Havran Dániel–Koncz Gábor

Hitelbedőlések együttes modellezése: számít-e a korreláció?[1]

A banki háztartási és nem pénzügyi vállalati hitelportfólió-állományának minősége együtt mozog (különösen válság idején), azonban ezt az együttmozgást sokszor figyelmen kívül hagyják a mikro- és makromegközelítésű elemzésekben. A tanulmányban azt vizsgáljuk, hogy érdemes-e figyelembe venni a bedőlési valószínűségek *(probability of default)* együttmozgását. Csődintenzitás-alapú modellekkel többféle korrelációs struktúra mellett (Gauss, Gumbel és Frank-kopula) szimuláljuk a hitelportfóliók bedőlési rátáját és a forward csődvalószínűségeket, amelyekre standard kockázati mértékeket (VaR, expected shortfall – ES) számolunk.

1. Bevezetés

A pénzügyi válsághoz kapcsolható jelenség Magyarországon, hogy a banki hitelportfóliók minősége romlott. A késedelmes fizetések és a nemfizetések aránya az elmúlt időszakban jelentősen emelkedett, ezzel párhuzamosan a várható csődráták – a bedőlési valószínűségek (*probability of default*) – is nőttek. Az MNB (*Balás* [2009]) stabilitási jelentéséből kiderül, hogy a 90 napon túli késedelmes fizetések aránya a nem pénzügyi vállalatok tartozásainál körülbelül 7 százalékra, a háztartási portfóliónál mintegy 6 százalékra emelkedett a 3 százalék körüli szintről. A 90 napon felüli késedelmes fizetések már gyakorlatilag hitelveszteséget jelentenek.[2]

Az *1. ábra* szemlélteti a magyarországi bankrendszerben szereplő hitelek késedelmes fizetéseinek állománydinamikáját. Az itt megfigyelhető hitelportfólió-romlás a korábbi gyakorlathoz képest a bankoktól nagyobb mértékű tartalékolást is megkíván. Fontos azonban megjegyezni, hogy más a mikroszintű és más a makroszintű kockázat jellege. Míg mikroszinten az egyes bankok saját hitelportfóliójukra a szabályozásnak megfelelő tartalékot képeznek, addig makroszinten – az egyes bankok és szektorok együttmozgásának okán – a hitelveszteségek kockázata nagyobb lehet, mint amekkorát a várható veszteségek összege alapján számítanánk. A portfóliószemléletű hitelkockázati modellek ezt a kockázatot képesek számszerűsíteni, bár nem aggregált számításokra, hanem az egyedi banki kockázatok mérésére használatosak. A legelterjedtebb megközelítések, mint a Credit Risk+ (Credit Suisse [1997]), a CreditMetrics vagy a CreditPortfolioView, figyelembe veszik a csődráták

