MICHALETZKY MÁRTON

Piaci mikrostruktúra és likviditás

A tanulmány hármas céllal íródott. Egyrészt röviden ismerteti a piaci mikrostruktúra szakterületét, legfontosabb kutatási kérdéseit és alapfogalmait, mint az order flow és a bid-ask spread. Másrészt röviden bemutatja a terület két alapmodelljét, a Kyle- és a Glosten–Milgrom-modelleket, illetve az ezeket egységes szerkezetben tárgyaló Back–Baruch-modellt. Harmadrészt bevezetést ad a bid-ask spread modellek világába. Mindhárom részben végig szem előtt tartjuk azt, hogy a piaci mikrostruktúra modelljeiben miként jelenik meg a piaci likviditás, és mit tudhatunk meg a likviditás természetéről a modelleken keresztül.[1]

1. BEVEZETÉS

Ez a tanulmány a piaci mikrostruktúra elméletének az alapjaival és néhány klasszikus cikk piaci likviditással kapcsolatos főbb eredményeivel foglalkozik. A piaci mikrostruktúra elmélete az elmúlt harminc évben rendkívül sokat fejlődött. A kiterjedt elméleti, empirikus és kísérleti szakirodalmat számos áttekentő tanulmány foglalja össze. Ezek közül mindenképpen meg kell említeni az első magyar nyelvűt, a 2005-ös *Gereben* és tsai [2005] MNB-tanulmányt, amelyben a szerzők a jegybank nézőpontjából végzik el a devizaárfolyamok piaci mikrostruktúra alapú megközelítésének rendszerezését.

Az angol nyelvű összefoglalások közül kiemelkedik *Madhavan* [2000], amely a szakterületet a következő négy szempont szerint tekinti át: i) *áralakulás* (price formation), beleértve az információ árakba épülésének dinamikus folyamatát; ii) *piaci struktúrák és tervezésük* (market structure and design) az áralakulás és a kereskedési protokoll kapcsolatával; iii) *transzparencia* (transparency); illetve iv) *alkalmazás a pénzügyek más területein* (application to other areas of finance), például az eszközárazásban, a nemzetközi pénzügyekben és a vállalati pénzügyekben.

Az elmúlt években megjelent, a piaci mikrostruktúra elméletével foglalkozó könyvek közül kettőt emelek ki. *Maureen O'Hara: Market Microstructure Theory* című könyve (O'Hara [1995]) kiváló és részletes összefoglalását adja az elméleti modelleknek, míg *Richard K. Lyons: The Microstructure Approach to Exchange Rates* című könyve (Lyons [2001]) a mikrostruktúra-elméletnek a devizaárfolyamokra vonatkozó alkalmazásán kívül bemutatja a szakterülethez kapcsolódó alapfogalmakat, a piaci mikrostruktúra elméleti modelljeit és a szakterület legfontosabb empirikus eredményeit.

1 A tanulmány a szerzőnek a Budapesti Corvinus Egyetem Közgazdaságtani Doktori Iskolájára benyújtott PhD-értekezésének az egyik fejezete alapján készült. A szerző köszönettel tartozik *Makara Tamásnak*, amiért felhívta figyelmét a szakterületre, *Berlinger Edinának* az ösztönzésért és *Michaletzky Györgynek* a szakirodalom feldolgozásában nyújtott segítségéért.

Lyons e szakterület iránti érdeklődését személyes élmény keltette fel a kilencvenes évek elején. Egy devizakereskedő barátját meglátogatva, azzal szembesült, hogy a gyakorlati szakemberek a devizakereskedésben nagyon ritkán veszik számításba azokat a – jellemzően – makroökonómiai tényezőket, amelyekkel a fundamentális devizaárfolyam-modellek a devizaárfolyamok alakulását magyarázzák. Nem alkalmazták a strukturális modellekben domináns inflációs rátákat, sem a kamatláb-különbözetet, sem a folyó fizetési mérleg egyenlegeket, sem pedig a modernebb, tőkepiaci megközelítés (monetáris és portfólió alapú) meghatározó változóit. Saját tapasztalata mellett akadémiai oldalról is erős impulzus érte, amikor *Meese* és *Rogoff* 1983-ban publikált cikkében (Meese és Rogoff [1983]) bemutatta, hogy a devizaárfolyamok eszközalapú modelljeinek (asset approach) magyarázó ereje még a nagyobb devizák esetében is gyakorlailag nulla[2], amit később számos tanulmány is alátámasztott.

Ez a hatás olyannyira meghatározó volt, hogy 2005-ben *Martin D. D. Evansszel* közös cikkükben megismételték az addigra „benchmarkká" váló Meese–Rogoff vizsgálatot, és a hagyományos makromodell mellett egy mikrostruktúra-alapú modellel is összevetették a véletlen bolyongást (Evans és Lyons [2005]). A vizsgálat eredménye szerint a mikromodell a havi devizaárfolyamok változásának varianciájából 16 százalékot megmagyaráz, amivel túlteljesíti a makromodellt, sőt empirikusan olyan jól teljesít, ahogyan egyetlen más modell sem.

1.1. A mikrostruktúra-elmélet definíciója

Nézzük, hogyan definiálja O'Hara a piaci mikrostruktúra-elméletet és Lyons a mikrostruktúra-megközelítést!

„Market microstructure is the study of the process and outcomes of ex-changing assets under explicit trading rules. While much of economics abstracts from the mechanics of trading, the microstructure literature analyzes how specific trading mechanisms affect the price formation process."[3]

„For me, the microstructure approach is not just a rich set of tools for addressing the issues, but also a way of framing those issues."[4]

Lyons könyvében az alábbi három feltevést emeli ki mint a szakterületre leginkább jellemzőt:

1. Információ: van olyan információ, amelyik nem nyilvános.

2. Piaci szereplők: a piaci szereplők különböznek, és ez hat az árakra.

3. Intézmények: a kereskedési rendszerek különbözőek, ami szintén hat az árakra.

2 Lásd a Meese és Rogoff [1983] kivonatot: *„This study compares the out-of sample forecasting accuracy of various structural and time series exchange rate models. We find that a random walk model performs as well as any estimated model at one to twelve month horizons for the dollar/pound, dollar/mark, dollar/yen and trade-weighted dollar exchange rates. The candidate structural models include the flexible-price (Frenkel–Bilson) and sticky-price (Dornbusch–Frankel) monetary models, and a sticky-price model which incorporates the current account (Hooper–Morton). The structural models perform poorly despite that we base their forecasts on actual realized values of future explanatory variables."*

3 Lásd O'Hara [1995], 1. o.

4 Lásd Lyons [2001], xi. o.

Ha a makromodellekkel hasonlítjuk össze a mikromodelleket, akkor Lyons szerint az a két változó, amelyik a leginkább meghatározó, az *order flow* és a *bid-ask spread*.

1.2. Order flow és bid-ask spread

Az *order flow* a közgazdaságtan egyik legfontosabb fogalmával, a mennyiséggel (quantity) rokon, de nem azonos azzal. Az order flow előjeles kereskedett mennyiség (transaction volume that is signed). Ha egy piaci szereplő el szeretne adni részvényt, és ezt egy árjegyző megveszi, akkor az order flow előjele negatív lesz. Az előjel meghatározásánál az számít, hogy a kezdeményező fél mit szeretne tenni az eszközzel. Ennek megfelelően, ha venni szeretne, akkor pozitív lesz az order flow. Ha a kezdeményezett tranzakciókat összegezzük, akkor megkapjuk a nettó order flow-t, ami lehet nettó eladási nyomás (negatív order flow) vagy nettó vételi nyomás (pozitív order flow).

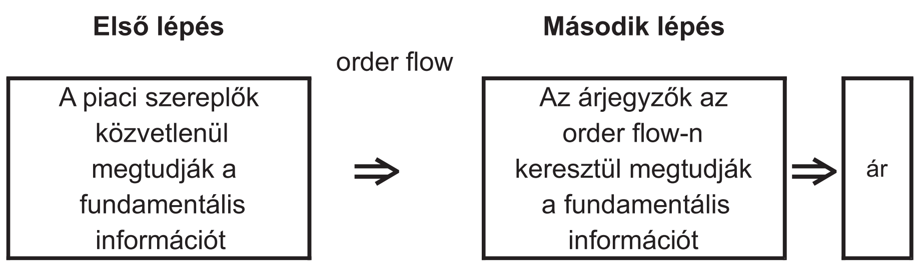
Hogyan tudjuk azonosítani az order flow-t egy olyan piacon, ahol nincs árjegyző? Mekkora az order flow egy *ajánlatvezérelt piacon* (order-driven market)? Az ajánlatvezérelt piacon adható limitmegbízás (limit order), ami rögzített árú megbízást jelent, és akkor teljesül, ha valaki később ugyanezen az áron ellentétes irányú ügyletet szeretne kötni. A limitáras megbízások összességéből épül fel az ajánlati könyv. Az ilyen piacon adható piaci áras megbízás (market order) is, ami az ajánlati könyvben szereplő, legjobb ellentétes irányú megbízásának árfolyamán fog teljesülni.

Az order flow nagysága könnyen kiolvasható a tranzakcióból, hiszen a kereskedett mennyiség megadja; az előjele pedig úgy határozható meg, ha megnézzük, hogy a tranzakciót ki kezdeményezte. Látható, hogy egy limitáras megbízás és egy piaci áras megbízás párosításakor a limitmegbízás a passzív fél, a piaci áras pedig az aktív fél, ezért az order flow előjelének megállapításakor a piaci áras megbízás iránya fog dönteni: ha vétel volt, akkor pozitív, ha eladás, akkor negatív.

Az order flow azért kiemelt fontosságú a mikrostruktúra-elméletben, mert *minden* modellben szerepet játszik. Az order flow része egyfajta transzmissziós mechanizmusnak, mégpedig annak a folyamatnak, ahogy az információ beépül az árba. Azok a piaci szereplők kezdeményezik a kereskedést és így generálják az order flow-t, akik feldolgozzák a információt. Az *1. ábra* Lyons [2001] alapján az információfeldolgozás lépéseit tartalmazza.

1. ábra

Az információ feldolgozásának két lépése
(Richard K. Lyons szerint)



Forrás: LyonsBook

Az első lépésben a piaci szereplők egy része feldolgozza az információt, és ennek az alapján kereskedést kezdeményez. A második lépésben az árjegyző szembesül az order flow-val, és ezt feldolgozva, új árat jegyez. A folyamatot két tényező bonyolítja: egyrészt az informált piaci szereplőkön kívül információval nem rendelkező kereskedők is adnak megbízást, és az order flow ezt a kettőt együtt tartalmazza, valamint az árjegyzőhöz közvetlenül is juthat információ. A standard mikrostruktúra-modellekben az árjegyző csak az order flow-n keresztül jut információhoz, ami túl erős feltételnek tűnhet, kivéve, ha feltesszük, hogy nyilvánosan nem elérhető információról van szó.

A másik változó a *bid-ask spread*, ami Lyons szerint meghatározó szerepet játszik a mikrostruktúra-elméletben, mert – ellentétben más hasonlóan fontos változókkal – mérhető, és különösen fontos a piaci szereplők számára, akik a tranzakciós költségeiket szeretnék kordában tartani. A harmadik oka, amiért a bid-ask spread kiemelt figyelmet kapott, leginkább történeti. A szakterület kialakulásakor az egyik fő kérdés az volt, hogy a kereslet-kínálat egyensúlyának kialakulásakor a walrasi aukciós algoritmus helyett milyen mechanizmus működik a gyakorlatban, és az vajon befolyásolja-e a kialakuló árat.

