

A vetőstatistika és a fraktálgeometria kapcsolata

Relation between fault statistics and fractal geometry

UNGER ZOLTÁN

Magyar Állami Földtani Intézet, 1143 Budapest, Stefánia út 14.

Tárgyszavak: szeizmikus mérés, vetők és töredezettség, vetőstatistika, fraktálgeometria

Összefoglalás

Kutatásaim indító oka az ismert vetőstatistikai számítások és fraktálgeometriai elemek összekapcsolása volt. Az eredmény alapján ebben a cikkben bemutatom, hogy a két említett megközelítés milyen ponton kapcsolódik egymáshoz, és ez milyen jelentőséggel bír. Ezt az összefüggést egy szénhidrogén-kutatási területen szemléltetem.

Key words: seismic measurements, faults and fractures, fault statistics, fractal geometry

Abstract

One of the launching factors to commence the research activity below was the linking of fault-statistics calculations and elements of the fractal geometry. Due to the results the relationship was proven and their importance was illustrated on a hydrocarbon field case study.

Bevezetés

A tudományos megismerés soha véget nem érő folyamatában a káosz és ezen belül a fraktálok megjelenése új szemléletet hozott. A klasszikus fizikai megismerés a rendszereket többnyire statikus oldalukról közelíti meg, és ezek alapján próbálja megérteni, becsülni a jelenségek zömét alkotó dinamikus rendszereket is. Ebben hozott újat, forradalmat a fraktálok és a káoszelméletek megjelenése. Az új szemlélet legszenvédélyesebb szószólói szerint a káoszt (így a fraktálokat is) a múlt század fizikájában mérföldkőnek tekintik a relativitáselmélet és a kvantummechanika mellett.

Korábban a tudomány peremének számító, elismerésre váró szemlélet mára kivívta létjogosultságát, és megállapítható, hogy számtalan szakterületen alkalmazzák felfedezéseit és módszereit. Összehasonlítva a hagyományos és dinamikus rendszerek szemléletét, a következő párhuzamok figyelhetők meg:

A hagyományos szemléletben:

— az egyszerű rendszerek egyszerűen viselkednek,
— a komplex viselkedés komplex okokra vezethető vissza.

A dinamikus rendszerek szemléletében:

— az egyszerű rendszerek komplex módon is viselkedhetnek,
— a komplex rendszerek viselkedése egyszerű okokra is visszavezethető.

Hasonló komplex tulajdonságot vélek felfedezni a vizsgálatom tárgyát képező kőzetek esetében is. Ezért vizsgálatom célja az volt, hogy a tektonikai erők által felszabdalt kőzettömbök feldaraboltságát, ennek törvényszerűségeit nyomozzam, nem a klasszikus hagyományos módszerekkel, hanem egy új, eddig kevésbé ismert, alkalmazott módszerrel a vetők fraktál-geometriai tulajdonságának felismerésével. Ez alapján kapcsolatot kerestem a vetőstatistikai paraméterek és a fraktálgeometria elemei között.

Fraktálgeometriai alapok

Habár a magyar fraktál címszót először az 1992-ben megjelent Cambridge Enciklopédia (CRYSTAL 1992) említi, Mandelbrot már 1968-ban kiadta a fraktálok bibliájának nevezett könyvét, ahol már használja a fraktál elnevezést (MANDELBROT 1968). Mandelbrot nevezte el a tört dimenziójú alakzatokat fraktálnak a latin *fractus* = *tört* szó alapján.

A fraktálokat elvileg már az ókorban is felfedezhették volna, mivel az előállító képlet nagyon egyszerű. Viszont a fraktálok vizuális előállításához több milliárd hatványozásra és összeadásra van szükség, amit csak számítógép képes elvégezni.

GLEICK (1999) azt állítja, hogy „a káosz — és ezen belül a fraktál — ott kezdődik, ahol a klasszikus tudomány véget ér”. A XX. század végén kialakult új tudományág, amely már a következő XXI. század felé mutat, túllép a statikus rendszerek tanulmányozásán és a dinamikus rendszerek felé irányítja a tudósok figyelmét.

A fraktálokról (és a káoszról) mára már egyre több magyarnyelvű könyv, cikk jelenik meg. De lássuk mik is azok a fraktálok!