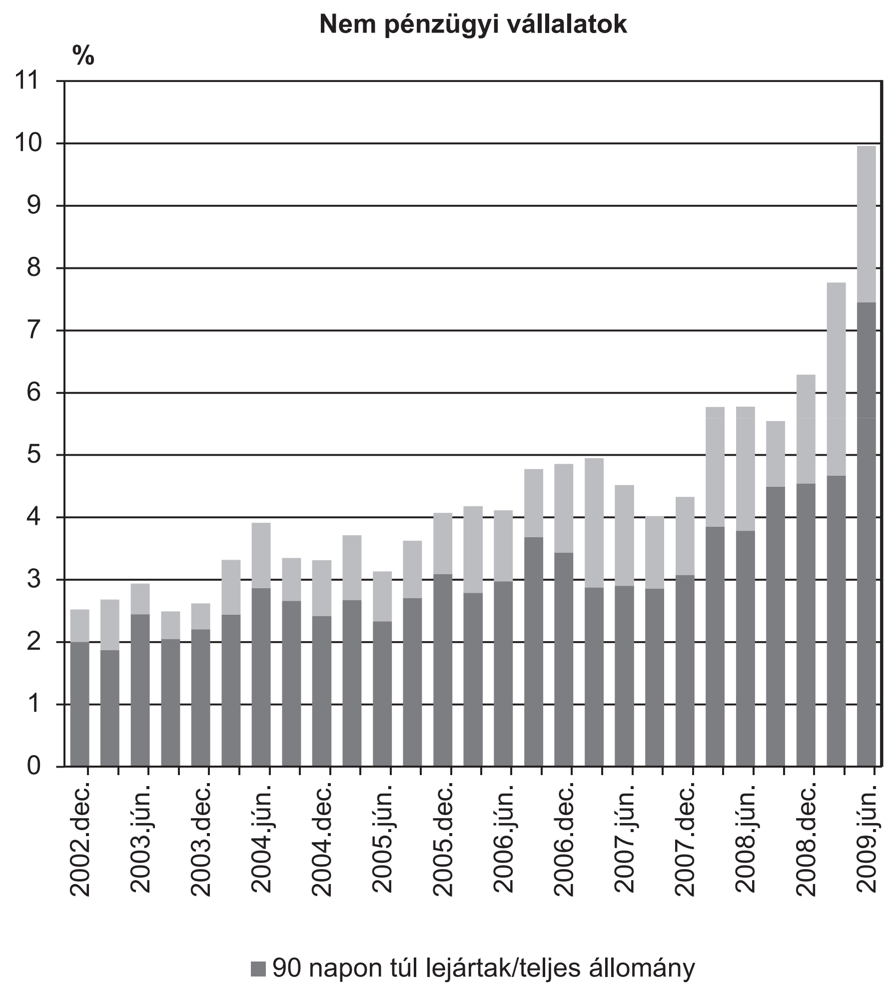
1 Köszönettel tartozunk Király Júliának, aki a cikk egy kezdetleges változatához adott értékes megjegyzéseket és tanácsokat. A cikkben található esetleges hibákért kizárólag a szerzők felelősek.

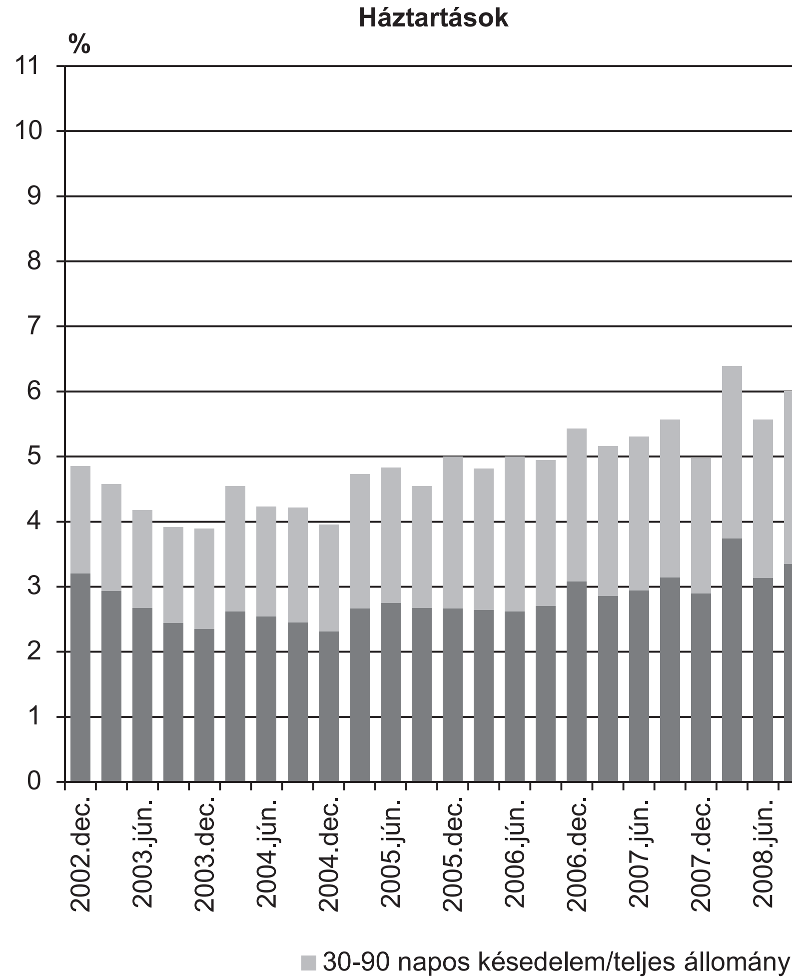
2 A 90 napos késedelmek aránya csak egy a bankrendszer hitelportfóliójának minőségét jellemző mutatók közül, a mutatók összehasonlítását Balás [2009] végzi el.

