hogy volt megelégedve azzal, a mit olvasott és hogy elfogadta-e az abszoluta geometria eszméjét, arról semmi biztos nyilatkozatát nem tudjuk.

Én abban a tájban Göttingenben járván, tudakozódtam iránta, de egy hideg és közönyös feleletet kaptam, a melyből nem lehetett kivenni, hogy megnyerte volna helybenhagyását a „Lobacsewszky" érvelése. Ha megnyerte volna, én biz azt csak a hallucinatio egy nemének tartanám és mentségére IV. Henrik franczia király jut eszembe, a kit egy idegen ország követe, a mint a terembe véletlenül belépett, négykézláb mászkálva és kis fiát a hátán lovagoltatva lelte. A király nem jött zavarba, hanem rögtön azt kérdezte a belépőtől: Apa-e? A mire igenlő feleletet kapván, a termet még egyszer megkerülte kedves lovagjával s aztán lábra állva kezdett beszélgetni követjével az ország dolgairól. Gauss is azt kérdezhette volna elfogultságában vendégétől: Hát kegyednek nem voltak soha igaznak vélt téves eszméi vagy hallucinatiói?

És nem éppen lehetetlen, hogy t. hallgatóim is annak nézik az én parallelás theoremáimat. Ámbár – mint említettem – a parallelák elmélete felett lebegő homály a geometria tudományos alkalmazásában soha semmi kétséget sem okozott, azonban én Caesárral tartok, a ki rossz hírbe – bár ártatlanul – keveredett nejét repudiálván, így nyilatkozott, hogy egy Caesar nejének reputatiójához gyanú sem közeledhetik. Így a Mathesis világosságát még ködnek sem szabad fenyegetni, azért törekedtem arra, hogy ezt eloszlassam. És most, midőn azt hiszem, hogy törekvésem sikerült, bízvást kimondom, hogy az a sok főtörésbe került dolog, melyet annak neveznek, csak elmefuttatás.

Most már rekapituláljuk és hadd mutassam ki rendben, mi az, a mit magam felfedezésének tartok és minélfogva állításaim elismerését nem egy vagy más egyéntől, egy vagy más társulattól, hanem az igazság minden szeretőjétől postulálom.

A XVI. és XVII. propositió contraposotióját tudtommal rajtam kívül senki sem kísértette meg; már pedig ez vezetett egészen legitimus úton a háromszeg negatív ítéletéről a „nem háromszeg" s az alatta rejlő positiv „kétszeg" (diagonom, diangulum, Zweieck) eszméjére, a mi ugyan a XI. axiómában és a XVII. propositióban használtatik, de – mint fogalom – megkülönböztetve, sem megnevezve nincsen, a mit pedig következetesnek és szükségesnek tartok.

A „kétszeg" egyetlen egy charakteristikája (specifica differentia) a harmadik pár oldal nem találkozása; a két fogalom szoros és elválhatatlan lévén, az egyikről a másikra következtethetni és elvitázhatatlan, és így a külszeglet és parallelismus közti viszony a legtökélyesebb bizonyossággal van megállapítva.

Ez hiányzott a XI. axiómához és ez a hiány ki lévén pótolva, egy "nem-euklidesi" geometriának még csak ürügye is elenyészik és Bólyai János és Lobacsevszky éles elméjű tudós dolgozatai – mint fennebb mondám – a tudományos elmefuttatások kategóriája alá esnek.

Ennek következtében az „Elemek" kezdő részében a következő tételeket és megfontolni valókat szeretném beiktattatni: a) Egyenes vonal az mely mindig és állandóan egy irányban marad. Ez — azt gondolom — szabatosabb és érthetőbb értelmezés, mint az eredeti, melyet latinul úgy adnak: „Recta linea est quaccunque ex aeqno punctis in ea sitis iacel", Hiszen ha egy vonalzónak a helyességét és megbízhatóságát meg akarjuk próbálni, egy vonalat húzunk vele és ekkor a vonalzót megfordítva az első vonal fölibe egy másikat vonunk. Ezáltal az egyik vonalnak netalán alább sülyedő részei a másodikban felfelé domborodnak. És így a két vonal nem congruálhat, de ha a vonalzó a lehetőségig tökélyei, úgy congruálni fog.

