MEDVEGYEV PÉTER

A hasznossági függvények és a kockázatsemleges mérték[1]

A cikkben a pénzügyi válságban központi szerepet játszó, származtatott termékek árazásának a kérdését elemzem. A származtatott termékek árazásának legalapvetőbb koncepciója a kockázatsemleges mérték. Az elmélet legfőbb hiányossága az, hogy a pénzügyi elméletet a valószínűség-számítás és a sztochasztikus folyamatok keretében helyezi el, és azt a látszatot kelti, hogy elegendő a valódi mértéket kicserélni a kockázatsemleges mértékre, és az ott felírt modelleket a piaci adatokhoz kalibrálni. Ugyanakkor a kockázatsemleges mérték éppen a preferenciák által torzított valószínűségeket adja meg, így alapvetően a piaci szereplők preferenciáit, félelmeit, és nem a tényleges valószínűségeket tükrözi. Mivel ezek a preferenciák gyorsan változnak, a valószínűségi intuíció gyakran félrevezeti a döntéshozókat.

A gazdasági válság egyik közvetlen és fontos következménye, hogy világszerte megélénkült a vita a közgazdaságtan és általában a társadalomtudományok helyzetéről. Az ilyen irányú konferenciák, tudományos rendezvények megnyitásakor gyakran szokás felidézni *II. Erzsébet* angol királynőnek a London School of Economics épületében tett látogatásakor feltett kérdését: hogyan lehetséges az, hogy a nevezetes falak közt dolgozó, számos kiváló közgazdász közül egy sem látta előre a pénzügyi rendszer összeomlását? A kérdésre nincs egyszerű válasz. Már csak azért sincs, mert nem egészen világos az sem, hogy a válság a jelenleg uralkodó közgazdasági elméletek és iskolák csődje, vagy éppen ezek igazolása. Miközben a gazdaságot ért megrázkódtatások drámaisága vetekszik bármely katasztrófafilmmel, a legrosszabbat mégis sikerült elkerülni. Sok jel mutat arra, hogy sikerült kivédeni az elvileg elképzelhető, apokaliptikus forgatókönyveket. A demokratikus intézmények világszerte olajozottan és problémamentesen működtek. A világ számos országában a választók véleményt mondtak a regnáló politikai elitről, és új gazdaságpolitikai irányokkal való kísérletekre adtak felhatalmazást. Nem következtek be államcsődök, a kávét ez idáig nem kellett a tengerbe szórni, nem törtek ki forradalmak, éhséglázadások, senki sem kezdett el fegyverkezni, hogy szomszédjain torolja meg sérelmeit. Miközben a pénzügyi rendszer problémáit a közgazdász szakma nem látta előre, a válság következményeit, egyelőre úgy tűnik, sikeresen kezelte.

A pénzügyi válsággal kapcsolatos viták egyik központi kérdése a származtatott termékek elmélete, illetve az elmélet matematikája. Közismert, hogy a magyar pénzügyi rendszerben a származtatott termékek csak nyomokban voltak jelen. Hangsúlyozni kell, hogy ennek oka nem a hazai pénzügyi világ tudatos előrelátása volt, hanem sokkal inkább a

1 A cikk a Nemzetközi Bankárképző Központ és a Corvinus Egyetem Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszéke által szervezett *„Pénzügyi piacok likviditása”* konferencián elhangzott előadás alapján készült.

magyar pénzügyi élet periférikus jellege. Nagy a veszélye annak, hogy a hazai pénzügyi társadalom a kvantitatív módszerek iránti szkeptikus hozzáállással reagál, és – ahelyett, hogy feltárná például az oktatásban megjelenő elmaradottságát – ignorálja a pénzügyi matematikát, illetve általában a matematikai közgazdaságtant, és evvel helyrehozhatatlan kárt okoz, például a matematikaoktatáson keresztül a közgazdászképzés egészében.

A dolgozat első részében, néhány általános megjegyzést követően, röviden vázolom a kockázatsemleges árazás elvét. A dolgozat második részében a kockázatsemleges mérték és a hasznossági függvények kapcsolatát próbálom tisztázni.

A közgazdaságtan mint szubjektív tudomány

A közgazdaságtan – és általában a társadalomtudományok – jellegzetessége, hogy a területről kialakított kép visszahat magára a területre. Ennek egyik közismert példáját éppen a származtatott termékek ősatyja, az opciók területe szolgáltatja. Nem kétséges, hogy az opcióárazás elmélete, főleg annak példátlan eleganciája nagy szerepet játszott az opciók széles körű elterjedésében. Évezredek óta gyakran szokás hivatkozni *Platón* barlanghasonlatára.[2] A közgazdaságtanban nem csak arról van szó, hogy csupán a barlang falára eső képet látjuk, azt nem, ami a barlangon kívül van. A közgazdaságtanban ügyelnünk kell arra, ahogyan a képeket interpretáljuk, amilyen metaforákat alkalmazunk a képek leírásakor. Egy társadalom szempontjából távolról sem közömbös, hogy milyen ideológia, vagy ha jobban tetszik, elméleti közgazdasági eszmerendszer mentén próbálja magát megszervezni. Nagyon sokan – többek között például *Soros György* is – úgy gondolják, hogy a pénzügyi válságért azok az elméletek a felelősek, amelyek ideológiai megfontolásokból túlhangsúlyozták a piac öntisztító szerepét, és az állam szerepének visszaszorítása mellett érvelnek. Ez a vita nyilván soha nem fog befejeződni. Mind a két oldal számos történelmi példát idézhet. Nem kell a 20. század eseményeire hivatkozni, hogy az állami túlhatalom veszélyeit hangsúlyozzuk. A történelem lényegében az államok tehetetlenségeinek története. De az sem kétséges, hogy az állami szabályozás jelenkori csökkenése nem feltétlenül csak a hatékonyságot növelte, hanem igen gyakran a pénzügyi lángelmék útját is egyengette.