közötti együttmozgást. Ahogy *Janecskó* [2002] is felhívja rá a figyelmet, a hitelkockázati események együttmozgása valójában a nemteljesítési valószínűségek együttmozgását jelenti. A jelenlegi pénzügy válság következménye az is, hogy a vállalati és a háztartási szektorban megemelkedtek a defaultráta-értékek, ezzel párhuzamosan a késedelmes fizetések és nemteljesítések is. Bár példának a késedelmes fizetési és nemfizetési ráták múltba tekintő idősorát hoztuk, a tanulmányban az előretekintő nemteljesítési valószínűséggel foglalkozunk. (A két fogalom különbségéről és a csődráta becslésének problémáiról részletesen lásd *Madar* [2008]).

1. ábra

A bankrendszer késedelmesen teljesítő hiteleinek aránya a teljes állományhoz képest





Forrás: Balás [2009], 2. o.

Jelen tanulmányban egy gondolatkísérletet végzünk el arra vonatkozóan, hogy miként alakulhat két hitelportfólió-állomány együttesének kockázata, ha a két hitelportfólió közötti korrelációt többféle módon is figyelembe vesszük. Ha a két hitelportfólió-állomány közötti időszaki bedőlési arányok nagysága együtt mozog, krízis esetén az együttes veszteség is nagyobb. A két hitelportfólió-állományt a gondolatkísérlet során nem nevesítjük, azonban úgy gondolunk rájuk, mint a vállalati és a háztartási hitelportfóliók állományaira. Ennek az az oka, hogy a két állomány között lényeges korreláció van, azonban az egyedi kockázati hatások is jellemzőek, s ezzel a tulajdonsággal egy homogén elemekből álló, kételemű portfólió nem jellemezhető. Mivel az aggregált csődrátákat pontosan nem ismerjük, így pontos számításokat a két szektor közötti kapcsolat vizsgálatára nem végzünk. A tanulmányban kizárólag a defaultráták közgazdasági modellezésével foglalkozunk, nem vesszük figyelembe a visszaszerzési ráta (*recovery rate*) és a biztosítékok értékének lehetséges alakulását, valamint a defaultrátával való korrelációját sem, hanem egyszerűen százszázalékos veszteséget tételezünk fel. A veszteség méretével sem foglalkozunk külön. Mivel modellünk a defaultráták együttmozgására koncentrál, az ilyen folyamatokat adottnak tekintjük, tehát – a stressztesztekkel ellentétben – jelen esetben nem komplex makrogazdasági faktorokkal magyarázzuk a defaultfolyamatok alakulását, hanem egy redukált modell segítségével.

A cikk további részében az alapfogalmak és a kapcsolódó modellezési gyakorlat bemutatása után röviden leírjuk, miként modellezhetők a nemteljesítési ráták csődintenzitás-folyamatok segítségével, és hogyan jelenhet meg a korreláció a mulasztások között. Nemteljesítési valószínűségeket (*probability of default – PD)*, forward nemteljesítési valószínűségeket[3] *(forward probability of default)*, valamint együttes nemteljesítési valószínűségeket szimuláció segítségével számolunk, majd ezek után ismertetjük főbb eredményeinket. Aggregált szinten a korreláció figyelembevétele valóban számít, azonban komoly trade-offot találtunk a csődráták átlaghoz visszahúzó modellje és a korrelációmodellezés együttes alkalmazásában. A csődvalószínűség-folyamatok generálására gyakorta használt, átlaghoz való visszahúzási folyamatok (mint a Cox–Ingersoll–Ross-modell, vagy az általunk használt lognormális intenzitások átlaghoz visszahúzó modellje) a csődráta-eloszlásokat „összehúzzák”, éppen a szélsőségek vesznek el. A másik divatos irányzat – a korreláció és a kopulamodellezés – pedig a szélsőségekre és a vastag szélekre koncentrál, így nem ragadja meg azt a jelenséget, hogy hosszú távon a defaultráták egy „egyensúlyi érték” *(feltétel nélküli, átlagos PD)* közelében alakulnak. Érdemes lehet tehát kétféle modellt fejleszteni: a stabil időszakokra az átlaghoz való visszahúzó modell javasolt, míg lehetséges válság-, illetve stresszhelyzetek idején a kopulamódszerek jellemezhetik jobban a lehetséges kockázatokat.