1.3. A walrasi aukció

A walrasi aukció olyan absztrakció, amely annak a megértését segíti, hogy az árak hogyan állnak be a piactisztító szintre, azaz oda, ahol egyensúlyba kerülnek, és a kereslet megegyezik a kínálattal. A walrasi kikiáltó összegyűjti az előzetes megbízásokat, majd ezek alapján meghatározza a piactisztító árat, amin aztán minden tranzakció teljesül. A valóságban azonban ez sosem így történik. Valójában – nem csak a pénzügyi piacokon – mindig van valaki, aki kezdeményezi a tranzakciót, a másik fél pedig árjegyzőként kielégíti ezt az igényt, egészen addig, amíg be nem áll az új ár, azaz amíg a piaci szereplők kereskedni akarnak. A walrasi mechanizmussal szemben itt nemcsak az (új) egyensúlyi áron van tranzakció. Ezek a tranzakciók azért nem egyensúlytalanságban kötött ügyletek, mert az árjegyző számára éppen rendelkezésre álló információ alapján ezek a tranzakciók mind az egyensúlyi áron történtek meg. Így ezek az ügyletek az árjegyző szempontjából racionálisak.

A piaci mikrostruktúra-elmélet standard modelljei ezt a viselkedést akarták modellezni, és ezekkel a modellekkel sikerült az egyetlen egyensúlyi ár szigorúbb feltevésétől eljutni olyan modellekhez, amelyek jóval inkább megközelítik a valóságot; az áralakulás folyamatára vonatkozóan nem éltek olyan szigorú feltevésekkel, és a vételi és eladási árak létére is – a tranzakciós költségeken túlmenő – magyarázatot tudtak találni. A spreadet magyarázó elméletek azóta is a mikrostruktúra-elmélet egyik – de csak egyik – fontos ága.

1.4. A „forró krumpli”

A fentiekben láthattuk, hogy a mikrostruktúra-elmélet egyik fókuszpontja az áralakulás folyamata. A kezdeti modellek kifejezetten erre koncentráltak, de a későbbiekben is lényeges szerepet játszott ez a szempont. A következő terület a *devizapiacok forgalmának* magyarázata, ahol a szakterület empirikus irodalma jelentős eredményeket ért el a kilencvenes években.[5] A devizapiacok a forgalmat tekintve messze kiemelkednek a többi pénzügyi piac közül.[6] Mi magyarázza ezt a hatalmas forgalmat?

A mikrostruktúra-elmélet szerint a *„forró krumpli" (hot potato)* jelenség lehet a forgalom mögött. Tegyük föl, hogy egy ügyfél megbízást ad adott mennyiségű deviza eladására, amit az egyik árjegyző meg is vesz. Ezzel az árjegyző saját számláján a szándékoltnál magasabb szintre nőtt az adott deviza pozíciója. Ettől az árjegyző már szeretne megszabadulni, ezért eladási tranzakciót kezdeményez. Szerencsés esetben talál egy másik ügyfelet, aki venni szeretne a devizából, máskülönben megkezdődik a „forró krumpli" játék. Másik árjegyzőktől kér árjegyzést (vételi és eladási árfolyamot), majd elad annyit a felesleges készletéből, amennyit tud. Ekkor a többi árjegyző készlete emelkedik a kívánatos szint fölé, ezért folytatják a játékot addig, amíg vételi szándékú ügyfelek fel nem szívják az adott mennyiséget (vagy megfelelő részét), és minden árjegyző készlete a kívánatos szintre áll be.

A fenti folyamatból látszik, hogy egy ügyfélmegbízás az értékének a sokszorosát kitevő forgalmat képes generálni a devizapiacokon. A hatalmas forgalom okát korábban a spekulációban látták, a „forró krumpli" hatás viszont az árjegyzők kockázatkezelési tevékenységére vezeti vissza, hiszen készletük szintjének optimalizálása erre utal. A nagy forgalom abból a szempontból is lényeges, hogy milyen információtartalmat tulajdonítunk az order flow-nak, hiszen az order flow információtartalma attól is függ, hogy mi idézi elő az order flow-t.

2. A piaci mikrostruktúra elméletének irodalma

O'Hara [1995] a piacok és a piacvezető tevékenységének bemutatása után az alábbi részterületekre osztva mutatja be a piaci mikrostruktúra elméletének a szakirodalmát:

– készletezési modellek (inventory models),
– információalapú modellek (information-based models),
– optimalizáló kereskedők (strategic trader models: informed traders, uninformed traders),
– információ és áralakulás (information and the price process),
– piaci stabilitás (market viability and stability),
– likviditás és a piacok közti kapcsolatok (liquidity and the relationship between markets),
– piacok teljesítménye (issues in market peformance).

A piaci mikrostruktúra elméletének devizapiaci alkalmazhatóságát jegybanki szemmel vizsgáló tanulmány, Gereben és tsai [2005] két nagy csoportot különböztet meg:

1. *Információs modellek*

   Ezek a modellek azt tételezik fel, hogy a piaci szereplők információjukat tekintve heterogének, azaz vannak a piacon olyan szereplők, amelyek jobban informáltak (például bennfentesek), mint a többiek. Ők azért szeretnének egy adott áron kereskedni, mert tudják, hogy az eszköz ennél többet (vagy épp kevesebbet) ér. Az általuk

5 Lásd Lyons [2001].
6 Napi 1,5 billió USD. Forrás: Lyons [2001], 13. o.

generált order flow információt hordoz. Az árjegyző tudja, hogy vannak informált kereskedők, de nem képes azonosítani őket, ezért úgy jegyez – egyes modellekben bid-ask – árat, hogy az informált kereskedők tranzakcióin elszenvedett veszteséget kompenzálja a nem informált (likviditási) kereskedők tranzakcióin. Ezekben a modellekben az információ az order flow-n keresztül mozgatja az árfolyamot, és azon keresztül épül be az árba.

2. *Készletezési modellek*
A készletezési modellek kiindulási alapját a „forró krumpli" játékon keresztül könnyű megérteni. Az árjegyzők adott nagyságú készletet szándékoznak tartani, ezért a vételi és eladási árakat úgy igyekeznek alakítani, hogy az ügyfélmegbízásokból eredő többlet eltűnjön, azaz a likviditási sokk után a pozíciójuk visszatérjen az eredeti szintre. Látható, hogy ebben a keretben az árjegyzők kereskedése nem spekulációs célú, hanem a kockázatkezelés része, és a spread kialakulását és nagyságát nem az információs aszimmetria, hanem a készlet határozza meg.

Bármelyik csoportosítást vesszük is alapul, a modellek nagy része nem sorolható tisztán egyik vagy másik kategóriába, mert rendszerint több jelenséget is képesek megragadni. A következő részekben Kyle [1985], Glosten és Milgrom [1985] alapmodelljeit, az ezeket egységes modellben bemutató Back és Baruch [2004], valamint a Glosten–Milgrom modell egyik továbbfejlesztését (*Das* [2005]) mutatjuk be. Végezetül röviden megismerkedünk a bid-ask modellekkel.

3. A Kyle-modell

A piaci mikrostruktúra-elmélet mára klasszikussá vált cikkében Kyle [1985] olyan modellt épít fel, amelyben a szakterület alapvető kérdéseire keresi a választ. Milyen gyorsan épül be a piaci árakba az alaptermékre vonatkozó magáninformáció? Mennyit ér a magáninformáció? Hogyan hat a *likviditási kereskedés* (noise trading) az árak volatilitására? Mi határozza meg a spekulatív piac likviditását?

3.1. A likviditás fogalma

A bevezetésben definiálja a likviditás általa vizsgálni kívánt dimenzióit:

1. Szorosság (tightness): Mekkora annak a költsége, ha pozíciónkat rövid idő alatt szeretnénk megforgatni? Másképpen megfogalmazva: mekkora annak a költsége, ha egyszerre veszünk, és el is adunk?

2 *Mélység (depth):* Mekkora nagyságú order flow képes az árat adott egységgel megváltoztatni?

3. Rugalmasság (resiliency): Mekkora sebességgel tér vissza az ár egy véletlen sokk után?

Kyle idézi *Fisher Black* likviditásdefinícióját: *„A likvid piac folytonos piac, azaz majdnem minden mennyiséggel lehet azonnal kereskedni, és hatékony piac, tehát kis mennyi-*

séggel a jelenlegi piaci áron rövid idő alatt, nagy mennyiséggel átlagosan a jelenlegi piaci áron hosszabb idő alatt lehet kereskedni.”[7] Kyle a dimenziókat összefoglalva megállapítja, a Black-féle likvid piac majdnem végtelenül szoros (tight), nem végtelenül mély (deep) és elég rugalmas (resilient) ahhoz, hogy az ár a fundamentális értékhez tartson.

3.2. A modell leírása

Kyle a piaci kereskedést aukciók sorozataként fogja fel. Egyetlen aukció során egy kockázatos eszközt cserélnek egy kockázatmentesre, azaz egyszerűsítve, részvényt adnak el és vesznek meg. A piacon három szereplő van: a *piacvezető (market maker)*, aki (Bertrand-féle) versenyzői piacon tevékenykedik, az *informált kereskedő (insider)* és a *likviditási kereskedő (noise trader)*. A piacvezető és a likviditási kereskedő ismeri a részvény jövőbeli (*ex post likvidációs*) értékére vonatkozó valószínűségeloszlást. Kyle felteszi, hogy ez normális eloszlást követ. Az informált kereskedő többletinformációval rendelkezik a részvény értékéről, ami a modell legegyszerűbb változatában úgy jelenik meg, hogy pontosan ismeri a jövőbeli értékét.

Az informált kereskedő célja az, hogy a többletinformáció birtokában kereskedésével minél nagyobb profitot érjen el. A likviditási kereskedő kereskedése véletlenszerű, a modellben ez nulla várható értékű normális eloszlás szerint alakul.

Egyetlen aukció során i) az első lépésben az informált kereskedő és a likviditáskereskedő egyszerre meghatározza, hogy mekkora mennyiséggel szeretne kereskedni; ii) második lépésben a piacvezető megállapítja a piactisztító árat.

Az első lépés során az informált kereskedő döntését az általa eladni vagy venni kívánt mennyiségről a múltbeli árakat, kereskedett mennyiségeket és a többletinformációját figyelembe véve hozza meg. A likviditási kereskedő ajánlata véletlenszerű, és független mind az informált kereskedő jelenbeli tevékenységétől, mind a saját múltbeli tevékenységétől.

A piacvezető nem tudja megkülönböztetni a két másik piaci szereplő ajánlatát, hanem csak az együttes (nettó) ajánlattal, az order flow-val szembesül. Annyit tud, hogy a piacon van informált kereskedő, és hogy a likviditási kereskedő ajánlatának várható értéke nulla, ezért az order flow előjeléből és méretéből következtet arra, hogy a részvény jövőbeli várható értékére vonatkozó várakozása mennyire helyes. Ha a nettó ajánlat vétel (eladás), akkor a részvény értékesebb (kevésbé értékes), mint korábban gondolta, ezért magasabb (alacsonyabb) árat fog jegyezni, mint korábban. Így végül az order flow mozgatja az árfolyamot.