A gazdasági folyamatok objektivitása mélyen gyökerező elképzelés, amely gyakran együtt jár a reálgazdaság fogalmának hangsúlyozásával. Az emberi társadalomban lezajló folyamatok azonban nemcsak abban térnek el a természeti folyamatoktól, hogy a megfigyelő visszahat magára a folyamatra, vagyis nincs objektív külső valóság, hanem abban is, hogy a rendszer egységes egészet alkot, az egyes elemei nem izolálhatóak. Vagyis a reálgazdaság és a pénzügyi világ egységes, szétválaszthatatlan rendszert alkot. Az elválasztó határ szintén szubjektív, elmosódó, igen széles és sokszor illuzórikus. Ebből következően a reálgazdaság szembeállítása a pénzügyi világgal, mint a jó és a rossz vagy a fény és az árnyék elválasztása, igen veszélyes, és ezért óvatosan kezelendő. Ugyanis ahogyan nincs fény árnyék nélkül, vagy a rossz és a jó is gyakran csak nézőpont és ideológiai kondicionáltság kérdése, a reálgazdaság kívánatos támogatása a pénzügyi spekuláció rovására igencsak a visszájára fordulhat.

2 Platón: Az állam, VII. kötet, in: Platón összes művei II., Európa Könyvkiadó, Bp. 1984., 355–460. o.

A DISZKONTÁLT JELENÉRTÉK MINT AZ ÁRAZÁS ALAPELVE

Minden pénzügyi elmélet alapkérdése, hogy meg tudjuk-e mondani, magyarázni a pénzügyi termékek árát. A pénzügyi matematika céljaként sokan a kockázatkezelést jelölik meg. Ugyanakkor a kockázatkezelést megelőzően válaszolni kell a *„mi mennyi?”* nevezetes kérdésére. Hogyan kezeljük a kockázatot, ha nem tudjuk, milyen kockázatokról van szó? A pénzügyi kockázat egyedüli forrása az árváltozás[3], így a kockázatkezelés előtt az árakra ható tényezőket kell tisztázni.

A feltett kérdésre a pénzügyi elmélet válasza igen egyszerű: az ár éppen a várható jövőbeli kifizetések jelenértéke.[4] A válasz azonban igazi tautológia. Ugyanis két dolgot nem tudunk: mivel kell diszkontálni, és hogyan kell kiszámolni az átlagot, a várható értéket? Vagyis az átlag számolásakor milyen súlyokkal kell megszorozni az egyes lehetséges kimeneteleket?

A jelenérték számításakor két tényezőt kell figyelembe venni: az időbeliséget és a kifizetés kockázatosságát. Vagyis, hogy mikor kapjuk meg az adott összeget, és az összegnek mi a kockázata, azaz ténylegesen milyen értéket kapunk. Az időtartam és a kockázatosság azonban egyazon dolog elválaszthatatlan két oldala. A pénzügyi elmélet alapvető jellegzetessége a megfigyelhető adatokra való építkezés. Éppen ezért a diszkontáláskor általában a kockázatsemleges kamatlábat, az r-et szokás használni. Ennek kétségtelen előnye, hogy többé-kevésbé megfigyelhető és azonosítható a Magyar Nemzeti Bank alapkamatával, vagy valamifajta bankközi kamattal. Az átlagot természetes módon nem a tényleges valószínűségek szerint kell venni. Egyrészt a tényleges valószínűségek nem is adottak, ismertek, ugyanis a kísérlet nem ismételhető meg, nincsen rá történelmi tapasztalat, ugyanakkor a valószínűség intuitív fogalma erősen kötött a korlátlan ismételhetőséghez. Másrészt a tényleges valószínűségek érdektelenek. A legjobb és legtöbbet idézett példa a lottó, ahol a tényleges várható érték negatív, az ár mégis pozitív. De ha valamely befektetés várható értéke nulla, például azért, mert ½ a valószínűsége a sikernek és ½ a valószínűsége a kudarcnak, és az eredmény mind a két esetben azonos, a jelenlegi ár nem lesz nulla.