2. A korreláció szerepe a hitelkockázat modellezésében

A portfóliószemléletű hitelkockázati modellezést magyar nyelven Janecskó [2002] tanulmánya mutatja be. A CreditRisk+ által használt eloszlások és folyamatok matematikai alapjairól magyar nyelven *Medvegyev* [2009] anyagaiban olvashatunk. Az angol nyelvű szakirodalmi publikációk és könyvek közül ki kell emelni *Wilson* [1997a], [1997b], *Crouchy–Galai–Mark* [2001], *Duffie* és *Singleton* [2003], *Schönbucher* [2003], *Lando* [2004], valamint *McNeil–Frey–Embrechts* [2005] munkáit.

A Bázel II-es szabályozásban a különböző típusú kockázati eseményekre általában tökéletes korrelációt feltételeznek, azonban sem a standard, sem a belső módszer nem tekinti a hitelkockázati események korrelációját (Basel Commitee On… [2003]). A szabályozás mögött azonban mégis egy korrelációs megfontolás áll – írja Janecskó [2004]. A modellben megkülönböztetik a szisztematikus kockázatot (egy makrofaktor van, amelyet konjunktúratényezőnek is hívhatunk), valamint az egyedi, idioszinkratikus kockázatot. A szisztematikus kockázat lényegében a nemteljesítési valószínűségek együttmozgásából (a makrofaktorra egyszerre történő reagálásából) fakad. A valóságban az egyedi kockázatok

3 A fogalom pontos tartalmát a későbbiekben megadjuk.

nem diverzifikálhatók, emiatt az egyedi kockázatok hatását is figyelembe kell venni. Különösen igaz lehet ez a lakossági és a vállalati hitelportfóliók közötti kapcsolatra.

A stressztesztekben ritkán jelenik meg a korrelációs modellezés. A különféle kockázatok számszerűsítésére és az egyes bankok kockázattűrő képességének értékelésére használt stressztesztek általában az ún. „top-down" megközelítést alkalmazzák (az MNB stressztesztjének eredményéről lásd MNB [2009] 42–43. o.), azaz a makrokörnyezet és az adósok nemteljesítése között teremtenek kapcsolatot, és szélsőséges makroszcenáriók esetén vizsgálják a bankrendszer ellenálló képességét a nagyarányú hitelbedőlésekkel szemben. Az egyes szektoroknak (háztartások, nem pénzügyi vállalatok) és a szektorokon belül a különféle kategóriák szerint nyújtott hitelek portfóliójának kockázatát külön-külön mérik, majd a kapott eredményeket összegzik. A hitelportfóliók együttmozgását a nemzetközi gyakorlatban is sokszor indoklás nélkül figyelmen kívül hagyják.

3. A nemteljesítési valószínűség és a defaultráták eloszlása

Hitelkockázat alatt azt a lehetséges veszteséget értjük, amelyet a partner nemteljesítése esetén a másik fél elszenvedhet. A várható veszteséget (*expected loss – EL*) az eloszlás ismeretében számíthatjuk ki, a nemteljesítés valószínűségének *(probability of default – PD*), a nemteljesítés esetén bekövetkező veszteségnek (*loss given default – LGD*) és a kitettségnek (*exposure at default – EAD*) a szorzataként:

$$EL = PD \cdot LGD \cdot EAD \tag{1}$$

A képlet számszerűsítésével a hitelintézetek felkészülhetnek várható veszteségeikre. Nagyobb problémát jelenthet a nem várt veszteség (*unexpected loss – UL*), amelynek a becsléséhez a nemteljesítés teljes valószínűség-eloszlása szükséges. Tegyük fel például, hogy a vállalati és a lakossági hitelek veszteségrátája (LGD), valamint a kitettségek (EAD) ismertek. (Az LGD modellezéséről magyar nyelven lásd *Paulovics* [2005].) Ekkor elegendő a nemteljesítési valószínűséget (PD) modellezni a veszteségeloszlás (loss) generálásához.