Fraktálgeometriai bevezetőként, PEITGEN et al. (1993, pp 30–91.) nyomán, vegyünk egy egységnyi hosszúságú szakaszt, amelyet harmadolunk, és a középső részét elhagyjuk (1. ábra).

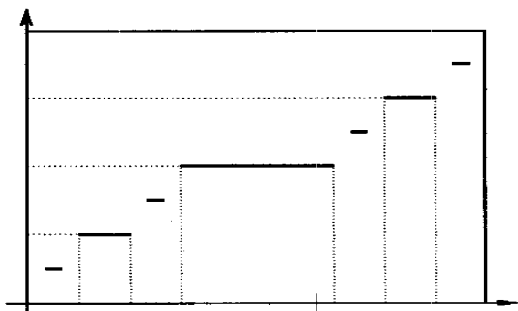


1. ábra. Cantor-halmaz (PEITGEN et al. 1993)

Figure 1. The Cantor set (PEITGEN et al. 1993)

A további lépésekben mindig a maradék szakaszok középső harmadát hagyjuk el; a végtelen sok lépés után megmaradt ponthalmazt nevezik Cantor-halmaznak, ami a legegyszerűbb egydimenziós fraktál.

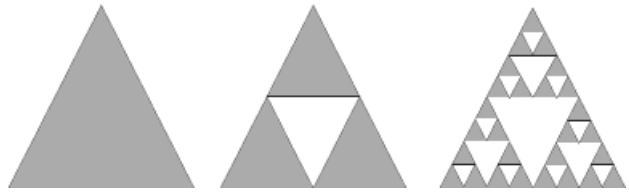
Ha az elhagyott szakaszokat függvényként értelmezzük a $[0,1]$ intervallumon, és egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk, az ún. „ördögi lépcsőt” kapjuk (2. ábra). Ez az előbbi Cantor-halmaz „negatívja” egy szemléletes ábrázolásban.



2. ábra. Ördögi lépcső (SZABÓ 1997)

Figure 2. Devil staircase (SZABÓ 1997)

Ha már síkban értelmeztük az ördögi lépcsőt, lássuk a Cantor-halmaz kétdimenziós megfelelőjét, a Sierpinsky által megalkotott háromszöget (3. ábra).

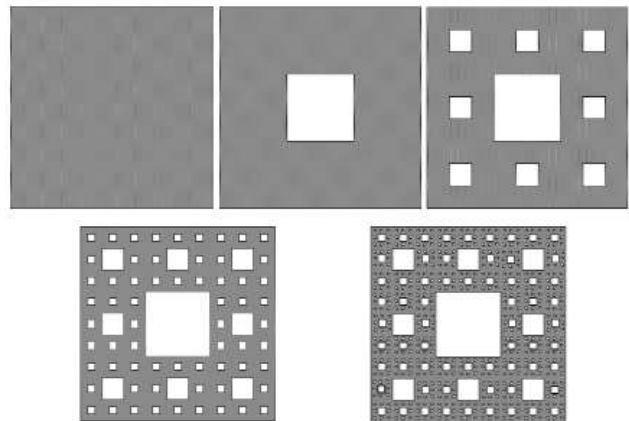


3. ábra. Sierpinsky-háromszög (KORVIN 1992)

Figure 3. Sierpinsky gasket triangle (KORVIN 1992)

Egy háromszög oldalait megfelezzük, és a középvonal mentén kialakult négy háromszögből a középsőt elhagyjuk. Megismételjük ezt a maradék három háromszöggel, majd folytatva a felosztást, az ábrán látható, egymásba ágyazott, lyukacsos háromszögegyüttest kapjuk.

Ezt a műveletsort egy 3 egységnyi oldalú négyzettel is megismételjük, így jön létre a Sierpinsky-szőnyeg (4. ábra).