A jelenség nyilvánvaló oka, hogy a várható érték számolásakor való súlyok a tényleges kimenetek hasznosságától függnek. A diszkontáláskor használt tényező és a várható érték számolásakor használt súlyok összefüggnek. Ha az r segítségével diszkontálunk, akkor ez a módosított mérték éppen a nevezetes $\mathbf{Q}$ mérték, amelynek a természetét szeretnénk a cikkben tisztázni. Vagyis alapszabályként a következőt kell megállapítanunk: vagy a tényleges valószínűségek szerint vesszük a várható értéket, de akkor nem tudunk az r szerint diszkontálni, vagy az r segítségével diszkontálunk, de akkor a valószínűségeket módosítani kell.[5] Általában az r szerint diszkontálunk, és a várható értéket ezért a $\mathbf{Q}$ szerint kell venni. De hogyan határozzuk meg a $\mathbf{Q}$ mértéket? Nyilván a piaci adatok alapján, vagyis a modellünk paramétereit a piaci adatokhoz kalibráljuk! A pénzügyi elmélet kulcsszava a kalibrálás. Bármilyen modellt alkalmazunk, a modell paramétereit a valósághoz kell igazítani. Ezért

3 Beleértve a csődöt, amely esetben az ár esetleg nulla lesz.

4 Érdemes hangsúlyozni, hogy a válasz közvetlenül nem hivatkozik a kereslet-kínálat szabályára.

5 Ez persze nem jelenti azt, hogy ha nem az r szerint diszkontálunk, akkor a valós valószínűségeket kell venni. Pusztán arról van szó, hogy a két objektum egymásba átjátszható, és pusztán kényelem kérdése, hogy miként kombináljuk a kettőt.

mondtam azt, hogy a diszkontált jelenérték képlete tautológia. Mennyi az ár? Hát annyi, amennyi! Mindez triviális, és nagyon fontos, hogy az is legyen az olvasó számára. Az árakat nyilván nem absztrakt elvek, modellek, hanem a piac határozza meg. A modellek csak próbálják magyarázni, megértetni a miérteket. Minden modellben a kulcsprobléma a kalibrálás, vagyis a modell paramétereinek a tényleges piaci adatokhoz való igazítása.[6]

Nyilvánvalóan felmerül a kérdés, hogy akkor mi értelme van a modellezésnek. Ha a döntő lépés a kalibrálás, amely a megfigyelhető adatokra épül, akkor a modell semmitmondó és szükségtelen lenne?[7] Nem teljesen. A kalibrált modellről feltesszük, hogy a paramétereinek folytonos függvénye, következésképpen az ár akkor is megbecsülhető, ha közvetlenül nem figyelhető meg a piacon, de a szükséges paraméterekről van valamilyen elképzelésünk. Ez konkrétan azt jelenti, hogy feltesszük: a **Q** mérték kevés számú paramétertől, jól áttekinthető módon függ. Szélsőséges esetben például konstans.[8]

Mielőtt továbblépnénk, érdemes egy egyszerű példán szemléltetni a diszkonttényező és kockázatsemleges mérték kapcsolatát. Mivel csak az elveket szeretném tisztázni, a legegyszerűbb, mondhatni a legtriviálisabb példát mutatom be. Legyen S egy részvény, és tegyük fel, hogy az ára – amelyet $S(T)$-vel jelölünk – a Black–Scholes-modell nevezetes $dS=\mu Sdt+\sigma Sdw$ egyenlete szerint alakul. A modell a tényleges valószínűségek mellett van felírva, és a paramétereit statisztikai úton kell megbecsülni. Ilyenkor természetesen tudnunk kell az induló árat, amelyről az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy éppen 1. Tegyük fel, hogy ezt az árat valamilyen T időpontban való kifizetés diszkontált jelenértékeként akarjuk meghatározni. A sztochasztikus kalkulus elemi alkalmazásával könnyen kiszámolható, hogy a T időpontban az árat megadó valószínűségi változó éppen

$S(T) = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma w(T)\right)$. Ha most ezt az $\exp(\mu T)$ diszkonttényezővel diszkontáljuk, vagyis az árat megadó $S(T)$ valószínűségi változót elosztjuk evvel a diszkonttényezővel, akkor az $\exp(\sigma w(T) - \sigma^2 T/2)$ nevezetes exponenciális martingált kapjuk, amelynek a várható értéke a lognormális eloszlás várható értékének közismert és gyakran hivatkozott képlete alapján éppen 1. Ami nagyon jó, hiszen éppen ezt is akartuk. Mivel az ár alakulását leíró egyenlet éppen a valós valószínűségek esetén érvényes, ezért ezen diszkonttényező esetén a várható értéket is a valós valószínűségek esetén kell venni. Vagyis a várható értéket a matematikai pénzügyek szokásos jelölése mellett a **P** mérték szerint vettük. A kockázatokat a piac beárazta, és a folyamat μ paraméterében rögzítette. Ezért kellett ennek a segítségével kiszámolni a diszkonttényezőt. A μ a kockázatokat a valós valószínűség szerint árazta.