Továbbá felteszi, hogy az informált kereskedő és a piacvezető is kockázatsemleges, és mindkettő a várható profitját maximalizálja. A piacvezető ugyanakkor versenyzői piacon tevékenykedik, tehát várható profitja nulla lesz. Ebből adódik: úgy határozza meg a piactisztító árakat, hogy azok egyenlők legyenek a kockázatos eszköz feltételes várható értékével, ahol a feltétel a piacvezető információs halmaza. Nézzünk meg egyetlen aukciót formálisan is!

7 KYLE [1985] idézi *Fisher Blacknak* a likviditásra adott, intuitív definícióját (in: *Towards a Fully Automated Exchange*, Part I., *Financial Analysts Journal*, 27 (1971), 29–34. o.).

3.3. Egyetlen aukció

A leírás Kyle [1985] jelöléseit követi. Jelölje $\tilde{v}$ a részvény jövőbeli értékét, és legyen $\tilde{v} \sim N(p_0, \Sigma_0)$; $\tilde{u}$ a likviditási kereskedő ajánlatát, $\tilde{u} \sim N(0,\sigma_u^2)$ $\tilde{x}$ az informált kereskedő ajánlatát és $\tilde{p}$ a kockázatos eszköz árát jelöli.

Az aukció első lépésében az exogén módon adott $\tilde{v}$ alapján az informált kereskedő meghatározza ajánlatának nagyságát: $\tilde{x} = X(\tilde{v})$, miközben a likviditási kereskedő szintén megadja ajánlatát, $\tilde{u}$-t. Látható, hogy az informált kereskedő ajánlata nem függ $\tilde{p}$-től, tehát piaci megbízásnak (market order) tekinthető.

Az aukció második lépésében a piacvezető az order flow ismeretében meghatározza az árat, ami megtisztítja a piacot: $\tilde{p} = P(\tilde{x} + \tilde{u})$. Mivel a kialakuló ár függ X-től és P-től, $\tilde{p} = \tilde{p}(X,P)$, ezért az informált kereskedő profitja, p=$(\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{x}$ is függ ezektől, így végül $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}(X,P)$.

Kyle a piaci egyensúlyt olyan X és P párként definiálja, melyek eleget tesznek az alábbi két feltételnek:

$$E\{\tilde{\pi}(X,P) \mid \tilde{v} = v\} \geq E\{\tilde{\pi}(X',P) \mid \tilde{v} = v\},\ \forall X',\ \forall v \tag{1}$$

$$\tilde{p}(X,P) = E\{\tilde{v} \mid \tilde{x} + \tilde{u}\} \tag{2}$$

Az első feltétel az informált kereskedő profitmaximalizálását mutatja, a második azt mutatja, hogy a versenyzői piacon tevékenykedő piacvezető profitja nulla lesz. Kyle bebizonyítja, hogy a modellben létezik olyan egyértelmű egyensúly, amiben X és P lineáris függvények. Ekkor

$$X(\tilde{v}) = \beta(\tilde{v} - p_0), \tag{3}$$

$$P(\tilde{x} + \tilde{u}) = p_0 + \lambda(\tilde{x} + \tilde{u}), \tag{4}$$

ahol $\beta = \left(\dfrac{\sigma_u^2}{\Sigma_0}\right)^{1/2}$ és $\lambda = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Sigma_0}{\sigma_u^2}\right)^{1/2}$. Látható, hogy $\beta = \dfrac{1}{2\lambda}$.

3.3.1. A bizonyítás

Feltettük, hogy $\tilde{v} \sim N(p_0, \Sigma_0)$, $\tilde{u} \sim N(0,\sigma_u^2)$valamint $\tilde{x} = X(\tilde{v})$, $\tilde{p} = P(\tilde{x} + \tilde{u})$. Tegyük fel továbbá, hogy léteznek α, β, μ és λ együtthatók, melyekre $\tilde{x} = \alpha + \beta\tilde{v}$ és $\tilde{p} = \mu + \lambda(\tilde{x} + \tilde{u})$.

Mivel a piacvezető az árat úgy határozza meg, hogy várható profitja nulla legyen, ezért

$$\begin{aligned} &E\left(\left[\tilde{v} - P(\tilde{x} + \tilde{u})\right] \mid \tilde{v} = v\right) = (v - \mu - \lambda x)x \\ &\Rightarrow x = \frac{v - \mu}{2\lambda},\ \text{azaz}\ \beta = \frac{1}{2\lambda}, \alpha = -\frac{\mu}{2\lambda}. \end{aligned} \tag{5}$$

Mit tudunk $\widetilde{p}$-ről?

$$\widetilde{p} = E(\widetilde{v} \mid \widetilde{x} + \widetilde{u}) = \tag{6}$$
$$= Cov(\widetilde{v}, \widetilde{x} + \widetilde{u})\left[Var(\widetilde{x} + \widetilde{u})\right]^{-1}(\widetilde{x} + \widetilde{u} - E(\widetilde{x} + \widetilde{u}) + E(\widetilde{p})).$$

Mivel

$$Cov(\widetilde{v}, \widetilde{x} + \widetilde{u}) = Cov(\widetilde{v}, \widetilde{x}) = \beta Var(\widetilde{v}) = \beta \Sigma_0 = \frac{1}{2\lambda}\Sigma_0 =$$
$$Var(\widetilde{x} + \widetilde{u}) = Var(\widetilde{x}) + Var(\widetilde{u}) = \beta^2 \Sigma_0 + \sigma_u^2 = \frac{1}{4\lambda^2}\Sigma_0 + \sigma_u^2 \tag{7}$$
$$E(\widetilde{x} + \widetilde{u}) = E(\widetilde{x}) = \alpha + \beta E(\widetilde{v}) = -\mu\beta + \beta p_0 = -\frac{\mu}{2\lambda} + \frac{p_0}{2\lambda}$$

$$E(\widetilde{p}) = \mu + \lambda E(\widetilde{x} + \widetilde{u}) = \mu + \lambda(-\mu\beta + \beta p_0),$$

ezért

$$\widetilde{p} = \mu + \lambda(\widetilde{x} + \widetilde{u}) = \frac{\frac{1}{2\lambda}\Sigma_0}{\frac{1}{4\lambda^2}\Sigma_0 + \sigma_u^2}\left[\widetilde{x} + \widetilde{u} - \left(-\frac{\mu}{2\lambda} + \frac{p_0}{2\lambda}\right)\right] + \mu + \lambda\left[-\mu\frac{1}{2\lambda} + \frac{p_0}{2\lambda}\right] \tag{8}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\frac{1}{2\lambda}\Sigma_0}{\frac{1}{4\lambda^2}\Sigma_0 + \sigma_u^2} \Rightarrow \frac{1}{4\lambda}\Sigma_0^2 + \sigma_u^2 = \frac{1}{2\lambda^2}\Sigma_0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4}\frac{\Sigma_0}{\sigma_u^2} \tag{9}$$
$$\mu = p_0.$$

3.3.2. Az egyensúly

Mit tudunk $\widetilde{p}$-ről, az árról mint valószínűségi változóról?

$$\widetilde{p} = p_0 + \lambda(X + U) = p_0 + \lambda\left[\beta(V - p_0) + U\right] =$$
$$= \frac{1}{2}(V + p_0) + \lambda U = \frac{1}{2}(V + p_0) + \frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{U}{\sigma_u}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[(V - p_0) + 2p_0\right] + \frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{U}{\sigma_u}\right) = p_0 + \frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\frac{V - p_0}{\Sigma_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\frac{U}{\sigma_u} = \tag{10}$$
$$= p_0 + \frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{V - p_0}{\Sigma_0^{\frac{1}{2}}} + \frac{U}{\sigma_u}\right] \sim N\left(p_0, \frac{1}{2}\Sigma_0^{\frac{1}{2}}\right).$$

Mit tudunk az informált kereskedő profitjáról? Mivel (5)-ből kijött, hogy $\tilde{x}=(\tilde{v}-\mu)/2\lambda$, ezért az informált kereskedő feltételes és feltétel nélküli profitja:

$$E(\Pi\,|\,\tilde{v}) = (\tilde{v}-\mu-\lambda x)x = \frac{\tilde{v}-\mu}{2}\frac{\tilde{v}-\mu}{2\lambda} = \frac{(\tilde{v}-\mu)^2}{4\lambda} =$$

$$= (\tilde{v}-p_0)^2\frac{1}{4}2\left(\frac{\sigma_u^2}{\Sigma_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \tag{11}$$

$$= (\tilde{v}-p_0)^2\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_u^2}{\Sigma_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(\tilde{v}-p_0)}{4\lambda}$$

$$E(\Pi) = E\left(\frac{(\tilde{v}-p_0)^2}{4\lambda}\right) = \frac{Var(\tilde{v})}{4\lambda} = \frac{1}{4}2\left(\frac{\sigma_u^2}{\Sigma_0}\right)^{\frac{1}{2}}\Sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_u^2\Sigma_0)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{12}$$

Milyen tulajdonságokkal bír az egyensúly? Látható, hogy X-et és P-t – ezeket játékelméleti szempontból reakcófüggvényeknek is tekinthetjük – Σ_0 és σ_u^2 határozza meg. Legyen $\Sigma_1 = Var(\tilde{v}\,|\,\tilde{p})$, ami a részvény jövőbeli értékének feltételes varianciája, ahol a feltétel az aukcióban meghatározódó ár. Kiszámítható, hogy

$$\begin{aligned} Var(\tilde{v}\,|\,\tilde{p}) &= Var(\tilde{v}) - [Cov(\tilde{v},\tilde{p})]^2[Var(\tilde{p})]^{-1} = \\ &= \Sigma_0 - (\frac{1}{2}\Sigma_0)^2(\frac{1}{2}\Sigma_0)^{-1} = \frac{1}{2}\Sigma_0, \end{aligned} \tag{13}$$

hiszen

$$\begin{aligned} Cov(\tilde{v},\tilde{p}) &= Cov(\tilde{v}, p_0 + \lambda(\tilde{x}+\tilde{u})) = Cov(\tilde{v},\tilde{x})\lambda = \beta\lambda Var(\tilde{v}) = \\ &= \frac{1}{2}\Sigma_0 \qquad \text{és} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} Var(\tilde{p}) &= \lambda^2[Var(\tilde{x}) + Var(\tilde{u})] = \lambda^2[\beta^2 Var(\tilde{v}) + Var(\tilde{u})] = \\ &= \frac{1}{4}\Sigma_0 + \frac{1}{4}\frac{\Sigma_0}{\sigma_u^2}\sigma_u^2 = \frac{1}{2}\Sigma_0. \end{aligned} \tag{15}$$

A (13)-as egyenletből látszik, hogy $\Sigma_1 = \Sigma_0/2$, tehát az első aukció végére a részvény jövőbeli értékének bizonytalansága a felére csökkent. Ugyancsak kijelenthetjük, hogy egyetlen aukció során az informált kereskedő többletinformációjának a fele épül be az árba. Az árak volatilitása nem függ a likviditási kereskedő tevékenységének szintjétől, σ_u^2-től. Ebben a modellben a piac *mélységét*, azaz azt a mennyiséget, amely a piaci ár egy egységgel való elmozdításához szükséges, $1/\lambda$ adja meg. Látható, hogy itt a piac *mélysége* arányos a likviditási kereskedés mennyiségének és az informált kereskedő várható információjának arányával. Az informált kereskedő maximalizált profitja arányos a piac mélységével.[8] Az informált kereskedő feltétel nélküli várható profitja arányos $\tilde{v}$ és $\tilde{u}$ és varianciájával.