Az értelmezést így is fogalmazhatni: b) Egyenes vonal az, a melynek bizonyos része, a vonalnak bármely más egyenlő hosszúságú részeivel congruál.

Egy egyenes vonal irányát vagyis helyzetét a lapon lévő rajza mutatja ki és határozza meg. De itt előre meg kell fontolnunk a következőket: „Más irány", „más vonal", „más helyzet" nagyobbrészt egymást helyettesíthető kifejezések.

De különbözik pl. „más-más irányú két vonal" „és egy vonal más-más irányban".

Az előbbi minden hozzáadás nélkül érthető és világos, de a második csak úgy lesz azzá, ha a haladás fogalmát is hozzácsatoljuk. De a rajz csak a haladással megtett utat képzeltetheti, magát a haladást éppen nem. Ezt hát csak beszéd teheti, a mire már az I. könyv 1-ső propositiójában szüksége van Euklidesnek.

Most már a dologra: c) Két egyenes vonal a helyzetére nézve két viszonyban állhat egymással. T. i. vagy van közös pontjuk, vagy nincs közös pontjuk. Ha van akkor, ha szükség megnyújtva találkoznak vagyis egymást vágják, vagy keresztezik, vagy metszik. Ez estben a két vonal két ága, két ágának a közös ponttól egyenlő távolságra fekvő pontjai, egyik felől szüntelen közelednek, a másik felől szüntelen távolodnak egymástól. Az első esetben a vonalok összetartanak (convergálnak), a másodikban széttartanak (divergálnak). De a középponton innen és túl eső hely egymással felcserélhető, pl.

Azon egy pár egyenes vonalat egyszerre convergensnek és divergensnek mondhatjuk. Csak az olyan convergenseket vagy divergenseket lehet szabatosan valamelyiköknek mondani, a melyek a közös ponton túl nem érnek.

Az Euklides-féle bevezetés némi módosításai: Értelmezések:

II. Az egyenes vonal szélesség nélküli hossz.

IV. Egyenes vonal az, a melynek minden része, akármely más egyenlő hosszú részét fedi (congruál vele).

IVa. Az egyenes vonalnak két jellemvonása van: egyik a hosszúság, a melyen nincs mit magyarázni; a második az irány a mely állandó és változatlan.

Minden egyenes vonalnak csak egy és saját iránya van, de lehet más is, és mindnyájok képét viseli az az egyenes vonal, a mely egy pontja körül egyet fordul, míg eredeti helyzetébe visszatér.

Két egyenes vonalnak van, vagy nincs közös pontja. Az első esetben a két egyenes vonal, ha szükséges megnyújtva keresztezi egymást és a keresztezési ponton innen összetart (convergunt); a közös ponton túl széttart (divergunt). De e megkülönböztetést a szükség szerint felcserélhetni. Ha pedig nincs közös pontjuk, az egyenes vonalak párhuzamosnak (parellelae) neveztetnek.

Euklidesnek az egyenes vonalat ismertető értelmezései:

Értelmezés.

1. Vonal szélesség nélküli hossz.

4. Egyenes vonal az, mely pontjaival egyenesben fekszik.

6. A terj végszélei vonalok.

8. Lapos szeglet a lapon egymást érő két vonal egymáshoz dölése.

9. Midőn a szegletet befoglaló egyenesek, a szeglet egyenes vonalúnak hivatik.

10. Midőn pedig egy egyenes más egyenesre állítva a szomszéd szegleteket egymással egyenlőkké teszi, az egyenlő szegletek mindenike derékszeglet és az állított vonal függőnek mondatik arra, a melyikre állítva van.

13. A határ, valaminek végszéle.

14. Képlet, a mi egy vagy több határtól körül van fogva.

10. A félkör középpontja ugyanaz, mely a köré.

23. Sokoldalúak a több mint négy vonaltól befogottak.

Kívánatok.