Eljárhatunk azonban másképpen is. Mivel diszkonttényezőként az $\exp(rT)$ kifejezést akarjuk használni, vagyis a kockázatsemleges kamatlábbal akarunk diszkontálni, a kockázatokat a mérték módosításával kell reprezentálnunk. Vagyis át kell térni a **Q** mértékre. Az áttérés során azonban ügyelni kell, hogy a megfigyelt árakra a modell illeszkedjen. Vagyis a **Q** szerint számolt ár is 1 maradjon**.** A standard pénzügyi irodalomból ismert, hogy a **Q** mértékre való áttérés során a T időpontban az ár az $S(T) = \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\overline{w}(T)\right)$

6 A modell minősége pedig attól függ, mennyire egyszerű a kalibrálás, és milyen gyakran kell a modellt újrakalibrálni.

7 Az ár ugyanis annyi, amennyi.

8 Éppen ez a helyzet a teljesség feltételezésekor.

alakúvá válik (miként közismert, a szigma nem változik), ahol a $\overline{w}$ szintén Wiener-folyamat, csak nem a **P**, hanem a **Q** mérték alatt. Ha most ezt a kifejezést az *r* szerint diszkontáljuk, újra egy exponenciális martingált kapunk, amelynek a várható értéke szintén 1. A számolások alapjául szolgáló sztochasztikus analízis igen impozáns épülete azonban nem takarhatja el azt az igen egyszerű tényt, hogy a modellt az ismert árakra kalibrálni kell, és mivel a diszkonttényező adott, ezért a mértéket kell módosítani.[9] Hogyan? Hát alkalmas módon, mégpedig úgy hogy a diszkontált jövőbeli kifizetés várható értéke éppen az ismert ár legyen.

A modellek teljessége és a dinamikus fedezés

Mivel a diszkontált jelenérték képletében diszkonttényezőként a megfigyelhető kockázatsemleges kamatlábat akarjuk használni, értelemszerűen vetődik fel a kérdés: mi legyen a **Q**? Ezen a ponton azonban az idáig elmondott, triviális gondolatmenet igen bizonytalanná válik. Alapjában véve két eset különböztethető meg. A két eset drámai módon eltér, és fontos, hogy evvel tisztában legyünk.

Először is mind a két esetben egy modellből kell kiindulnunk. Ha nincs modellünk, nem tudunk mit tenni. Csak a naiv kutató gondolja azt, hogy ő a közgazdasági valóságot képes közvetlenül megfigyelni. Miként a bevezetőben jeleztem, mindig egy ideológiai, elméleti szemüvegen keresztül nézzük a valóságot, a természettudományok relatív objektivitása a közgazdaságtanban nem adott. A kérdés csak az, hogy ez a modell formalizált vagy sem. A formalizált modellek számos előnnyel bírnak, és ne várja tőlem az olvasó, hogy ezt bármilyen formában tagadjam.

Bizonyos modelleknek – ilyen például a nevezetes Black–Scholes-modell – van egy igen figyelemre méltó tulajdonságuk, amit a modell teljességével szokás megadni. A teljesség jelző a modell két tulajdonságára utal. Egyrészt a modellt eredendően a valódi valószínűségek, a **P** alatt írták fel[10], másrészt a modellben a követelések a modell speciális tulajdonságai miatt fedezhetők. Vagyis a modellben felmerülő, bármilyen kifizetés előállítható az úgynevezett alaptermékekből képzett, önfinanszírozó portfólióval. A modell alaptermékei azok a termékek, amelyeknek a közvetlen modellezése a modell szerint a valós valószínűségek szerint történik. Természetesen az önfinanszírozás definíciója része a modellnek, így nem feltétlenül azonos avval, amit esetleg a naiv megközelítés annak gondol, de miként említettem, a modell és a valóság viszonya a közgazdaságtanban igen problémás, és a kapcsolat oda-vissza működik, így nem elegáns és célravezető a modell fogalmait és koncepcióit ezen a ponton megkérdőjelezni. Ha azonban az önfinanszírozó fedezés valamely kifizetés esetén megvalósítható, akkor egyszerű és igen kézenfekvő közgazdasági megfontolásokkal belátható, hogy a fedezett kifizetés ára levezethető a fedező alaptermékek árából, mégpedig matematikai úton.

9 Ez úgy jelenik meg, hogy meg kell határozni a kockázat piaci árát. A Black–Scholes-modellben a kockázat piaci ára matematikailag levezethető, de a legtöbb modellben csak statisztikailag határozható meg.

10 Ezt nem szokás a teljesség feltételei közé bevenni. Ha ezt is feltesszük, akkor a kamatlábmodellek nem teljesek, ugyanis az egyenleteket eleve a **Q** alatt írjuk fel. Ugyanakkor a kamatlábmodelleket az irodalomban teljesnek szokás tekinteni. A gondolatmenet természetesen akkor is érvényben marad, ha az alaptermékek kalibrálásával kapott mérték közvetlenül alkalmazható a modellben felmerülő, összes további kifizetésre. Ilyenkor persze nem világos, hogy az alaptermékekre miként kalibráltuk a modellt.