3.4. Sorozatos aukciók

Kyle cikkében egyetlen aukció egyensúlyának meghatározása után hasonló számításokat végez el sorozatos aukciókra az alábbi kiegészítő feltevésekkel:

- N db aukció, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$,
- $\tilde{u}(t)$ Brown-mozgást követ, varianciája σ_u^2, $\tilde{u}_n = \tilde{u}(t_n)$,
- $\Delta\tilde{u}_n = \tilde{u}_n - \tilde{u}_{n-1} \sim N(0, \sigma_u^2 \Delta t_n)$ a likviditási kereskedő által kereskedett mennyiség, ahol $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$
- $\tilde{v} \sim N(p_o, \Sigma_0)$ független a $\tilde{u}(t)$ folyamattól,
- $\tilde{x}(n)$ az informált kereskedő aggregált pozíciója t_n-ben,
- $\Delta\tilde{x}_n = \tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}$ az informált kereskedő által t_n-ben kereskedett mennyiség,
- $\tilde{p}$ a piactisztító ár t_n-ben.
- Az információhalmaz megváltozik, az informált kereskedő ismeri a korábbi árakat is, a piacvezető ismeri a korábbi kereskedett mennyiségeket, ezért i) $\tilde{x}_n = X_n(\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_{n-1}, \tilde{v})$; ii) $\tilde{p}_n = P_n(\tilde{x}_1 + \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{x}_n + \tilde{u}_n)$.
- Ebből az informált kereskedő kikövetkeztetheti a múltbeli $\Delta\tilde{x}_n$-eket és a piacvezető kikövetkeztetheti a múltbeli $\tilde{p}_n$-eket. $X=(X_1, \ldots X_N)$ és $P=(P_1 \ldots P_N)$ a kereskedési stratégia és az árazási szabály függvények vektorai.
- $\tilde{\pi}_n = \sum_{k=n}^{N} (\tilde{v} - \tilde{p}_k)\tilde{x}_k$ a profitfüggvény, $\tilde{p}_n = \tilde{p}_n(X, P)$, $\tilde{x}_n, = \tilde{x}_n(X, P)$ és $\tilde{\pi}_n = \tilde{\pi}_n(X, P)$.

Az egyensúly tulajdonságait vizsgálva, Kyle kijelenti, hogy ebben a modellben *az árak martingálfolyamatot alkotnak*, amelyeknek a volatilitása tükrözi azt a sebességet, amivel az információ beépül az árba; lineáris egyensúlyban az *árváltozások függetlenek* és nulla várható értékű normális eloszlást követnek. Mindez azért különösen izgalmas, mert egy olyan piac, amelyen többletinformációval rendelkező szereplő is van, nem felel meg azoknak a szokásos versenyzői feltételezéseknek, amelyekből az árváltozásokra vonatkozó függetlenséget, normalitást és az árváltozások folyamatára vonatkozó martingáltulajdonságot szokás megkapni.

A sorozatos aukció egyensúlyának meghatározása után a legérdekesebbek az informált kereskedő kereskedésének intenzitását időben mutató β_n, a piac mélységének lefutását megjelenítő λ_n és az információ árakba való beépülését tükröző Σ_n sorozatok. Ezeket megvizsgálva, az alábbiakat jelenthetjük ki:

8 Kyle [1985]-ben $\frac{v^2}{4\lambda}$ jön ki, míg az én eredményem (11) alapján $\frac{(\tilde{v} - p_0)^2}{4\lambda}$. Ennek a következtetések szempontjából nincs különösebb jelentősége.

Σ_n mutatja azt az információt, ami az informált kereskedő többletinformációjából még nem épült be az árba. Ez a sorozat időben monoton csökkenő. Bár az N . aukció után még $\Sigma_N > 0$, de elég kicsi. A növekvő zaj (σ_v^2) arányosan növeli a piac mélységét és az informált kereskedő profitját, ugyanakkor változatlanul hagyja az árak információtartalmát. Ha az informált kereskedő kezdeti információtartalma, $\Sigma_N^{1/2}$ nő, akkor a piac mélysége arányosan csökken, a bennfentes profitja pedig arányosan nő, mert ez a profit arányos $(\Sigma_n \sigma_v^2)^{1/2}$ -vel.

3.5. Folytonos aukciók

A sorozatos aukciókat követő részben Kyle folytonos modellben vizsgálja meg az egyensúly tulajdonságait. A folytonos modellben az alábbi alapegyenleteket vezeti be:

$$\begin{aligned} d\pi(t) &= \left[v - p(t) - dp(t)\right]dx(t) = \left[v - p(t)\right]dx(t), \\ dx(t) &= \beta(t)\left[v - p(t)\right]dt, \\ dp(t) &= \lambda(t)\left[dx(t) + du(t)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

A legrelevánsabb kérdés itt is az, hogy Σ_n és λ_n időben hogyan alakul. A diszkrét modellekben már megismert paraméterekre folytonos esetben a következőket kapja:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \left(\frac{\Sigma_0}{\sigma_u^2}\right)^{1/2}, \\ \Sigma(t) &= (1-t)\Sigma_0, \\ \beta(t) &= \frac{\sigma_u^2 \lambda(t)}{\Sigma(t)} = \frac{\sigma_u \Sigma_0^{-1/2}}{1-t}, \end{aligned} \tag{17}$$

Az analitikus eredményeket megvizsgálva, az alábbiakat lehet elmondani: látható, hogy $\lambda(t)$ konstans, azaz a piac mélysége állandó, ezért az árak volatilitása konstans, és az információ állandó sebességgel, fokozatosan épül be az árakba. Mivel $\Sigma(1) = 0$[9], ezért a kereskedés végére az informált kereskedő minden magáninformációja beépül az árakba. A véletlen változók normalitása és a piaci hatékonyság feltevéséből adódó martingál tulajdonság miatt az ár Brown-mozgást végez Σ_0 varianciával. Az informált kereskedő tudja, hogy az ár végül a $\tilde{v}$ likvidációs értékhez tart, de a piacvezető, aki nem ismeri $\tilde{v}$-t, úgy észleli, hogy az árváltozásoknak nincs driftjük. Az árak volatilitását a likviditási kereskedő határozza meg, így az informált kereskedő kereskedése kicsinek tekinthető. Az ár konvergenciáját mégis az informált kereskedő határozza meg, ugyanis az ő kereskedett mennyiségei között pozitív korreláció van. Az informált kereskedő várható profitja ($\Sigma_0^{1/2}\sigma_u^2$) megegyezik a likviditási kereskedő várható veszteségével, és épp duplája, mint az egyszeri aukció esetében.

3.6. A diszkrét és a folytonos modell egyensúlyának összevetése

Noha konstans Σ_0 és σ_u^2 mellett a sorozatos aukciós egyensúly tart a folytonos aukciós egyensúlyhoz, a két modell likviditási tulajdonságai nem azonosak. Az alábbiakban a likviditás Kyle által kiemelt dimenziói mentén vetjük össze a modelleket.

9 A folytonos modellben a kereskedési idő a 0 kezdő időponttól 1-ig tart, $t \in [0,1]$.

- *Szorosság*
  Míg a folytonos aukciós egyensúlyban a piac végtelenül szoros, azaz a pozíciót akár ingyen is meg lehet forgatni gyorsan, addig a sorozatos aukció esetén a piac nem végtelenül szoros, és a pozíció megforgatásának költsége annál nagyobb, minél rövidebb idő alatt akarja a befektető megtenni.
- *Mélység*
  A folytonos aukciós egyensúlyban a piac mélysége állandó, míg a sorozatos aukció esetén a piac mélysége nem konstans. A piaci mélység arányos a likviditási kereskedés nagyságával, és fordítottan arányos az árba még nem beépült magáninformáció mennyiségével.
- *Rugalmasság*
  A piac rugalmasságát mindkét modellben az informált kereskedő határozza meg. A folytonos aukciós egyensúlyban a rugalmasság ($\beta(t)$) és a kereskedés végén a piac végtelenül rugalmas lesz ($\beta(t) \to \infty, \tau \to 1$).
- Továbbá a mélység és a rugalmasság a modellben az informált kereskedő és a likviditási kereskedő létéből fakad.

Ebből világos, hogy a folytonos aukciós egyensúlyban a piac likviditása megfelel a Black által megadott kritériumoknak. A Kyle-modell érdeme, hogy mindezeket a tulajdonságokat maximalizáló viselkedést feltételező modellből vezette le, valamint hogy az informált kereskedő racionális feltételezésekkel él a piac szorosságára, mélységére és rugalmasságára nézve.

3.7. Végső következtetések, a modell jelentősége

A modell megmutatja:

- Az árváltozásokat a kereskedett mennyiségek függvényében modellezni nem inkonzisztens az árváltozások új információ függvényében való modellezésével.
- Az informált kereskedő monopolhelyzete nem gátolja meg, hogy a piac közepes értelemben véve hatékony legyen.
- Az árak állandó volatilitásához nem kell, hogy az információ folyamatosan keletkezzék, az egyszeri információs többlet is fokozatosan épül bele az árba.
- A hatékony és súrlódásmentes piac likviditási tulajdonságai levezethetők információs aszimmetriáció esetén.
- A sorozatos aukció diszkrét modellje konvergál a folytonos modellhez.

A modell némileg más szempontú, játékelméleti megközelítésben írt magyar nyelvű ismertetése megtalálható a Gereben és tsai [2005]-ben is.

4. A Glosten–Milgrom-modell

Glosten és Milgrom [1985] olyan formális modellt állít fel, amely a kontraszelekció (adverse selection) létével magyarázza a spread létrejöttét. Vizsgálják a spread nagyságát meghatározó tényezőket, az árak információtartalmának időbeli alakulását és a spread dinamikus viselkedését. Megmutatják, hogy a piacon megfigyelhető, realizált hozam meghaladja azt a hozamot, amit a többletinformációval nem rendelkező kereskedők realizálnak.

4.1. A modell leírása

A bid-ask spreadet magyarázó, korábbi megközelítések arra koncentrálnak, hogy a specialistának készletet kell fenntartania, és ez hogyan befolyásolja a spread nagyságát. Ez a cikk azt mutatja meg, hogy a spread tisztán *információs aszimmetriából* is származhat, és akkor is fellép, ha nincsenek tranzakciós költségek, és a specialista profitját a verseny nullára szorítja. Az alapötlet az, hogy a specialista *kontraszelekciós* (adverse selection) problémával szembesül, hiszen az a piaci szereplő, aki a specialista által jegyzett vételi vagy eladási árfolyamon kereskedni szeretne vele, tudhat valamit, amit a specialista nem tud. Ő ezeket a piaci szereplőket nem tudja szétválasztani, ezért úgy kereskedik, hogy az informált kereskedők (informed traders) – az egyszerűség kedvéért: bennfentesek – kereskedésén elszenvedett veszteségét a nem informált (uninformed), avagy likviditási kereskedőkön egyenlíti ki. A specialista ebből a célból hozza létre a bid-ask spreadet. A cikk az árak és a spread dinamikus viselkedésére összpontosít.

A modellben szerepel egy kockázatsemleges specialista, akinek nincsenek tranzakciós költségei, és várható profitja nulla. A modell az informált kereskedő információs előnyének rövid távú hatásait vizsgálja. Éppen a rövid táv miatt nincs benne diszkontálás, a fő kérdés, hogy az információt hogyan dolgozza fel a piac, hogyan épül be az árakba és hogyan hat a spreadre. Az árak alakulása közepes hatékonyságot mutat, sőt egy kevéssel több információt is tartalmazhat, mint ami nyilvánosan elérhető volt (amivel a specialista rendelkezett, amikor meghatározta az árakat).