A nemteljesítési valószínűségeket a szimuláció során úgy kapjuk, hogy a lehetséges nemteljesítési eseményeket előállítva, a defaultok arányának nagymintás átlagát számítjuk. A veszteségeloszlás alatt a lehetséges defaultráták eloszlását értjük.

4. Intenzitásalapú modellek

A nemteljesítések modellezéséhez az intenzitásalapú csődmodelleket hívjuk segítségül (a témához kapcsolódó kurzust tartott 2008-ban *Armai Zsolt* és *Ostoróczky Tünde* az MNB-ben *Klein* és *Moeschberger* [2003] alapján, bővebben lásd még Duffie és Singleton [2003]). Ilyenkor a vizsgált portfólióállományban lévő elemek (hitelek) egy időszaki túlélését, megmaradását modellezzük. Túlélési rátának (túlélési valószínűségnek, *probability of surviving*) nevezzük és *p(t)*-vel jelöljük a *t*-ik időpontig nem bedőlő (túlélő) hitelek arányát.

A feltételes valószínűségre vonatkozó összefüggés (Bayes-szabály) alapján

$$p(t|s) = \frac{p(t)}{p(s)} \tag{2}$$

kiszámításával az adott időintervallumra vonatkozó túlélési rátákat kapjuk meg. A bedőlési valószínűség (*probability of default*), valamint forward csődvalószínűség fogalmát a túlélési rátákból származtathatjuk. A csődvalószínűség a t időpontig csődbe jutó hitelek arányát (illetve valószínűségét) jelenti:

$$PD(t) = 1 - p(t), \tag{3}$$

a forward nemteljesítési valószínűség pedig egy adott *[s, t]* intervallumon lezajló nemteljesítési események valószínűségét jelöli az s időpontban meglévő és teljesítő hitelállományra:

$$PD(t) = 1 - p(t), \tag{4}$$

A nemteljesítési valószínűséget mint az állományban várható, bedőlő hitelek számának vagy értékének várható arányát értelmezzük. A gyakorlatban a intenzitást (*default intensity*) modellezik. Az intenzitást a következőképpen szokták származtatni:

Legyen *p(t)* folytonosan deriválható függvény, ekkor az *f(t)* csődintenzitás alakja

$$f(t) = -\frac{p'(t)}{p(t)}, \tag{5}$$

amelyből a túlélési ráták könnyen visszakaphatók:

$$p(t) = e^{-\int_0^t f(u)du}. \tag{6}$$

A csődintenzitást diszkrét modellekben λ-val jelölik. Ezek alapján a csődráta várható értéke, vagyis a bedőlési valószínűség

$$PD(t) = 1 - p(t) = E(1 - e^{-[\lambda_1 + \dots + \lambda_t]}) \tag{7}$$

módon származtatható, a forward nemteljesítési valószínűséget pedig

$$fPD(t) = 1 - \frac{p(t)}{p(s)} = E(1 - e^{-[\lambda_s + \dots + \lambda_t]}) \tag{8}$$

alapján kapjuk meg.

A forward nemteljesítési valószínűség matematikai modellezése a forward kamatlábakéhoz hasonlít. Amint a fenti képletből is látszik, a PD a csődintenzitások alapján számított várható érték, várható bedőlési ráta. A későbbiekben a bedőlési ráta valószínűség-eloszlására is szükségünk lesz a várható értéken kívül. Ekkor a várhatóérték-operátor elhagyásával a realizációkra fókuszálunk.

5. Korrelált lognormális csődintenzitások modellezése

Célunk a λ csődintenzitás időbeli modellezése. A legtöbb dinamikus modell a hozamgörbe-modellezés területéről ismert, ismerhető. Ilyen az átlaghoz visszahúzó modellek vagy a CIR (Cox–Ingersoll–Ross-modell). Mi azt a módot választjuk, amikor a csődintenzitás logaritmusa átlaghoz visszahúzó (*mean-reverting*) folyamatot követ (l. Duffie és Singleton [2003], 236. o.):

$$\log \lambda_{i,t+1} - \log \lambda_{i,t} = \psi_i (\log \overline{\lambda} - \log \lambda_{i,t}) + \sigma_i \varepsilon_{t+1} , \tag{9}$$

ahol az i az egyes modellezni kívánt eszköz indexe ($i=1, 2$), ε pedig független, standard normális eloszlású véletlen változó.