A pontos részletek közismertek, illetve a mondanivaló szempontjából érdektelenek. A lényeg a következő: teljes modellben a kockázatsemleges mérték meghatározásakor a kalibrációt elegendő az alaptermékekre elvégezni. A származtatott termékek kockázata a fedezéskor már kiküszöbölődött, vagyis a származtatott termékek nem hordoznak információt a kockázatsemleges mértékre nézve, és így modellezésük során nincsen extra kalibrációs fázis. Mivel az alaptermékek modellezése a valós valószínűségek mellett történik, a sztochasztikus folyamatok elmélete, illetve általában a valószínűségi gondolkodás helyénvaló, ugyanis a valós valószínűség megfigyelhető. Hangsúlyozni kell, hogy a valós valószínűség alatti modellezhetőség kérdését nem vizsgáljuk. Az, hogy ez lehetséges, az a teljes modell definíciójának része.

Mivel az ár éppen a diszkontált jelenérték, a diszkontálás módjának rögzítése esetén az alaptermékekre a kockázatsemleges mérték már adódik, ugyanis a kalibráció egyedül azt jelenti, hogy a jövőben esedékes árak diszkontált értéke éppen a jelenlegi megfigyelt ár legyen. Vagyis a kockázatsemleges mérték éppen az a mérték, amelyre nézve a diszkontált folyamat várható értéke az idő függvényében nem változik, konstans módon a jelenlegi, kalibrálandó ár. Ezt a jelenséget, vagyis azt, hogy a várható érték az időben nem változik, a matematikában úgy mondják, hogy a diszkontált árfolyamnak a kockázatsemleges mérték mellett martingált kell alkotnia. Vagyis teljes modell esetén a kockázatsemleges mérték független a kifizetéstől, és azonos a teljességet biztosító alapfolyamatok martingálmértékével. Ugyanezt egy kicsit másképpen fogalmazva: a kalibráció éppen azt jelenti, hogy a valós árak alatt megfigyelt folyamatok alatt kicseréljük a mértéket, és az új mérték alatt az alaptermékek martingált[11] fognak alkotni.

Mi történik azonban, ha a modell nem teljes? A nem teljesség több formában is megjelenhet. Egyrészt nem tudjuk kijelölni azokat az alapfolyamatokat, amelyeket a **P** alatt modellezni tudunk. Másrészt, ha mégis vannak megfigyelt sztochasztikus folyamataink, ezek nem elegendően informatívak ahhoz, hogy a modellező feltehesse: a modellben vizsgálandó további változók ezen megfigyelt folyamatok függvényei. Ilyenkor a tényleges ár meghatározása minden termék esetén nyilvánvalóan csak kalibrációval történhet. Ugyanakkor gyakran nincsen elegendő adat a kalibráció elvégzéséhez. Leginkább azért, mert például nincs aktív piac, amely a kalibrációhoz szükséges adatokat szolgáltatja. Vegyük észre, hogy a probléma eléggé megoldhatatlannak tűnik. Ha van elég adatunk a kalibrációhoz, és a termék aktív piaccal rendelkezik, nem kell, vagy legalábbis nem feltétlenül szükséges a terméket modellezni. Ott a piac, elég az árat leolvasni. Ha azonban nincsen aktív piac, modellezni kell, de a kalibráció nem végezhető el más termékek adatai alapján, mivel a modell nem teljes. Mégis, mit lehet ilyenkor tenni?

A hasznossági függvények és a kockázatsemleges mérték

Nyilván nem túl sokat. Elvi szinten a megoldás nagyon egyszerű: az árakat a kereslet-kínálat egyensúlya határozza meg. Ezek mögött a piaci szereplők hasznossági függvényei húzódnak meg. A gond az, hogy éppen ez a kulcsváltozó közvetlenül nem megfigyelhető.

11 Vagyis a misztikus martingáltulajdonság pontosan azt jelenti, hogy a kalibrált modellben a diszkontált jövőbeli kifizetések várható értéke az éppen aktuális ár, vagyis a termékre alkalmazható a várható jelenérték szabálya.

A pénzügyi modellezés alapvető kiindulópontja az, hogy megpróbál megfigyelhető adatokra építeni. A hasznossági függvény és ezért a **Q** mérték közvetlenül nem megfigyelhető. Mivel a **Q** végső soron a hasznossági függvények kompakt formában való megjelenése, a hasznossági függvények pedig gyorsan változnak, ezért a historikus adatokra támaszkodás nem lehetséges. Hiába tudjuk historikusan például a bedőlési valószínűségeket, a tényleges CDS-árakra ezek alapján semmit sem lehet mondani. Sőt, ha pontosan tudnánk is a jövőbeli bedőlési valószínűséget, a CDS-ár meghatározásában ennek igen csekély szerepe lenne.[12] Ugyanis a CDS-ár nem biztosítási kategória, hanem a kereslet-kínálat alapján meghatározott ár, amelyben elsősorban a piaci szereplők félelmei vannak a piaci mechanizmus által átláthatatlan módon összecsomagolva.[13]

Érdekes módon a matematikai pénzügy erre a megoldhatatlan problémára viszonylag egyszerű módon reagált: feltette, hogy a **Q** mérték ismert és konstans.[14] A legtöbb pénzügyi matematikai modellezéssel foglalkozó könyv előbb-utóbb a következő nevezetes mondatokat tartalmazza: mivel a piacról feltehetjük, hogy arbitrázsmentes, ezért az eszközárazás első alaptétele szerint létezik **Q** kockázatsemleges mérték. A továbbiakban a várható értékeket mindig a **Q** alatt vesszük, így az egyszerűség kedvéért a **Q** jelölését elhagyjuk.