4. ábra. Sierpinsky-szőnyeg (BROCHMANN 2006)

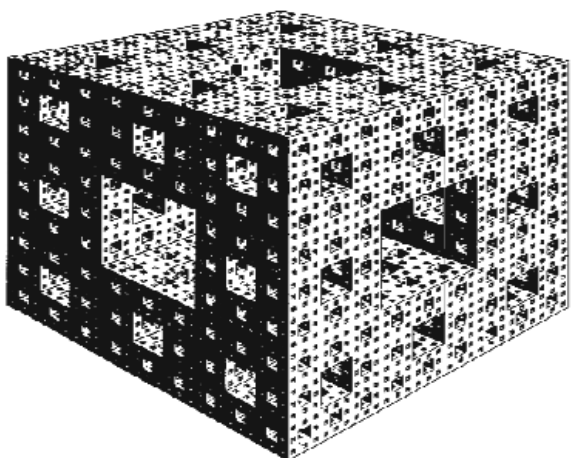
Figure 4. Sierpinsky carpet (BROCHMANN 2006)

Egy négyzet közepéből kivágunk egy egységnyi oldalú négyzetet, amit elhagyunk. A maradék 8 azonos területű kisméretű négyzet mindegyikénél hasonlóan járunk el, csak most már 8 db $8/9$ egység² területű négyzetet vágunk ki. Megismételve az eljárást, az előbbi háromszöghöz hasonló szűrőt, jelen esetben lyukacsos négyzetet kapunk eredményül.

Az él hossza, azaz, az idomok kerülete mindkét esetben a ∞ -hez tart, az idomok területe pedig a 0-hoz.

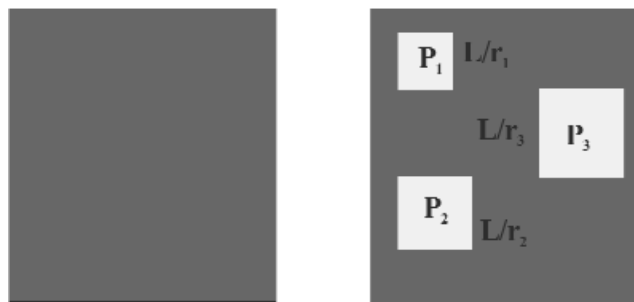
Természetesen a fenti fraktáloknak létezik térbeli megfelelője is, és ezt Menger-szivacsnak nevezik (5. ábra).

Hasonlóan a Sierpinsky-négyzethez, itt kockáról lévén szó, kockákat vágunk ki és hagyunk el, majd eredményül egy lyukacsos, szivacsos jellegű idomot kapunk.



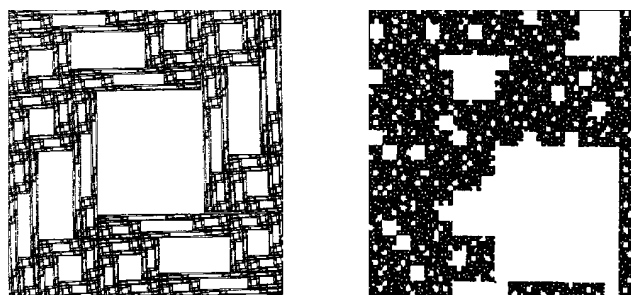
5. ábra. Menger-szivacs (FOKASZ 1999)
Figure 5. Menger sponge (FOKASZ 1999)

Valószínűségi alapon adott idomot, pl. ezt az L oldal-hosszúságú négyzetet úgy alakítjuk fraktállá, hogy P_1 , P_2 és P_3 valószínűségi súlyokkal generáljuk az L/r_1 ; L/r_2 és L/r_3 méretű négyzeteket (6. ábra).



6. ábra. Valószínűségi fraktál (VICSEK 1992)
Figure 6. Probabilistic fractal (VICSEK 1992)

A végtelenségig folytatva ugyanezt, egy lyukacsos, de sajátos négyzetet kapunk eredményül, például ilyeneket (7. ábra):



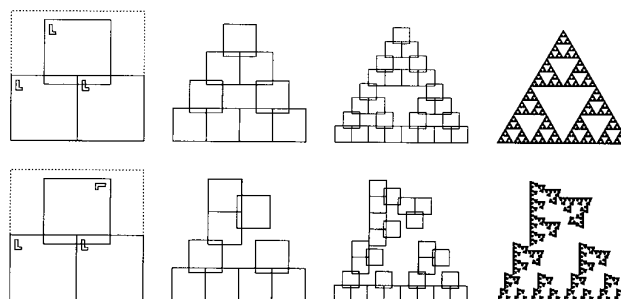
7. ábra. Valószínűségi fraktál egy-egy realizációja (BARNSELY 1988, FOKASZ 1999)
Figure 7. Two realisations of the probabilistic fractal (BARNSELY 1988, FOKASZ 1999)

Az eddig elmondottak alapján a fraktálok három fő tulajdonságát vehetjük számba:

1. **Önhasonló** idomokból épülnek fel;

Az említett önhasonló tulajdonság általánosítása az ún. önaffin jelleg, amely egy olyan függvény segítségével végrehajtott transzformáció, amely méretváltoztatást, eltolást és forgatást jelent.