4.2. A modell formális vázlata

A specialista meghatározza a vételi és eladási árfolyamokat, amiken részvényt hajlandó venni és eladni. A kereskedők két csoportra oszthatók: informált és likviditási kereskedők halmazára, és a specialista nem képes őket egymástól megkülönböztetni. A kereskedés menete során a specialista egyszerre csak egyetlen kereskedővel találkozik, aki az aktuális bid és ask árfolyamok megismerése után eldönti, hogy szeretne-e kereskedni, és venni vagy eladni szeretne. A kereskedett mennyiség mindig egyetlen részvény.[10] Az adásvétel megtörténte után a specialista megváltoztathatja az árjegyzését.

Tegyük föl, hogy a részvény értéke V, véges szórású valószínűségi változó ($V \geq 0$, $Var(V) < \infty$), ami a jövőbeli T_0 időpontban fog realizálódni. A modell minden szereplője kockázatsemleges, és az x darabból álló portfólióját a $\rho x V + c$ hasznossági függvény segítségével értékeli, ahol V a részvény értéke és c a szereplő fogyasztása. Az alacsony ρ-val rendelkező piaci szereplő a jelenbeli fogyasztást jobban preferálja a részvénybirtokláshoz

10 Az egyetlen részvényre vonatkozó megkötés elsőre erősnek tűnik, hiszen ezzel kizárják, hogy a venni vagy eladni szándékozott mennyiség függvényében differenciáljon a specialista. A kereskedők érkezésének folyamatára (arrival process) tett feltételezés hiánya viszont némileg elfogadhatóbbá teszi ezt a megkötést a szerzők szerint.

képest, mint a magas ρ-val rendelkező szereplő. A szerzők ezt a „likviditási” paramétert azzal magyarázzák, hogy i) a piaci szereplőknek nem egységes és nem tökéletes a pénzügyi piacokhoz való hozzáférése, ii) a szereplőknek a részvényre vonatkozó, szubjektív értékelése különböző. Normalizáljuk ρ-t úgy, hogy a specialista ρ-ja legyen 1. Ahhoz, hogy kereskedés legyen, szükségünk van arra, hogy ρ ne legyen egységes a piacon, azaz a piaci szereplők „likviditási” paramétere heterogén legyen.

Definiáljuk a következő információs halmazokat:

H_t a t időpontban nyilvánosan elérhető információ halmaza,
J_t az informált kereskedő információs halmaza a t időpontban,
S_t a specialista információs halmaza a t időpontban,
A_t az eladási (ask) ár a t időpontban,
B_t a vételi (bid) ár a t időpontban.

Jelölje Z_t a piaci szereplő részvényre vonatkozó értékelését a t időpontban:

likviditási kereskedő $Z_t = E(\rho_t V \mid H_t, A_t, B_t)$
informált kereskedő $Z_t = E(\rho_t V \mid H_t, J_t, A_t, B_t)$.

Feltehetjük továbbá, hogy ρ_t értékét a likviditási kereskedő esetén H_t, a bennfentesnél közösen H_t és J_t határozza meg. Így a piaci szereplők vesznek a t időpontban, ha $Z_t > A_t$ és eladnak, ha $Z_t > B_t$. Ezek alapján felírhatjuk a specialista t időpontbeli kereskedésére vonatkozó várható profitját:

$$\begin{aligned} Profit &= E\left[(A_t - V)\chi_{\{Z_t > A_t\}} + (V - B_t)\chi_{\{Z_t < B_t\}} \mid S_t\right] = \\ &= A_t P(Z_t > A_t \mid S_t) - E(V\chi_{\{Z_t > A_t\}} \mid S_t) - B_t P(Z_t < B_t \mid S_t) + E(V\chi_{\{Z_t < B_t\}} \mid S_t), \end{aligned} \tag{18}$$

ahol $\chi_{\{Z_t > A_t\}}$ és $\chi_{\{Z_t < B_t\}}$ indikátorfüggvények, amelyeknek az értéke 1, ha $Z_t > A_t$ vagy $Z_t < B_t$ és 0 egyébként.

A szerzők felteszik, hogy a specialista várható profitja minden kereskedésen 0, ezért

$$A_t = \frac{1}{P(Z_t > A_t) \mid S_t} E(V\chi_{\{Z_t > A_t\}}), \tag{19}$$

$$B_t = \frac{1}{P(Z_t < B_t) \mid S_t} E(V\chi_{\{Z_t < B_t\}}). \tag{20}$$

4.3. Eredmények

A szerzők a felállított modellben öt állítást fogalmaznak meg:

- *A bid és az ask közrefogja azt az árat, ami aszimmetrikus információ jelenléte nélkül lépne fel.*
- *A kereskedési árak martingálfolyamatot alkotnak.*
  Ezzel sikerült megcáfolni azt az addig elterjedt véleményt, hogy a rövid távú hozamokban rejlő, negatív autokorreláció a spread jelenlétének szükséges következménye. Sikerült olyan modellt építeni, amiben van spread, de nincs autokorreláció, sőt az

áralakulás az informált kereskedő jelenléte ellenére is martingálfolyamat. Az ilyen negatív autokorreláció abból a spreadből ered, ami a specialistának – a Glosten–Milgrom-modellben nem szereplő – tranzakciós költségeit és profitját fedezi. Ily módon az autokoreláció mértéke felhasználható annak a számszerűsítésére, hogy a spread mekkora része tudható be a többletinformációnak, és mekkora a specialista tranzakciós költségének és profitjának.

- *A többletinformációból (kontraszelekcióból) eredő spread korlátos.*
  Pontosabban: az átlagos spread négyzete szorozva a kereskedett mennyiséggel várható értéke korlátos. Ez sajnos csak korlátot ad, de nem határozza meg az átlagos spread nagyságrendjét.
- *A specialista és az informált kereskedő árvárakozásai konvergálnak.*
  Ez azt jelenti, hogy a többlet-információ a kereskedés menete során idővel teljesen beépül az árakba.
- *A spread tágul, azaz az eladási árak növekednek és a vételi árak csökkenek, ha a többletiformáció, a bennfentes információja jobbá válik; a bennfentesek aránya nő a piacon; vagy a likviditási keresedők kínálati és keresleti rugalmassága nő.*

4.4. Piacbezárás

A Glosten–Milgrom-modell egyik érdekessége, hogy előfordulhat olyan helyzet, amikor a piac „bezár” (market shutdown), azaz a specialista olyan vételi és eladási árfolyamot jegyez, amelyeken a piaci szereplők nem kereskednek. Mindez akkor fordulhat elő, ha az informált kereskedők aránya túl nagy a piacon, vagy az információik túl jók a likviditási kereskedők keresleti és kínálati rugalmasságához képest. Ráadásul az ilyen helyzet önmagát erősíti, hiszen a kereskedés épp az információ beépülését szolgálná. Ezért ha a piac egyszer „bezár”, akkor zárva is marad addig, amíg a bennfentesek el nem hagyják a piacot, vagy az információ (vagy legalább egy része) ismertté nem válik.

Ha valaki nem tud kereskedni, akkor ez a tény externáliaként hathat későbbi kereskedőkre, akiknek hiányzik az így be nem épült információ. A szerzők felvetik a kérdést: ez a jelenség esetleg azt is jelentheti, hogy létezhet olyan kereskedési rendszer, amelyik Pareto-értelemben hatékonyabb, mint a versenyzői specialista (competetive specialist system). A jóléti veszteség adott hányadáért biztosan az felelős, hogy a specialistának minden kereskedésen nulla profitot kell realizálnia. A cikk javaslata szerint mindenkinek a helyzetét javítani lehetne avval, ha valamekkora veszteséget és/vagy nyereséget megengednénk neki. Ennek egyik gyakorlati módja az lehet, ha megengedjük a specialistának, hogy bizonyos monopolista hatalommal rendelkezzék, de arra kötelezzük, hogy a spreadet adott sávon belül tartsa.

A cikk harmadik részében található példa egyrészt azt mutatja be, hogy az információ hogyan épül be az árakba, másrészt azt, hogy a túlzott bennfentes kereskedés hogyan vezet a piac „bezárásához”.

Glosten és Milgrom a cikk negyedik részében a modellt diszkontálással egészíti ki, és bemutatja, hogy a spread léte miatt a tranzakciókból megfigyelhető hozam meghaladja a likviditási kereskedők által ténylegesen realizálható hozamot.

A modell további érdekes következménye, hogy meg lehet vele magyarázni a főleg januárban fellépő kisvállalat-hatást.

5. „Kyle találkozik Glosten-Milgrommal”

Back és Baruch [2004] a piaci mikrostruktúra-elmélet két klasszikus modelljét, a Kyle és a Glosten–Milgrom-modellt hangolja össze. Mindkét modellben van informált kereskedő és likviditási kereskedő, akiknek a megbízásait a piacvezető saját készletéből elégíti ki, de míg a Glosten–Milgrom-modellben egyszerre csak egyetlen ajánlat érkezik, és az informált kereskedések intenzitása exogén módon adott (az informált kereskedők és a likviditási kereskedők arányától függ), addig a Kyle-modellben egyszerre nagyobb részvénymennyiségekkel kereskednek. Az első modellben nincs bid-ask spread, és az informált kereskedő úgy éri el a maximális profitot, ha fokozatosan kereskedik, a második modellben van spread, amit az a valószínűség határoz meg, hogy egy megbízás informált kereskedőtől származik, és az informált kereskedők úgy kereskednek, hogy minden egyes megbízáson a maximális profitot szeretnék realizálni, mintha több lehetőségük nem lenne a kereskedésre.

A szerzők olyan változatát mutatják be a Glosten–Milgrom-modellnek, ahol egyetlen informált kereskedő van, aki a kereskedési időpontokat optimálisan választja meg. A cikk egyik eredménye, hogy ebben a folytonos modellben endogén módon határozza meg a bid-ask spreadet, ami a likviditási és az informált kereskedések relatív érkezési intenzitásától (relative arrival rates) függ.

A cikk bebizonyítja, hogy a Glosten–Milgrom-modell fenti változata nagyjából azonos a Kyle-modell folytonos változatával, ha a megbízások mérete kicsi (trade size) és a likviditási ajánlatok gyakran érkeznek. Ekkor a megbízások mérete közti különbségtétel (egyetlen részvény vagy több részvény [„batched order”]) felesleges. Ugyancsak megmutatják, hogy ekkor a két modellben az informált kereskedő kereskedési stratégiája és profitja hozzávetőleg azonos, valamint azt is, hogy a Glosten–Milgrom-modell spreadje nagyjából a megbízás méretének kétszerese szorozva a Kyle-féle lambdával.

A szerzőpáros megmutatja, hogy ebben a Glosten–Milgrom-féle modellben bizonyos feltételek fennállása esetén az informált kereskedő véletlenszerűen választ a cselekvési alternatívái közt, beleértve azt is, hogy a „rossz” irányban kereskedik. Ezt a jelenséget „blöffölésnek” (bluffing) nevezik. Hangsúlyozzák ugyanakkor, hogy a blöffölésből nem profitál az informált kereskedő, és ezért nem érdemes azt gondolni, hogy a piacot manipulálja, hanem csak arról van szó, hogy egyensúlyban közömbös neki, hogy vesz, elad vagy vár. Már korábbi szerzők is bemutattak olyan modelleket, ahol előfordult blöffölés, de azokban a modellekben a korábbi kereskedéseket nyilvánosságra kellett hozni, és emiatt volt érdemes így cselekedni. Az alábbiakban formális eszközökkel is bemutatjuk a Kyle- és a Glosten–Milgrom-féle modelleket, majd ezek konvergenciáját.