2. És egy határozott egyenest folyvást egyenesben megnyújthatni

4. És hogy minden derékszeglet egyenlő legyen.

6. És hogyha két egyenest úgy vág keresztül egy egyenes, hogy az azon egyfelöli belső szegeteket két deréknél kisebbé teszi, a két egyenes határtalanul kinyújtva összeérjen affelé, melyről a két deréknél kisebb szegletek vannak. Ezek az egyszeri, de praegnans elvek, a melyeket az „Elemek" szerkesztői, mert piécise és részletes adataink a szóban forgó munka litteraria históriájáról nincsenek, az utánuk következő nemzedékeknek idő folytán átadattak és a melyek módokat sugaltak az Archytasoknak, Archimedeseknek, Euklideseknek, Apolloniusoknnk, Aristarchusoknak és végre Ptolomacusoknak a mechanika és astronomia legmélyebb és legbizonyosabb – mert soha változást nem szenvedett – igazságai felfedezésére.

De már próbáljunk arra felelni, honnan veszik a tiszta mathesis tételei az ő saját nemüeknek ismert és vallott bizonyosságuk reputatióját? Mert előbb sok metaphysikai tentát pazaroltak el. Követett elveiket bármely rövidséggel is idézni egy ily fórum előtt szükségtelennek tartom; annál is inkább, mivel e tekintetben én más úton járok, mint ők. Én ugyanis a mathematikal igazságokat – hogy úgy mondjam — az életnek többi igazságaitól megkülönböztetve, különb nemüeknek nem tartom. Szerintem az igazság a tény képét viselő állítással való megegyezésében áll. No már ezt a megegyezést elérni a mathesis igazságaiban sokkal, sőt hasonlíthatatlanul könnyebb, mint akár a közélet akár a philosophia igazságaiban; még pedig három okból. Elsőbben mindnyájan ellenmondástalanok. Másodszor ellenmondástalanok a mi — zárójel közt mondva —- már magában elég bizonyosság arra, hogy a „nem-euklides”-féle geometria tételét a mathematikai igazságok sorába emelni ne méltassuk. Harmadik és legutolsó motívum a mathematikai igazságok körülményessége és minden – bár legparányibb – kétség kirekesztésére a teljes érdektelenség.

Nincs az a fösvény, az a kapzsi, az a telhetetlen ember, a ki vitatkozásaiban bármily fedetten vagy homályosan arra vagy olyan félére hívatkoznék, hogy kétszer kettő: öt; vagy hétnek fele: három. Ámbár mint tényt nem egyszer hajlandó volna elhitetni, mind ellenfelével, mind vitatkozó társával. Nem a netalán tárgyias különbség, hanem az eljárás azonossága adja meg az eredmény egyenlőségét.

Ha „a”-hoz, meg „b”-hez „c”-t, ragasztunk azon egy cselekvényt hajtottuk véghez és így az eredménynek is azon egynek kell lenni; azaz „a”-annyival gyarapodott, mint „b”; ha „a” vonalat akkorával nyújtottuk meg, a mekkorával „b” vonalat a nyújtás minden esetben azonos; ha „a” súly, „a+b”, „a+c” is „b”-vel nehezedtek a nehezedés azonos, a mit a tudomány nyelve az aequalitas symbolumával, t.i. = jelképével írunk le. Minden mathematikai műveletben, bármily egyszerű, vagy bonyolódott legyen, az eljárás csakis azonos és eredménye a ”c” minőségétől teljesen független, holott ez a concret fogalmakkal való míveletekben csak esetlegesen vagy kivételesen történik meg.

Szóval a mathematikai tételek bizonyossága vagy bizonytalansága pusztán formális és nem kell sem physikai, sem metaphysikai sajátságot keresni benne. Ezáltal töménytelen előítéleti tévedésektől meneksziink életben és tudományban.

Ezt bizonyítanom – mert önként értetődőnek hiszem – nem tartom tovább szükségesnek és így értekezésemet – habár tökélytelenül is – ezennel átadom az Akadémia mélyen tisztelt elnökének.