Az önaffin tulajdonságok szemléltetésére szintén a Sierpinsky-háromszöget használjuk fel (8. ábra, PEITGEN et al. 1993, pp. 24–27.):



8. ábra. Önaffin tulajdonság forgatása (PEITGEN et al. 1993)
Figure 8. Self affine fractal rotation (PEITGEN et al. 1993)

Az ábra két sora ugyanazt a háromszöget ábrázolja, az alsó sorban levő mégsem teljesen hasonlít a felsőre. Az egyetlen eltérés a kettő között az, hogy a második sorozat háromszögeinek csúcsát elforgattuk 90° -kal, és ezt minden további generációnál megismételtük.

2. A fraktálok **rekurzív** tulajdonsága lépcsőről-lépésre történő előállításukban nyilvánul meg, amely jól nyomonkövethető az eddigi (1–8) ábrákon.

A műszaki ember szeret mérni, felvetődik a kérdés: Hogyan mérjük meg a fraktálokat? Mi jellemezza a bonyolultságukat? Mi alapján hasonlítsuk össze őket egymással?

3. **Fraktáldimenziót** használják a fraktálok bonyolultságának mérésére.

A fraktáldimenzió segítségével meghatározható, mennyire tölti ki a teret egy fraktálgörbe. A vonalakat egydimenziósoknak, a felületeket kétdimenziósoknak, a testeket pedig háromdimenziósoknak tartjuk. Azonban egy nagyon szabálytalan görbe ide-oda vándorolhat a felületen, olyannyira, hogy szinte teljesen ki is töltheti azt. A nagyon tekervényes felület, mint pl. egy fa lombozata vagy a tüdő belső felülete, majdhogynem háromdimenziós lehet. Így a szabálytalanságra, hegehupásságra úgy tekinthetünk, mint a dimenzió növekedésére. Egy szabálytalan görbe dimenziója 1 és 2 között lesz, míg egy szabálytalan felületé 2 és 3 közé esik. Egy fraktálgörbe dimenziója olyan szám, amely azt jellemzi, hogy a görbe két kiválasztott pontja között hogyan nő a távolság, midőn növeljük a felbontást. Tehát, amíg a vonal és a felület topológiai dimenziója mindig 1, illetve 2, addig a fraktáldimenzió lehet egy ezek közti érték is.

A D_s fraktáldimenzió egyik definíciója:

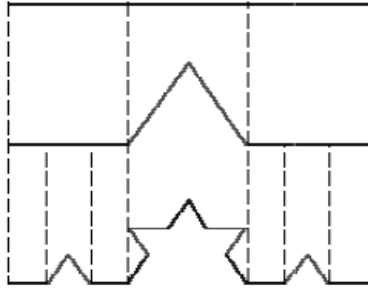
$$D_s = \frac{\log(N)}{\log(1/S)},$$

ahol S az eredeti felosztás, az N pedig az a szám, amely megmutatja, hogy az eredeti elemekből mennyivel lépünk

tovább, vagyis hány elemmel helyettesítjük az eredeti elemet.

Más megfogalmazásban az S a hasonlóság aránya, az alakzat pedig N számú másolattal fedhető le (FOKASZ 1999).

A Koch-görbe segítségével szemléltetjük (9. ábra) a fraktálok nevében is rejlő, tört dimenziót.



9. ábra. Koch-görbe (EDGAR 1990)

Figure 9. Koch's curve (EDGAR 1990)

Az alapkérdés az, hogy egy görbe, amely egydimenziós, mennyire tölti ki a kétdimenziós síkot. A Koch-görbe, az említett Cantor-halmazhoz hasonlóan, egy szakasz harmadolásával kezdődik, csak ebben az esetben nem elveszünk a felosztásból, hanem beillesztünk egy ugyanakkora szakaszt. Tovább folytatva a szakaszok harmadolását és a szakaszok helyettesítését eggyel több elemmel, egy csipkézett formájú tört vonalat kaptunk (9. ábra).