5.1. A Kyle-modell

A Kyle-féle modellnek a cikk azt a változatát elemzi, amelyben Bernoulli-eloszlást követ a termék ára. A megfelelő változót $\tilde{v}$ jelöli. Ezt ismeri az informált kereskedő, azonban csak az exponenciális eloszlást követő időben lesz nyilvános ez az információ, és ekkor zárul le a kereskedés. Ezen eloszlás paramétere legyen r, a valószínűségi változó pedig τ. Az informált kereskedő által a t időpontban tartott részvények számát jelölje X_t, a piacon jelenlévő többi (nem informált) kereskedő összesen Z_t részvényt tart. Legyen Y_t=X_t+Z_t. Tegyük fel, hogy a piacon jelenlévő kiegyenlítési mechanizmusok eredményeképpen a pillanatnyi ár $p_t = E(\tilde{v} \mid Y_s, s \le t)$.

Az informált kereskedő vásárlási intenzitását θ (t) adja meg: tehát $X_t = \int_0^t \theta_s ds$ feltevésünk szerint Z_t Wiener-folyamat, melynek volatilitása σ^2. Ekkor tehát

$$dY_t = \theta_t \, dt + dZ_t . \tag{21}$$

Az informált kereskedő célja természetesen profitjának maximálizálása, ugyanakkor figyelembe kell venni azt is, hogy kereskedési stratégiája befolyásolja az árat is. A cikk első fő állításának tartalma, hogy feltételezve a termék árát megadó sztochasztikus folyamat valamilyen folyamatosztályba tartozását, létezik olyan egyensúlyi stratégia, amely a feltételezett kereskedési stratégia mellett éppen az adott árfolyamatot eredményezi, illetve a feltételezett árfolyamat mellett az egyensúlyi ponthoz tartozó, olyan kereskedési stratégia, amelyet a termék pllanatnyi ára határoz meg, optimális.

A megengedett stratégiák osztályát két feltételezés segítéségével definiáljuk. Egyfelől csak olyan kereskedési stratégiát veszünk figyelembe, amelynek az értéke a termék pillanatnyi árától (és a végső árától) függ. Tehát

$$\theta_t = \tilde{v}\theta_H(p_t) + (1-\tilde{v})\theta_L(p_t), \tag{22}$$

ahol $\theta_H(p_t)$ jelöli az informált kereskedő vásárlási intenzitását, feltételezve, hogy a termék valódi ára 1, θ_L (p_t) pedig a termék eladásának intenzitását azon feltétel mellett, hogy a termék ára 0. (Itt kihasználtuk, hogy $\tilde{v}$ értéke 1 vagy 0).

Másfelől kizárjuk azokat a stratégiákat, amelyek lehetővé tennék, hogy végtelen nagy profit (majd esetleg utána végtelen nagy veszteség) keletkezzék (és megfordítva), azaz feltesszük, hogy

$$E\int_0^\tau p_t\theta_t^+ dt < \infty , \quad E\int_0^\tau (1-p_t)\theta_t^- dt < \infty.$$

A nyilvános információhoz $(Y_s)_{s\le t}$ tartozó innovációs folyamat

$$dY_t - \phi(p_t)dt ,$$

ahol

$$\phi(p) = p\theta_H(p) + (1-p)\theta_L(p) .$$

Feltételezve ezt a kereskedési stratégiát, a termék árának alakulását az alábbi egyenlet írja le:

$$dp_t = \lambda(p_t)(dY_t - \phi(p_t)dt),$$

ahol (23)

$$\lambda(p) = \frac{p(1-p)(\theta_H(p) + \theta_L(p))}{\sigma^2} .$$

Abban az esetben, ha $\tilde{v}$ értéke 1, akkor az informált kereskedő várható nyeresége

$$E\left(\int_0^\tau (1-p_t)\theta_H(p_t)dt\right),$$

míg $\tilde{v}$=0 esetén

$$E\left(\int_0^\tau p_t\theta_L(p_t)dt\right) .$$

A (λ, ϕ, θ_H, θ_L) stratégiát egyensúlyi stratégiának nevezzük, ha egyfelől feltételezve, hogy az informált keresekedő a (22) egyenletben meghatározott stratégiát követi, a (23) által leírt folyamatra teljesül, hogy értéke éppen $E(\tilde{v} \mid (Y_s)_{s \le t})$. Másfelől pedig az adott (23) mellett az informált kereskedő éppen a θ_H és θ_L által meghatározott stratégiával maximalizálja nyereségét.

Tétel 5.1. *Jelölje N(.) a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét.*
Tetszőleges $0 < p < 1$ *esetén legyen* $\lambda^*(p)$ *az az érték, amelyre*

$$N\left(-\sqrt{\log\left(\frac{r}{\pi\sigma^2}\right)-2\log\left(\lambda^*(p)\right)}\right)=\min\left(p,1-p\right). \tag{24}$$

Ekkor a

$$\lambda^*,\phi^*=0,\theta_H^*(p)=\frac{\sigma^2\lambda^*(p)}{p},\theta_L^*(p)=\frac{\sigma^2\lambda^*(p)}{1-p}$$

függvények egyensúlyi pontot határoznak meg.

Továbbá, azon feltétel mellett, hogy a pillanatnyi ár p_t értéke éppen p valamely $t < \tau$ pillanatban, az informált kereskedő által a hátralévő kereskedési időben elérhető profit

$$\int_p^1 \frac{1-a}{\lambda^*(a)}da\,, \quad \text{ha } \tilde{v}=1\,,$$

$$\int_0^p \frac{a}{\lambda^*(a)}da\,, \quad \text{ha } \tilde{v}=0\,.$$

Végezetül, λ* folytonos, konkáv, a $p=\frac{1}{2}$-re szimmetrikus függvény, amelynek maximuma van ott.

Látható, hogy a profit nem függ a hátralévő időtől! Ez az exponenciális eloszlás örökifjú jellegéből következik.

Heurisztikus érveléssel nem nehéz belátni, hogy a tételben leírt stratégia valóban egyensúlyi pontot szolgáltat. Ehhez a Bellmann-elvet használjuk. (A bizonyításnak más eszközökkel kell történnie, mert a folytonos idejű esetben a Bellmann-függvény differenciálhatósága segíti az egyenlet megoldhatóságát, ezt viszont előre nem könnyű igazolni.) Tekintsük azt az esetet, amikor a termék ára 1. Jelölje a Bellmann-függvényt $V(p)$. Ha az informált kereskedő θ intenzitással kereskedik, akkor dt idő alatt – feltételezve a (23) dinamikát – az ár várható megváltozása $\lambda\theta t$–$\lambda\phi dt$. Tehát az árváltozásból adódóan V megváltozása $\lambda(\theta-\phi)V'dt$. A p volatilitása $\sigma^2\lambda^2$, tehát ebből fakadóan V értéke $\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2V''dt$-val változik. A V függvény értéke akkor is változik, ha a kereskedő halogatja kereskedését, hiszen az ár nyilvános bejelentése után nem lehet már profitra szert tenni. A τ feltételezett exponenciális eloszlása miatt, dt idő alatt mintegy rdt annak a valószínűsége, hogy V értéke nulla lesz. Tehát a Bellmann-függvény várható megváltozása

$$-rVdt+\lambda(\theta-\phi)V'dt+\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2V''dt\,.$$

Az optimális kereskedési stratégia esetén ezt a változást kell kompenzálnia a pillanatnyi kereskedésből származó profitnak. Ez utóbbi értéke

$(1-p)\,\theta\,dt$.

Azaz

$$(1-p)\theta - rV + \lambda(\theta - \phi)V' + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 V'' = 0\text{-nak}$$

kell teljesülnie. Mivel a Bellmann-függvény a lehetséges – hátralévő időtartamon megvalósuló – kereskedési stratégiák szerinti maximum, ezért a pillanatnyi kereskedési stratégia szerinti deriváltnak nullának kell lennie. Az előző egyenlet θ szerint lineáris, tehát

$$V'\lambda = p - 1,$$

így továbbá

$$rV = -\lambda\,\phi V' + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 V''$$

teljesül. A kapott differenciálegyenlet-rendszerből megkapható a tételben megfogalmazott, optimális kereskedési stratégia.

5.2. A Glosten–Milgrom-modell

A cikk következő részében a Glosten–Milgrom-modell egy változatát elemzik a szerzők. Az informált kereskedő továbbra is tudja $\tilde{v}$ konkrét értékét, amely Bernoulli-eloszlást követ. Exponenciális idejű τ adja meg a bennfentes információ nyilvánossá tételének idejét. Azonban most a feltételezés szerint a nem informált kereskedők vásárlásai és eladásai összességében külön-külön Poisson-folyamat szerint alakulnak. Ezen folyamatok intenzitása β, a megbízások mindig δ mennyiségre (order size) szólnak. A t pillanatig beérkezett összes nem informált megbízás száma z_t^+, az eladást z_t^- jelöli. $zt=z^+-z_t^-$ a nettó megbízás (number of orders). Ugyanígy az informált kereskedő esetében $x_t = x_t^+ - x_t^-$. $y_t=x_t+z_t$ a piacon jelenlévő teljes vásárlást írja le. Az informált kereskedő minden pillanatban ugyanakkorra nagyságú kereskedést végez, mint a többiek, hiszen egyébként felfedné informáltságát.

Ismét feltételezzük, hogy a pillanatnyi ár p_t értéke

$$p_t = E\left(\tilde{v} \mid (y_s)_{s\le t}\right). \tag{25}$$

A t pillanatban érvényes eladási (vételi) ár

$$\text{ask}_t = E\left(\tilde{v} \mid (y_s)_{s<t}, \Delta y_t = 1\right)$$
$$\text{bid}_t = E\left(\tilde{v} \mid (y_s)_{s<t}, \Delta y_t = -1\right)$$

Az informált kereskedő célja, hogy a

$$E\left(\delta \int_0^\tau (\tilde{v} - \text{ask}_t)dx_t^+ + \delta \int_0^\tau (\text{bid}_t - \tilde{v})dx_t^- \mid \tilde{v}\right)$$

várható nyereséget maximalizálja.

A szerzők ismét egyensúlyi stratégiát keresnek. Az árfolyamat struktúrájára vonatkozó feltevés mellett olyan optimális stratégia létezését, amely egyben biztosítja, hogy a (25) teljesüljön. A figyelembe vett folyamatosztály

$$dp_t = f(p_{t-})dt + \left(a(p_{t-}) - p_{t-}\right)dy_t^+ + \left(b(p_{t-}) - p_{t-}\right)dy_t^-, \tag{26}$$

ahol a, illetve b adja meg, hogy rögzített p_{t-} mellett mennyi az eladási, illetve vételi ár, illetve f adja meg, hogy mennyi az ár, ha nem történt tranzakció. Tehát a (26) egyenlet első tagja azt adja meg, hogy mennyivel változik az árfolyam, ha nincs tranzakció, második tagja azt, hogy mennyivel változik, ha valaki vásárolni akar, a harmadik pedig azt, hogy mennyivel változik, ha valaki eladni akar. Mivel τ eloszlása exponenciális, azaz örökifjú, ezért feltételezhető, hogy ezek a függvények nem függenek stacionárius helyzetben az eltelt időtől. Rögzített $f,a,b,$ függvények mellett kell a várható profitot maximalizálni.