Természetesen a modellek paramétereket tartalmaznak, és így a **Q** végső soron függ a paraméterektől, így a modellek alapján levezetett képletek a végén a paraméterekkel a piaci adatokra kalibrálhatók. Ha a kalibráció jól elvégezhető, akkor a kalibrált modell természetesen bepillantást nyújt a probléma szerkezetébe. A kalibrált modellből visszaszámolható a **Q**, amiből pedig következtethetünk a megfigyelhetetlen kockázati preferenciákra.

Mi akkor a probléma evvel a megközelítéssel? Elvileg önmagában semmi, valójában azonban rengeteg. Talán a legegyszerűbben a CDO-árazás példáján lehetne jól megvilágítani a lehetséges nehézségeket és csapdákat.[15] Miként közismert, a CDO mögött levő termékek bedőlése esetén a CDO különböző tranchei egymás után veszik fel a bedőlt termékek okozta veszteségeket. Miként közismert, a CDO árazásakor a problémát az együttes bedőlések modellezése okozza. Mivel természetes módon az árazáskor a diszkonttényező az *r*-re épül, a modellezés a kockázatsemleges mérték alatt történik. Vagyis amikor az együttes bedőlés valószínűségét felírjuk, vagy a csődesemények korrelációjáról beszélnünk, akkor ezeket mind a kockázatsemleges mérték esetén kell venni. Valószínűség-számítási nyelvet használunk nem valószínűségi problémára. Például az egymást követő csődök között eltelt időkről feltesszük, hogy ez az idő exponenciális eloszlású. Vagyis feltesszük, hogy a csődfolyamat Poisson-folyamatot alkot. Ez igen kényelmes matematikailag. De ezen kívül milyen

12 Mindig érdemes a lottóárakra gondolni. A játékban a valószínűségek vagy a várható nyeremények pontosan ismertek, de ez az információ csak igen áttételesen hat az árakra. Az árat elsősorban a nyeremények relatív hasznossága határozza meg. Hasonló a helyzet a CDS-ek esetén is.

13 A tapasztalatra hivatkozva, a magyar CDS mögötti valószínűség nulla. És ez igaz a görögre és az ukránra is, ugyanis a kedvező/összes arány nulla, lévén a számláló nulla.

14 Miként ismert, az eszközárazás második alaptétele szerint az egyértelmű **Q** éppen a teljességet jelenti. Ha a piac nem teljes, akkor termékenként más a **Q**.

15 De hasonlóan problémás például a CDS-árak interpretálása is. Ezeknek a változását gyakran szokás a csődvalószínűség megváltozásával magyarázni. Ez azonban nyilvánvalóan abszurd. Már önmagában is kérdéses, hogy egyszeri, megismételhetetlen esemény esetén érdemes-e valószínűségről beszélni. De még ha el is fogadjuk a valószínűség koncepcióját, a CDS-árak számos más tényezőt is visszatükröznek. Ha mást nem, a piac likviditását, a piaci szereplők globális kockázati preferenciáit stb.

alapon tesszük ezt? Természetesen rendkívül sok olyan matematikai tétel van, amely arra utal, hogy a lehetséges várakozási idők eloszlása exponenciális. A Poisson-folyamat számos valós rendszer modellezésére kiválóan alkalmazható.[16] Talán a legáltalánosabb feltétel, amelyből az exponenciális várakozási idő következik, a homogén Markov-folyamatokra vonatkozó tétel.

Miért alkotnának azonban homogén Markov-folyamatot a bedőlési események? Már az is kérdéses, hogy ez teljesül-e a valós valószínűség esetén, ugyanis miért függ ebben a konkrét esetben, vagyis a csődfolyamat esetén, a jövő becslése csak a jelen állapottól? Számos statisztikai elemzés mutat arra, hogy létezik a „rating drift”-nek nevezett jelenség, amely szerint a ratingállapotok közötti átmenet-valószínűség függ attól az úttól, ahogyan a jelen állapotba eljutottunk.[17] Vagyis nem mindegy, hogy egy adott ratingállapotba lentről vagy fentről érkeztünk. A markovitás a valós valószínűségek esetleg még valamifajta logikával, egyszerűsítő feltétellel talán indokolható is lenne. De miért igaz mindez a kockázatsemleges világban[18], ahol a valószínűségek csak metaforák, amelyekkel a preferenciákra utalunk? Az árnyékok, amelyek a barlang falára rávetülnek, éppen a hasznosságok, félelmek által alkotott világ árnyai. Nem mindegy azonban, hogy hogyan, milyen metaforákban írjuk le ezeket a képeket. Attól, hogy valószínűség-számítási nyelven beszélünk róla, az árnyak nem lesznek sztochasztikusak. Ha egy nem sztochasztikus világ árnyairól sztochasztikus nyelven gondolkodunk, könnyen félreérthetjük a barlangon kívül zajló eseményeket. Ha valaki valószínűség-számítási metaforákban gondolkodik, természetes módon adódnak a modellezési eszközök. Például az, hogy az együttes eloszlásokat normális eloszlással közelítjük, a kapcsolatokat korrelációval mérjük stb. Számos okból. Egyrészt tételek tömege utal arra, hogy a normális eloszlás jó választás, másrészt egy sor tapasztalat is ezt támasztja alá. Természetesen mind a matematikai tételek, mind az erre épülő tapasztalat a „valós” valószínűségek alatt érvényesek, és semmit sem mondanak a kockázatsemleges világról.