Definíció szerint e fraktálnak, a Koch-görbének a dimenziója:

$$D = \log 4 / \log 3 = 1,26.$$

Összehasonlítva a Cantor-szakaszt és a Koch-görbét, észlelhetjük a jelenség lényegét, vagyis azt, hogy amíg a Cantor-halmaz (1. ábra) csökkenő szakaszokra a végtelenbe pontfelhővé zsugorodik, és dimenziója 1 alá csökken ($D = \log 2 / \log 3 = 0,6309$); addig a Koch-görbét definíció szerint (EDGAR 1993) síkban értelmezzük, és dimenziója nagyobb lesz 1-nél, a Cantor-halmaz méretének duplájára: 1,26-ra növekszik.

Tehát összefoglalható a fraktálok három alapvető tulajdonsága:

1. Önazonos (önaffin) elemekből állnak.
2. Rekurzív módon állíthatók elő.
3. Tört dimenzióval rendelkeznek.

Vetőstatisztikai és fraktálgeometriai eredmények

A szilárdásvány-bányászati szakirodalomból ismeretes, hogy a fejtési mezők kijelöléséhez, vagyis a bányaművelés tervezéséhez meghatározzák az ún. vetőmentes terület nagyságát (FÜST 1982, 1997). Ez a szén-, illetve bauxittelepek vágatokban történő fejtése miatt fontos. Minél nagyobb a vetőmentes terület, annál biztonságosabban és gazdaságosabban végezhető a művelés. Ugyanilyen fontos lehet a vetőmentes területek körvonalazása, sőt térképezése a szénhidrogén-kutatásban is. UNGER (2004b) egy esettanulmány kapcsán kvarchomokkó törésvonalaira végzett vetőstatisztikai elemzéseket, hogy meghatározza a vetőmentes területeket. A vetőstatisztikai számítások alapján a szeizmikus mérés előtt rejtve maradt vetők száma megbecsülhetővé vált a következőképpen: mivel a vetők gyakorisági histogramja hatványfüggvény-kapcsolatot mutat a vetők hosszúságával, a függvénybe való behelyettesítéssel kiszámítható a nem azonosított vetők száma. Ez főleg a kisebb méretű vetők tartományára alkalmazható. Az esettanulmányban szereplő hatványfüggvény-közelítések megegyeznek: 1,4 körüli azonos hatványkitevővel rendelkeznek (10. ábra) a különböző vetőméret-gyakoriságok esetén.

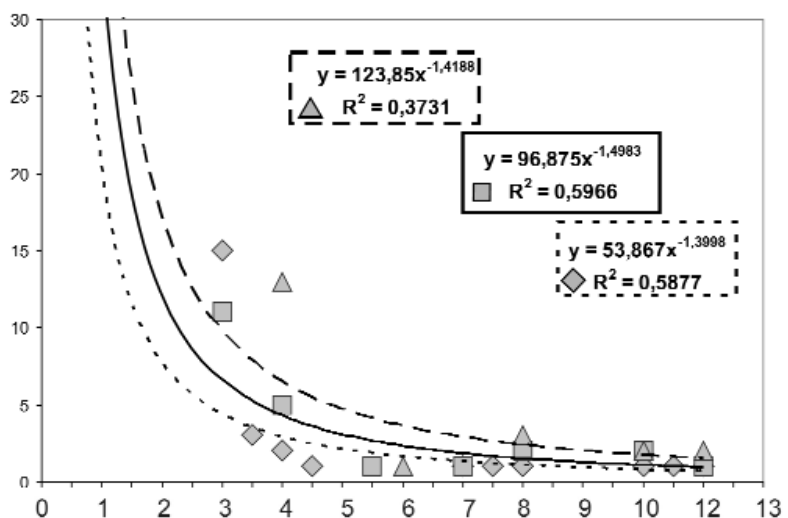
Az ábráról a közelítő hatványfüggvények alapján leolvasható a további vetők száma, illetve intervallumok állapíthatók meg, amik kijelölik a várható töredezettség mértékét.