Jelölje $\theta_{HB}(p_{t-})$ az informált kereskedő vásárlási intenzitását, azon feltétel mellett, hogy a végső ár értéke 1. Ugyanígy $\theta_{HS}(p_{t-})$ az eladási intenzitást, illetve ugyanezek a $\widetilde{v}=0$ esetén θ_{LB}, θ_{LS}. Ismét a τ exponencialitása miatt jogos annak feltevése, hogy ez nem függ expliciten az eltelt időtől, csak a pillanatnyi (vásárlás, illetve eladás előtti) ártól.

Az $f,a,b,\theta_{HB},\theta_{HS},\theta_{LB},\theta_{LS}$ függvények ún. egyensúlyi helyzetet eredményeznek, ha

$$a(p)=\frac{p\theta_{HB}(p)+p\beta}{p\theta_{HB}(p)+(1-p)\theta_{LB}(p)+\beta},$$

$$b(p)=\frac{p\theta_{HS}(p)+p\beta}{p\theta_{HS}(p)+(1-p)\theta_{LS}(p)+\beta},$$

azaz az eladási és vételi árra teljesülnek az

$$a(p_{t-})=E\big(p_t\,|\,(y_s)_{s<t},\Delta y_t=1\big),\quad b(p_{t-})=E\big(p_t\,|\,(y_s)_{s<t},\Delta y_t=-1\big)$$

egyenletek, továbbá

$$f(p)=\big(a(p)-p\big)p\theta_{HB}(p)+(1-p)\theta_{LB}(p)+p\beta$$
$$+\big(b(p)-p\big)p\theta_{HS}(p)+(1-p)\theta_{LS}(p)+p\beta\ ,$$

azaz az ár várható megváltozása abból adódik, hogy a t pillanat előtti ár az eladási árra, illetve a vételi árra változik az aktuális tranzakciónak megfelelően, végezetül pedig az adott $f,a,b,$ függvények által meghatározott árdinamika mellett a θ függvények családja adja a maximális nyereséget.

Tétel 5.2. *Tegyük fel, hogy adott f,a,b, függvények esetén az optimális kereskedésre vonatkozó Bellmann-függvény V, ha a tényleges ár* 1*, illetve* J*, ha a tényleges ár* 0*, eleget tesz a*

$$\lim_{p\to 0}V(p)=\lim_{p\to 1}J(p)=\infty\,,\quad \lim_{p\to 1}V(p)=\lim_{p\to 0}J(p)=0$$

feltevéseknek, továbbá V nem csökkenő, J nem növekvő függvény. Ekkor azon folytonosan deriválható $\theta_{HB}>\theta_{LB}$, $\theta_{HS}<\theta_{LS}$ függvények, amelyekre eleget tesznek az egyensúlyi helyzetben előírt fenti egyenleteknek, olyan optimális kereskedési stratégiát határoznak meg, amelyben (25) teljesül.

A cikk jelentősége a következőkben áll: i) a bid-ask spreadet endogén módon határozza meg; ii) bebizonyítja, hogy kis méretű megbízások (small trade size) és gyakori likviditási ajánlatok esetén a Glosten–Milgrom-modell fenti változata nagyjából azonos a Kyle-modell folytonos változatával; iii) illetve, hogy a Glosten–Milgrom-modell spreadje nagyjából a megbízás méretének kétszerese, szorozva a Kyle-féle lambdával. A szerzőpáros megmutatta továbbá, hogy előfordulhat: az informált kereskedő blöfföl.

6. A bid-ask spread modellek

A bid-ask spread modellek célja, hogy a spread nagyságáért felelős tényezőket azonosítsa, és azok hatását számszerűsítse. Természetesen ez olyan piacokon érdekes, ahol van bid-ask spread, tehát jellemzően árjegyzői piacokon (quote-driven market). Jó összefoglalását adják az ezzel kapcsolatos empirikus munkáknak *Bollen* és tsai [2001; 2004] cikkei. Az alábbiakban rövid bevezetés olvasható a bid-ask spread modellek elméleti alapjairól, elsősorban ezen két cikk, valamint *Csávás* és *Erhart* [2005] alapján.

6.1. A bid-ask spread modellek elméleti alapjai

A Bollen és tsai [2001; 2004] cikkek nyolc empirikus munkát összehasonlító részének bid-ask spreadet specifikáló regressziós egyenlete az alábbi:

$$SPRD = a_0 + a_1 OPC + a_2 IHC + a_3 ASC + a_4 COMP + \varepsilon, \tag{27}$$

ahol *SPRD* a jegyzett bid-ask spread (quoted bid-ask spread), *OPC* a megbízás végrehajtásának tranzakciós költsége (order processing costs), *IHC* a készlettartás költsége (inventory holding costs), *ASC* a kontraszelekciós költségek (adverse selection costs) és *COMP* a verseny, a koncentráció mérőszáma (competition).

Csávás és Erhart [2005] a magyar deviza- és állampapírpiac likviditásának vizsgálatakor némileg eltérő regressziós egyenletet használt:

$$SPRD = \alpha + \beta_1 VOL + \beta_2 FORG + \beta_3 KONC + \varepsilon, \tag{28}$$

ahol α a konstans, *VOL* a volatilitás, *FORG* a forgalom és *KONC* a koncentráció. A konstans a kereskedés fix költségét jeleníti meg.

A *volatilitás* a nyitott pozíció vállalásából eredő költségeket reprezentálja. Az árjegyző a piaci likviditás biztosítása érdekében készletet tart fenn, amiből kielégíti az ügyféligényeket. Nyitott pozíciót vállal akkor, amikor teljesíti az ügyfél megbízását, de ellentétes irányú tranzakcióval nem állítja vissza a készlet eredeti szintjét. Ezen kockázati faktort a készlettartás (inventory holding) kockázatának is nevezik, arra utalva, hogy az árjegyzőnek készletet kell fenntartania, hogy mindkét irányú (relatív) nyitott pozíciót fel tudjon venni. Mivel a kockázat – és így a bid-ask spreadben megjelenő költsége – a volatilitás növekedésével nőni fog, ezért a spreadnek a volatilitásra vonatkozó parciális deriváltja nagyobb lesz, mint 0.

A *forgalom* a tranzakciók végrehajtási költségének a spreadre gyakorolt hatását tükrözi. Az árjegyző tevékenységének nyilvánvaló költségei (munkaerő, elszámolás, engedélyek, szaktudás, technológia) a vételi és eladási ár különbségében fognak megjelenni. A forgalom azért lehet jó magyarázó változó, mert ezek a költségek nem nőnek a forgalommal arányosan, tehát fajlagosan csökkeni fognak, ha a forgalom nő. Így azt várjuk, hogy bid-ask spread forgalomra vonatkozó parciális deriváltjának az előjele negatív lesz.

A *koncentráció* ebben a specifikációban egyrészt a versenyt jeleníti meg, másrészt a kontraszelekciós költségeket. A szerzők úgy gondolkodnak, hogy minél nagyobb a verseny az árjegyzők között, annál kisebb a koncentráció, és annál kisebb spreadet várunk. A piaci szereplők információs heterogenitása miatt a piaci szereplők egy része jobban informált, mint az árjegyző, ami számára költséget jelent, ez pedig a spreadben csapódik le. Ha a forgalom nagy része néhány árjegyzőhöz köthető, akkor az a többi számára kontraszelekcós kockázatot jelent. A szerzők érvelése alapján mindkét tényező egy irányba hat, ezért a koncentráció növekedésével a spread is nőni fog.

A fenti két regressziós egyenletet, (28)-at és (29)-et összehasonlítva, annyi különbség látszik, hogy a második két kockázati faktort összevontan kezeli.

Bollen és tsai [2004] a korábbi empirikus munkák részletezése és a (27)-es egyenlet tárgyalása után rátérnek a konkrét formális modelljükre. Ebben a (29)-es egyenletet használják fel a becslésre.

$$SPRD_i = \alpha_0 + \alpha_1 InvTV_i + \alpha_2 HC_i + \alpha_3 InvND_i + \varepsilon_i, \tag{29}$$

ahol $SPRD_i$ a jegyzett bid-ask spread (quoted bid-ask spread), $InvTV_i$ a forgalom reciproka (inverse of trading volume), $InvND_i$ az árjegyzők számának reciproka (inverse of the number of traders making a market in the security)[11] és HC_i a fedezés költsége (hedging cost).

A *forgalom reciproka* a forgalomról korábban elmondottak miatt lesz jó közelítése a megbízások végrehajtási költségének (order processing costs), annyi többlettel, hogy a reciprok miatt a parciális derivált előjele épp ellentétes, azaz pozitív lesz.

Bollen és tsai [2004] úgy tekintették, hogy az *árjegyzők számának reciproka* a versenyt ragadja meg. Ekkor a derivált előjele pozitív lesz, hiszen a növekvő versenyt az árjegyzők számának növekedése kíséri, ez a reciprok csökkenéséhez vezet, miközben a spread csökkenését várjuk.

A *fedezés költsége* egyszerre jeleníti meg a készlettartási költséget (inventory holding cost) és a kontraszelekciós költséget (adverse selection costs). A szerzők nem próbálták elkülöníteni a két tényező hatását, mert abból indultak ki, hogy mindkettő abból a kockázatból ered, hogy az ár elmozdulhat, amíg az árjegyző saját készletében tartja az értékpapírt. Versenyzői piacon az ezért a kockázatért kapott kompenzáció épp az árfolyamkockázat fedezésének határköltsége lesz. Mekkora ez a költség?

Ha az árjegyző nem rendelkezik készlettel, de egy piaci szereplő vesz tőle értékpapírt, és ő elad neki, akkor azt a kockázatot futja, hogy az ár felfelé mozdul, mielőtt vissza tudja vásárolni a piacról. Ha a készlettel nem rendelkező árjegyzőnek eladnak egy részvényt, akkor azzal a kockázattal szembesül, hogy a részvény ára csökkenhet, mielőtt sikerül eladnia a részvényt. Az első esetben vételi opcióval (call), a második esetben eladási opcióval (put) tudja fedezni magát az árfolyamkockázat ellen. A szerzők európai típusú at-the-money (ATM) opciókat használtak a fedezésre, és ezek értékével közelítették a készlettartási költség és a kontraszelekciós költség összegét.

Az opciók értékét a (30)-as Black–Scholes-féle opcióárazási formulával (BS1973) lehet meghatározni.

$$\begin{aligned} c(S, T-t) &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \\ d_1 &= \frac{ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \end{aligned} \tag{30}$$

11 Az információs aszimmetria költségeinek reprezentálására részvénypiacok esetén szokás még a piaci kapitalizációt vagy a részvény specialistáinak számát is választani.

ahol c az európai típusú vételi opció (call) értéke, S az értékpapír (osztalékot nem fizető részvény) azonnali árfolyama, r a kockázatmentes loghozam, σ az értékpapír loghozamának volatilitása, $T–t$ az opció lejáratáig hátralévő idő és K az opció lehívási (kötési) árfolyama.

Mivel az opciók ATM-opciók, ezért $S=K$, valamint a rövid időtáv miatt a szerzők feltették, hogy a kockázatmentes loghozam nulla, ezért a (31)-es put-call paritást felhasználva azt kapjuk, hogy a put és a call opció értéke azonos.

$$c + Ke^{-r(T-t)} = p + S, \tag{31}$$

ahol p az eladási (put) opció értéke.