A valószínűség-számítás axiómáinak gyakran hangsúlyozott eleme, hogy a valószínűség eleve adott. Annak nagyságát nem vitatjuk, a valószínűség része a modellezési környezetnek. Külső adat. A valószínűség-számítás ezekkel a már eleve adott súlyokkal számol. Az igazi kérdés mindig az: mennyi az eredeti, a priori valószínűség? Ez azonban nem matematikai, hanem alkalmazói probléma. A modellező feladata, hogy a valószínűségeket megadja. A megadott valószínűségek következményeivel már a valószínűség-számítás eszköztára számol.[19] Az induló valószínűségeket az esetek egy részében statisztikai módszerekkel szokás meghatározni.[20] Az esetek egy széles csoportjában azonban a terület ismeretében az intuíciónkra támaszkodva adjuk meg a valószínűségeket. A tipikus eset a klasszikus valószínűségi mező, vagy a geometriai valószínűség. De a Black–Scholes-egyenleteket a pénzügyi matematikában sem a statisztikára, hanem a pénzügyi intuícióra hivatkozva adjuk meg: pénzügyi intuíciónk alapján feltesszük, hogy a befektetőket csak a hozam érdekli, és ugyancsak pénzügyi tapasztalataink, intuíciónk alapján feltesszük, hogy a hozam számos

16 Gondoljunk csak a sorban állási modellek egész családjára.
17 Miként ismert, a lejtőn nincs megállás.
18 Azon kívül, hogy ez így egyszerű. Mivel a kockázatsemleges világban nem lehet statisztikai indoklással élni, csak az elvi indoklás marad. Ha azonban ez is eltűnik, mi marad?
19 Ezért szerepel a tudományterület nevében a számolás szó.
20 Vagy ha jobban tetszik, kalibrálni.

tényező függvénye, ezért a hozam eloszlása normális.[21] A modell kerete egyértelműen a sztochasztikus-pénzügyi intuíciónkra épül.

A véletlen az egyik alapvető közvetlen tapasztalatra épülő fogalom, amellyel mindenki számtalanszor találkozik. Részben a gyermekkorban játszott játékok, részben az állandóan minket érő, véletlen hatások miatt mindenki rendelkezik egy elég pontos, intuitív képpel a véletlenről. Későbbi tanulmányaink során ez a kép pontos megalapozást nyer.[22] Ennek megfelelően a véletlenről alkotott elképzeléseinket a tér és idő kategóriájával azonos módon érzékelt, objektívnek tűnő belső kép határozza meg. Ez a kép azonban a valódi véletlenre, ha úgy tetszik, az objektív véletlenre, a **P**-re vonatkozik. De mire megyünk evvel a belső képpel, ha a helyzet, amit a véletlen nyelvén leírunk, nem véletlen, hanem csak a véletlen nyelvén elmondott, bonyolult modellhelyzet? Ilyenkor az intuíciónk nem működik helyesen.

A **Q** alatti modellezés metodológiájával a legnagyobb gond a metaforák és nem az alkalmazott módszertan, konkrét képletek szintjén van. Mindaddig, amíg tisztán látjuk a valószínűségi metafora korlátait, addig a **Q** alatti árazás a matematika egyik legszebb és legtermékenyebb alkalmazása a közgazdaságtanban. És tegyük hozzá: több évtizedes tapasztalat alapján a leginkább verifikált közgazdasági alkalmazás is. Ha azonban elfeledkezünk arról, hogy a **Q** alapjában a befektetői preferenciákat közvetíti, és a legfőbb gond nem az, hogy a **Q** ismeretében hogyan kell a számításokat elvégezni, hanem az, hogy a **Q** folyamatosan változik, hibás módon jelöljük ki a központi problémát. A **Q** ismeretében a pénzügyek szerintem tényleg pusztán matematika. Mint ahogy elvileg a hasznossági függvények és a vagyonok ismeretében a közgazdaságtan is elvileg puszta optimalizáció és játékelmélet. Ugyanakkor a **Q** változásának szabályai nem ismertek, és valószínűleg nem lehet olyan modellt felírni, amellyel ezt meg lehet tenni. Vagyis a modelleket folyamatosan kalibrálni kell, a kalibrált modelleket azonban csak nagyon rövid távú előrejelzésekre lehet használni.