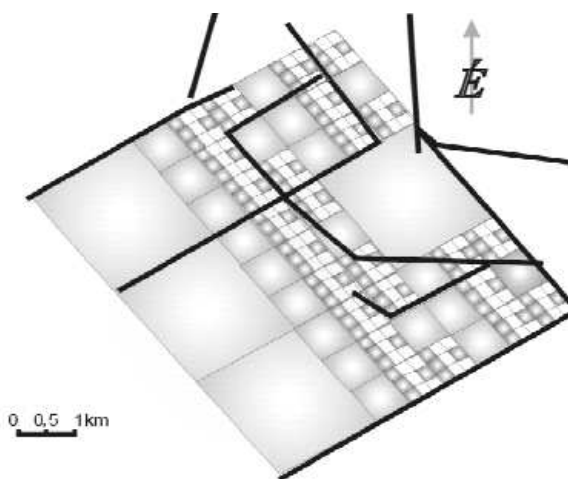
Hátrány, hogy nem ismerjük a még várható vetők térbeli helyzetét.

Erről szól UNGER (2004a) cikke, amely fraktálgeometriai megközelítéssel töredezett és kevésbé töredezett tömböket jelöl ki egy módosított Sierpinsky-szűrő segítségével (11. ábra). Ennek lényege, hogy az említett

10. ábra. A vetők hosszúság szerinti megoszlása (UNGER 2004b)

Figure 10. Distribution of the faults reported to their length (UNGER 2004b)





11. ábra. A háromgenerációs módosított Sierpinsky-szűrő illesztése (UNGER 2004a)

Figure 11. Fitting the three generation of the modified Sierpinsky gasket (UNGER 2004a)

kutatási területen, a 3D szeizmikus mérések vetőire sikerül egy háromgenerációs módosított Sierpinsky-szűrőt illeszteni.

Az alábbiakban ennek a hálónak a kapcsolatát igyekszem összekapcsolni az említett vetőstatistikai számítások eredményével.

A Cantor-halmaz (1. ábra) dimenziója az említett definíció alapján számítható ki:

$$D_c = \log 2 / \log 3 = 0,6309 .$$

A háromszatú (triadikus) halmaz méretét úgy kaptuk meg, hogy a továbbvitt elemek és a felosztás számának logaritmus hányadosát képeztük (TÉL, GRUIZ 2002).

A Koch-görbe (9. ábra) olyan triadikus halmaz, amely már kilép a síkba. E fraktál- dimenziója:

$$D_K = \log 4 / \log 3 = 1,58 .$$

A Sierpinsky-háromszög (3. és 8. ábra) dimenziója a TÉL, GRUIZ (2002) által is ismertetett módon számítható ki:

$$D_{SA} = \log 3 / \log 2 = 1,26 .$$

Ha a Sierpinsky-háromszög oldalát nem két, hanem három egyenlő részre osztjuk, az ismert rekurzív szerkesztési módon egy új Sierpinsky-háromszög generálható (12. ábra).

A triadikus Sierpinsky-háromszög fraktáldimenzióját az alábbi képlettel számíthatjuk ki:



12. ábra. A triadikus Sierpinsky-háromszög

Figure 12. The triadic Sierpinsky gasket

$$D_{SA2} = \log 6 / \log 3 = 1,6309 .$$

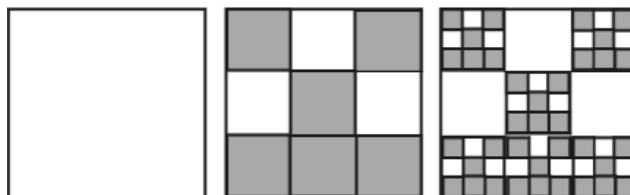
Belátható, hogy a klasszikus Sierpinsky-négyzet (4. ábra) dimenziója:

$$D_{SQ} = \log 8 / \log 3 = 1,89 ,$$

s ez a négyzet egy másik,

$$D_{SQ2} = \log 6 / \log 3 = 1,63 .$$

dimenziójú négyzetté alakítható át, ha nem 8, hanem csak 6 négyzetet tartunk meg a következő generációhoz, majd rekurzívan lépünk tovább (13. ábra).



13. ábra. Egy triadikus Sierpinsky-négyzet

Figure 13. One triadic Sierpinsky gasket

Így közvetlenül tapasztalható, hogy különböző jellegű fraktálok dimenziója azonos lehet. Azaz a triadikus Sierpinsky-háromszög és egy triadikus négyzet dimenziója azonos, ha megfelelő felosztással lépünk a következő generációba.