Alkalmazva (30)-at és a fenti egyszerűsítéseket, adódik, hogy

$$\begin{aligned} c + p &= 2\left[SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)\right] = 2\left[SN(d_1) - SN(d_2)\right] = \\ &= 2S\left[N(d_1) - N(d_2)\right] = 2S\left[N(0{,}5\sigma\sqrt{T-t}) - 1\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

A (32)-es képletbe behelyettesítve Bollen és tsai [2004] jelöléseit, megkapjuk a fedezés költségét, (33)-at:

$$HC_i = P_i\left[2N(0{,}5 \cdot \sigma_i\sqrt{T_i}) - 1\right], \tag{33}$$

ahol P_i az értékpapír ára, amelyen az árjegyző pozíciót nyit, *N()* a standard normális valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, σ_i a hozam szórása és T_i az árjegyző tartási periódusának (holding period) várható hossza. Észrevehető, hogy a T_i tartási periódussal szubjektív elem jelenik meg az elemzésben, valamint a bid-ask spread regressziójában magyarázó változóként szereplő HC_i fedezési költség nagyságát – a tartási perióduson kívül – végső soron az alaptermék volatilitása határozza meg.

A (29)-es abszolút spread becslése ekvivalens a (34)-es relatív spread súlyozott legkisebb négyzetek módszerével (weighted least square – WLS) történő becslésével. A kettő közti választásban az dönt, hogy a reziduumok hogy viselkednek.

$$\frac{SPRD_i}{P_i} = \alpha_0\frac{1}{P_i} + \alpha_1\frac{InvTV_i}{P_i} + \alpha_2\frac{HC_i}{P_i} + \alpha_3\frac{InvND_i}{P_i} + \nu_i. \tag{34}$$

6.2. A spread részei és a tranzakciós árak statisztikai tulajdonságai

Glosten [1987] egyrészt a bid-ask spread-et meghatározó tényezőket azonosítja, másrészt a bid-ask spread-nek a tranzakciós árak statisztikai tulajdonságaira gyakorolt hatását mutatja be. A korábbi tanulmányok rámutattak, hogy i) a bid-ask spread negatív autokorrelációt okoz a tranzakciós árakban; ii) a spread létezése miatt a mért átlagos hozam túlbecsüli a valódi átlagos hozamot; iii) a spread léte hamis varianciát eredményez, azaz a tranzakciós árakból becsült variancia magasabb, mint a hozamok igazi szórásnégyzete.

A szerző cikkében azt mutatja be, hogy a spread létrejöttének két fő oka van; egyrészt az árjegyző monopolhatalma, készlettartási költségei, tranzakciós költségei stb., másrészt a piacon jelen lévő információs aszimmetria, ami kontraszelekciót eredményez. Az árjegyző, Glosten és Milgrom [1985]-höz hasonlóan, azért (is) jegyez spread-et, hogy az informált kereskedőkkel való tranzakciókon elszenvedett veszteségét a likviditási kereskedőkkel való ügyleteken visszanyerje. A spread létrejöttének másik oka valóban a készlettartási költség, a tranzakciós költségek és a profit, ezért a szerző konklúziója az, hogy bármelyik spreadet becslő modellben legalább két faktort azonosítani kell.

Az alapvetően elméleti irányultságú cikk tételeinek a bebizonyítása után Glosten és Milgrom [1985]-höz hasonlóan arra a következtetésre jut, hogy a bid-ask spread-nek a tranzakciós árakra gyakorolt hatása nem pusztán a spread nagyságától, hanem annak összetételétől függ. A tisztán aszimmetrikus információból származó spread nem okoz negatív autokorrelációt a hozamokban, és a tranzakciós árakból becsült, átlagos hozam torzítása is attól függ, hogy a spread mekkora részéért felelős a kontraszelekció, és mekkora részéért a többi tényező.

6.3. A bid-ask spread modellek és a likviditás

A bid-ask spread modelleket használó, empirikus tanulmányok közül érdemes megemlíteni Glosten és Harris [1988], valamint *Stoll* [1989] cikkeit. Ezeken kívül Csávás és Erhart [2005] összefoglalja három bid-ask spreadet vizsgáló, empirikus cikk főbb eredményeit (*Galati* [2000], *Wei* [1994] és Huang–Masulis [1999]), de mivel jelen dolgozat fő témája a likviditás, és azon belül is főleg annak a magyar vonatkozása, ezért az alábbiakban az ő cikkük főbb eredményeit ismertetjük.

Csávás és Erhart [2005] kifejezetten azért becsült bid-ask modellt, hogy konkrét piacok, mégpedig a magyar állampapírpiac és az EUR/HUF devizapiac likviditását elemezni tudja. Amint az látható a korábbiakból, a bid-ask modellekben a likviditás több dimenziója is megjelenik a regressziós egyenletben, hiszen a függő változó is likviditási mutató, valamint a független változók közül a forgalom és a koncentráció is annak tekinthető. A szerzők által választott modell céljaiknak abból a szempontból is megfelel, hogy a gyakorlati tapasztalatok szerint inkább a forgalom és a koncentráció hat a spreadre, mint fordítva.

A másik szempontjuk az volt, hogy a modell képes legyen a volatilitás hatását is kezelni. Mivel a piac természetes működéséhez tartozónak vélik azt, hogy a volatilitás növekedésével a spread is nő, és ezt nem tekintik a likviditás csökkenésének, ezért a vizsgálatba nem a volatilitás szintjét vonták be, hanem a változásából generált idősort.

Az eredmények összefoglalásakor megállapítják, hogy a likviditásról csak több dimenzió (feszesség, mélység, szélesség, rugalmasság, azonnaliság) együttes vizsgálatával lehet következtetéseket levonni, sőt ezek elkülönült vizsgálata sem kielégítő, ezért összefüggéseikben tanulmányozták őket.

Az *azonnali devizapiaci bid-ask spread* és a volatilitás kapcsolatát vizsgálva, azt tapasztalták, hogy a volatilitás növekedésekor a spread gyorsan tágul, míg a volatilitás csökkenésekor a spread lassabban szűkül, amiből arra következtettek, hogy a devizapiaci árjegyzők óvatosan alakítják a spreadet. A forgalom és a koncentráció kapcsolatában megfigyelték, hogy a külföldiek jelenlétét tükröző együtthatók szignifikánsabbak lettek, amit azzal magyaráznak, hogy a külföldiek szerepe meghatározóbb lehet ezen a piacon, mint ahogy azt a forgalomból való részesedésük alapján gondolnánk. A vizsgálatok megerősítették azt a hipotézist, hogy a piac aktivitása hétfőnként magasabb, mint más napokon, amit a Monetáris Tanács hétfői kamatdöntő üléseivel, valamint a magyar és amerikai kereskedés közti időeltolódással magyaráztak. Nem találtak viszont bizonyítékot arra, hogy a devizapiac nyári aktivitása alacsonyabb lenne, mint az év többi részében. Végezetül megállapítják, hogy az elmúlt években a likviditás kis mértékben, de folyamatosan javult.

Az *államkötvénypiac* elemzése során azt tapasztalták, hogy az instrumentumok másodpiaci forgalmát – és így likviditását – a piacon lévő állomány nagysága egyértelműen befolyásolja, valamint, hogy az államkötvények likviditása a hátralévő futamidő függvényében csökkenő. Ennek ellenére a különböző futamidejű államkötvények bid-ask spreadje és forgalma erős együttmozgást mutat, ami az értékpapírok likviditása közti kapcsolatra utal. Nemzetközi összehasonlításban a magyar állampapírpiac alacsony likviditásúnak mondható.

Az azonnali devizapiac és az állampapírpiac lividitásának kapcsolatát illetően találtak arra utaló jeleket, hogy a két piac likviditása együtt mozog, különösen turbulens időszakokban.

7. Összefoglalás

A cikk bevezetést nyújtott a piaci mikrostruktúra elméletébe, bemutatta a szakterület legfontosabb kutatási kérdéseit, megismertetett két központi fogalommal, a bid-ask spreaddel és az order flow-val. Ezután ismertette a két alapmodell, a Kyle- és a Glosten–Milgrom-modell legfontosabb eredményeit, illetve egy tanulmányt (Back–Baruch [2004]), amely egységes keretbe foglalja a két modellt. A tanulmány végezetül a bid-ask spread modellek alapjait tárgyalta. Mindezt végig abban a szemléletben, hogy a piaci mikrostruktúra szakterülete mit tud mondani nekünk a pénzügyi piacok likviditásáról.

Nem kétséges, hogy sok információt szerezhetünk a likviditás és az áralakulás természetéről a szakterület módszereinek felhasználásával. A modellek inspirálta empirikus kutatások abban is segíthetnek bennünket, hogy a piaci likviditás mozgatórugóit feltérképézhessük, és a döntéshozók az elmúlt évek likviditási válságához hasonló helyzetekben megfelelőbb döntéseket hozhassanak.

Irodalomjegyzék

Back, K.–Baruch, S. [2004]: Information in securities markets: Kyle meets Glosten and Milgrom. *Econometrica* 72., 433–465. o.

Black, F.–Scholes, M. [1973]: The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy* 81. (3), 637–654. o.

Bollen, N. P. B.–Smith, T.–Whaley, R. E. [2001]: Modeling the bid/ask spread: on the effects of hedging costs and competition. Otago School of Business, Új-Zéland

Bollen, N. P. B.–Smith, T.–Whaley, R. E. [2004]: Modeling the bid/ask spread: measuring the inventory-holding premium. *Journal of Financial Economics* 72., 97–141. o.

Csávás Csaba–Erhart Szilárd [2005]: Likvidek–e a magyar pénzügyi piacok? A deviza- és állampapír-piaci likviditás elméletben és gyakorlatban. *MNB-tanulmányok* 44.

Das, S. [2005]: A learning market-maker in the Glosten–Milgrom model. *Quantitative Finance* 5. (2), 169–180. o.

Evans, M. D. D.–Lyons, R. K. [2005]: Meese–Rogoff redux: Micro-based exchange rate forecasting. NBER Working Paper Series (11042)

Gereben Áron–Gyomai György–Kiss M. Norbert [2005]: A devizaárfolyamok mikrostruktúra-megközelítése: a szakirodalom áttekintése jegybanki szemmel. MNB-tanulmányok 42.

Glosten, L. R. [1987]: Components of the bid-ask spread and the statistical properties of transaction prices. *The Journal of Finance* 42. (5), 1293–1307. o.

Glosten, L. R.–Harris, L. E. [1988]: Estimating the components of the bid/ask spread. *Journal of Financial Economics* 21., 123–142. o.

Glosten, L. R.–Milgrom, P. R. [1985]: Bid, ask and transaction prices in a specialist market with heterogeneously informed traders. *Journal of Financial Economics* 14. (1), 71–100. o.

Kyle, A. S. [1985]: Continuous auctions and insider trading. *Econometrica* 53. (6), 1315–1336. o.

Lyons, R. K. [2001]: The Microstructure of Exchange Rates. The MIT Press, London

Madhavan, A. [2000]: Market microstructure: A survey. *Journal of Financial Markets* 3., 205–258. o.

Meese, R. A.–Rogoff, K. [1983]: Empirical exchange rate models of the seventies, do they fit out of sample? *Journal of International Economics* 14., 3–24. o.

O'Hara, M. [1995]: Market Microstructure Theory. Basil Blackwell, Cambridge, MA

Stoll, H. R. [1989]: Inferring the components of the bid-ask spread: Theory and empirical tests. *The Journal of Finance* 44. (1), 115–134. o.