A valószínűség-számításban a **P** axiomatikusan adott, fix, konstans és előre ismert. A pénzügyekben a **Q** nem adott, nem ismert, sőt folyamatosan és valószínűleg nem folytonos módon változik. A modern sztochasztikus folyamatok elmélete a matematika egyik csúcsteljesítménye. Mivel része a valószínűség-számításnak, alkalmazni csak fix és ismert valószínűség esetén lehetséges. Matematikai szempontból mindegy, hogy a valószínűséget a **P** vagy a **Q** szimbólum jelöli. Ha a pénzügyi elméletet a sztochasztikus folyamatok elméletére építjük, gazdag eszköztárat alkalmazunk. Ez a módszertan nagyban hozzájárult a modern pénzügyi elmélet és gyakorlat kiépítéséhez, a pénzügyi világ eseményeinek intellektuális megértéséhez. Ma a világon minden egyetem hirdet sztochasztikus folyamatok kurzust közgazdászoknak. A sztochasztikus folyamatok elméletének ismerete nélkül a pénzügyi irodalom nem dolgozható fel. A martingál fogalma, amely megszületésekor egy furcsa matematikai érdekesség volt, ma a pénzügyi nyelv, fogalomrendszer bevett eleme. A valószínűségi intuíció áthatotta a teljes pénzügyi nyelvet és gondolkodást. Sajnálatos módon például a CDO-k népszerűsége éppen azt mutatta, hogy az emberek összekeverték a komplex piaci folyamatokat a véletlen folyamatokkal. Ha nem így lett volna, elképzelhetetlen, hogy bárki elhiggye: egy CDO-négyzet, vagyis egy CDO-kból álló CDO működőképes,

21 Az megint másik kérdés, hogy a kiinduló hipotézist aztán az adatokon tesztelni kell. Az ebből a tesztelésből származó statisztikai irodalom cáfolja a kiinduló feltételt. Ugyanakkor ez senkit sem zavar igazán, és az, hogy az adatokkal nem egyezik, nem a modell teljes elvetését, hanem csak módosítását eredményezi.

22 Például megtanuljuk, hogy a nulla valószínűségű esemény nem különböztethető meg a lehetetlen eseménytől.

és nem szemfényvesztés. A bonyolult rendszerek véletlenszerű viselkedést mutathatnak. A komplexitás leírására gyakran igen hatékony eszköz a véletlen. De egy komplex rendszer időnként mutathat igencsak nem véletlenszerű elemeket. Például egyszer csak a korábban koordinálatlannak tűnő elemek hirtelen tartósan elkezdenek egy irányba mozogni, ami egy valódi véletlen rendszerben nem fordulhatna elő. Lehet mondani, hogy ilyenkor a korrelációk megváltoztak, de ez csak nyelvi megoldás, és nem valódi magyarázat.

A pénzügyek legfőbb törekvése az, hogy megfigyelhető, verifikálható és egyszerű modelleket dolgozzon ki. A diszkontált jelenérték modell, vagy ami ugyanaz, a kockázatsemleges mérték alatti modellezés módszertana a közgazdaságtan talán egyetlen olyan eredménye, amely az általános tudományos közösség figyelmét és elismerést kivívta. Ez a figyelem azonban nem homályosíthatja el azt az egyszerű tényt, hogy bár a természettudomány nyelvén beszélünk, a pénzügyek mégis a közgazdaságtan részei.

Irodalomjegyzék

Baxter, M., Rennie, A. [2002]: Pénzügyi kalkulus. Typotex, Budapest

Björk, T. [1998]: Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford University Press, Oxford

Cochrane, J. H. [2001]: Asset Pricing. Princeton University Press, Princeton

Delbaen, F.–Schachermayer, W. [2006]: The Mathematics of Arbitrige. Springer, Berlin

Hansen, L. P.–Richard, S. F. [1987]: The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models. *Econometrica*, Vol. 55., No. 3., 587–614. o.

Elliott, R. J. [2005]: Mathematics of Financial Markets. 2. Ed., Springer, New York

Hull, J. C. [1997]: Options Futures and Other Derivatives. Prentice Hall, London

Karatzas, I.–Shreve, S. E. [1998]: Methods of Mathematical Finance. Springer, New York

Magill, M.–Quinzii, M. [1996]: Theory of Incomplete Markets. MIT Press, Cambridge, Massachusetts

Medvegyev Péter [2009]: A származtatott termékek árazása és annak problémái az egyensúlyelmélet szempontjából. *Közgazdasági Szemle*, 56/6,769–789. o.

Musiela, M.–Rutkowski, M. [1997]: Martingale Methods in Financial Modelling. Springer, Berlin

Oksendal, B. [1998]: Stochastic Differential Equations. 5. Ed., Springer, Berlin

Ross, S. M. [1999]: An Introduction to Mathematical Finance. Cambridge University Press, Cambridge

Shiryaev, A. N. [1999]: Essentials of Stochastic Finance. World Scientific, Szingapúr

Száz János [1999]: Tőzsdei opciók vételre és eladásra. Tanszék Kft., Budapest