Ez az a tulajdonsága a fraktáloknak, amely lehetővé teszi változatos transzformációk létrehozását, anélkül, hogy a dimenziója változna.

Vetőstatistikai és a fraktálgeometriai eredmények összekapcsolása

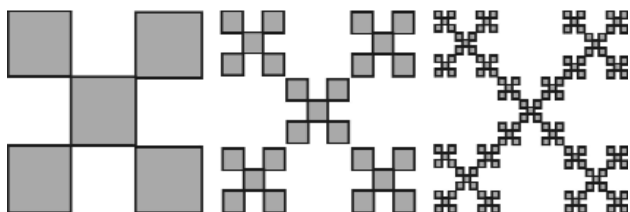
A következőkben a vetőstatistikai számításaimat összekapcsolom a töredezett tömbök fraktálgeometriai nyomozásával.

A Sierpinsky-hópehely (14. ábra) dimenzióját kiszámítva (TÉL, GRUIZ 2002):

$$D_M = \log 5 / \log 3 = 1,46 ,$$

értéket kapunk.

Ha nem a hópehely szerinti elrendezésben növesztjük tovább a fraktált, a dimenziója nem változik. Sőt egészen más jellegű fraktálnak is lehet ugyanaz a dimenziója. Amint



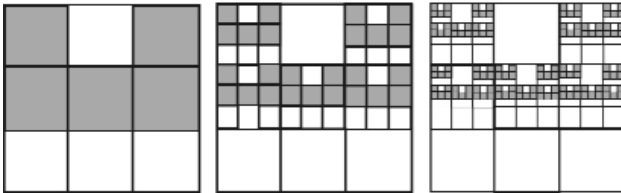
14. ábra. Egy sajátos triadikus Sierpinsky-négyzet: a hópehely

Figure 14. A special triadic Sierpinsky gasket: the snowflake

korábban is bemutattam, a logaritmushányadosban (ami definíció szerint a fraktáldimenzió) csak a két szám — a felosztás száma (nevezőben) és a továbbvitt elemek száma (számlálóban) — a mérvadó, csak az a lényeg, hogy a 9 db $1/3$ -ad akkora négyzet közül 5-öt válasszak ki.

Ha a 14. ábrát, a Sierpinsky-hópehely elrendezését megváltoztatjuk (15. ábra), akkor a fraktáldimenziója — a $D = 1,46$ értéke — nem változik.

Ez az elrendezés már ugyanaz, mint a 3D-s szeizmikus értelmezés alapján értelmezett vetőkre illesztett négyzetháló (11. ábra).



15. ábra. Egy másik sajátos triadikus Sierpinsky-négyzet realizációja, amelynek fraktáldimenziója nem változott a Sierpinsky-hópehelyhez képest

Figure 15. Realization of an other special triadic Sierpinsky gasket, which has the same fractal dimension as the snowflake fractal

Tehát a rezervoártetőn azonosított vetőkre kifejlesztett négyzetháló rekurzív és önhasznó fraktál, amelynek dimenziója 1,46.

A vetők hosszúság szerinti eloszlásának diagramján (10. ábra), amely szerint a szeizmikus felbontás alatti vetők méretére végeztem az előrejelzést (UNGER 2004b), szembevető a közelítő hatványfüggvények kitevőinek egyezésének szorossága: $-1,42$, $-1,49$ és $-1,33$ körüliek, abszolút értékben épp a fenti fraktáldimenzióhoz közeli, tizedes pontossággal megegyező érték.

Láttuk, hogy az adott x hosszúságú vetők gyakorisága elég pontosan leírható a hatványfüggvénnyel:

$$f(x) = a x^{-b};$$

ahol $a > 0$ és $b > 0$.

Továbbá S -szer akkora méretű vetőkből N -szer annyi van (S az önhasznóság aránya, $0 < S < 1$, N a következő lépésben továbbvitt alakzatok száma). Ezt az alábbi egyenlőség fejezi ki:

$$f(Sx) = N f(x).$$

Ha a feltételezett hatványfüggvény-modellbe helyettesítjük:

$$a (Sx)^{-b} = N a x^{-b} \quad | : a x^{-b},$$

és

$$S^{-b} = N.$$

Ezután az egyenlőség logaritmusát vesszük, ahonnan

$$-b \log S = \log N,$$

és

$$b = -\log N / \log S = \log N / \log 1/S = D,$$

vagyis a hatványkitevőnek meg kell egyeznie a fraktáldimenzió -1 -szeresével, azaz a két szám abszolút értéke egyenlő.

Mivel a vetők hosszúsága és az erre illesztett négyzethálós fraktál, mint a rezervoár töredeztett tömbjeinek egyik — közel vízszintes — kétdimenziós vetülete, a kapott eredmény egybecseng KORVIN (1992) és VICSEK (1992) állításával. E szerint a hierarchikusan szerveződő fraktálok esetében a méreteloszlás hatványfüggvénnyel írható le. Az egyfel alacsonyabb topológiai térre történő vetület egyfel kevesebb fraktáldimenziót eredményez. Ebből következik, hogy a vizsgált rezervoár töredeztett tömbjei a háromdimenziós térben 2,46-os dimenziójú fraktállal írhatók le.

Összefoglalás

Korábban bizonyítottam és igazoltam az egymással szorosan összefüggő vetőstatisztikai (UNGER 2004b) és fraktálgeometriai számítások (UNGER 2004a) szénhidrogén-ipari alkalmazhatóságát. Szembetűnő volt a vetőstatisztikai számításokból származó vetőhossz-gyakoriságot közelítő hatványfüggvény kitevőjének egyezése az illesztett Sierpinsky-szűrő fraktáldimenziójával. Matematikailag bizonyítást nyert, hogy ez nem véletlen egybeesés, hanem a két szám abszolút értéke egyenlő kell legyen.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom a MÁFI-nak a kutatásaimban nyújtott támogatásért, a közvetlen kollégáknak a fraktálos beszélgetéseinkért, a lektoroknak, akik munkájukkal jobbat tettek a cikkem, és nem utolsósorban mentoromnak Dr. Füst Antalnak, aki a fraktálok felé irányította tekintetem.

Irodalomjegyzék — References

- BARNESLEY, M. 1988: *Fractals Everywhere*. — Academic Press, Inc. San Diego, 375 p.
- BROCHMANN, H. 2006: The Sierpinsky Carpet. — In: *Fractal Geometry, Part 4*. <http://www.saltspring.com/brochmann/math/Fractals/fractal-4/fractal-4.00.html> (2004. május 8.)
- CRYSTAL, D. 1992: *Cambridge enciklopédia*. — Maecanas Kiadó, Budapest, 1524 p.
- EDGAR, G. A. 1990: *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. — Springer-Verlag, New York 230p.
- FOKASZ N. 1999: Káosz és fraktálok. — *Új Mandátum*, Budapest, 310 p.
- FÜST A. 1982: Geostatisztika. — *Kézirat a szerzőnél* (a Nógrádi Szénbányánál tartott mérnöktovábbképző tanfolyam segédlete), Budapest.
- FÜST A. 1997: *Geostatisztika*. — Egyetemi jegyzet, Eötvös Kiadó, Budapest, pp. 298–315.
- GLEICK, J. 1999: *Káosz*. — Göncöl Kiadó, Budapest, p. 350.
- KORVIN, G. 1992: *Fractal Models in the Earth Sciences*. — Elsevier, London, 369 p.
- MANDELBROT, B. 1968: *Fractal geometry of the Nature*. — W H Freeman & Co., 480 p.
- PEITGEN, H-O., JÜRGENS, H., SAUPE, D. 1993: *Fractals for the classroom. Vol. I*. — Springer-Verlag, New York, 389 p.
- SZABÓ L. I. 1997: *Ismerkedés a fraktálok matematikájával*. — Polygon, Szeged, 64 p.
- TÉL T., GRUIZ M. 2002: *Kaotikus dinamika*. — Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 356 p.
- UNGER Z. 2004a: Töredezett közettömbök nyomozása fraktálgeometriai elemekkel; egy szénhidrogén-rezervoár esettanulmánya. — *Földtani Közlöny* 134 (2), pp. 281–289.
- UNGER Z. 2004b: Statisztikai vetőnyomozás egy szénhidrogén kutatási területen. — *Földtani Közlöny* 134 (3), pp. 423–441.
- VICSEK, T. 1992: *Fractal growths phenomena*. — World Scientific Publishing, Singapore, 475 p.