A következőkben néhány jellegzetes, a szakirodalom által ajánlott korrelációs mintázattal generáljuk a λ paramétereket. A független esetet, a Gauss-, a Gumbel- és a Frank-kopula esetét vizsgáljuk. A korreláció általánosításának tekinthető kopulákat több, egymással valamilyen függőségi struktúrában lévő valószínűségi változók közös eloszlásainak generálására használják.

A Gauss-kopulával két korrelált normális eloszlású valószínűségi változó együttes eloszlását lehet előállítani.

A Gumbel- és a Frank-kopula az úgynevezett archimédeszi kopulaosztályba tartozik. Az archimédeszi kopulák az extrém értékek együttmozgását jól modellezik, a Gumbel családra a felső extremitásokban való összefüggés a jellemző, így ennek használata tulajdonképpen azt az előfeltevést testesíti meg, hogy a két szektor esetében a nagyarányú nemteljesítések általában egyszerre fordulnak elő.

A Frank családot pedig szimmetrikusan a felső és az alsó extremitások összefüggése jellemzi. Ma már a számítógépes szoftvercsomagokban a fenti kopulák generálása egy beépített paranccsal történik, amelyek a fenti lépéseket tartalmazzák. További ismertetést ad a kopulák alkalmazására magyar nyelven *Benedek–Kóbor–Pataki* [2002], Kóbor [2003], *Kovács* [2005] és *Barra* [2007] dolgozata, *Tulassay* [2008] előadásvázlata, illetve angolul McNeil–Frey–Embrechts [2005] kvantitatív kockázatkezelésről szóló könyve.

5.1. Független esetek

Ha a két hitelportfólió független egymástól, akkor a két intenzitásfolyamatot külön modellezzük:

$$\log \lambda_{1,t+1} - \log \lambda_{1,t} = \psi_1 \left(\log \overline{\lambda_1} - \log \lambda_{1,t} \right) + \sigma_1 \varepsilon_{1,t+1} \tag{10}$$

$$\log \lambda_{2,t+1} - \log \lambda_{2,t} = \psi_2 \left(\log \overline{\lambda_2} - \log \lambda_{2,t} \right) + \sigma_2 \varepsilon_{2,t+1} , \tag{11}$$

ahol ε_1 és ε_2 független, normális eloszlású valószínűségi változók. A realizációk generálása után a T időpontra vonatkozó *PD*-ket és az *fPD*-ket, valamint az eloszlásokat állítjuk elő.

5.2. Gauss-kopula

Ha a két hitelportfólió korrelál egymással, akkor a (10) és (11) egyenletpárban az ε_1 és ε_2 korrelált normális eloszlású valószínűségi változók. A Gauss-kopula alakja:

$$C(u,v) = P(N(X) \leq u, N(Y) \leq v), \tag{12}$$

ahol X és Y standard normális eloszlású változók, ρ korrelációval.

5.3. Gumbel-kopula

A Gumbel-kopula az előzőhöz képest eltérő korrelációs szerkezetet ír le. A kopulafüggvény alakja:

$$C(u,v) = e^{\left[-\left[(-\ln u)^{\delta}(-\ln v)^{\delta}\right]^{1/\delta}\right]}, \tag{13}$$

ahol u és v a két összefüggő változó (jelen esetben az ε_1 és az ε_2), C pedig a közös eloszlásfüggvény értéke.

5.4. Frank-kopula

A Frank-kopula alakja:

$$C(u,v) = \frac{1}{\alpha}\log\left(1 + \frac{\left(e^{\alpha u} - 1\right)\left(e^{\alpha u v} - 1\right)}{e^{\alpha} - 1}\right), \tag{14}$$

ahol u és v szintén a két összefüggő változó.

6. Kételemű hitelportfóliók szimulált veszteségeloszlása

A kételemű (x_1 és x_2 állományból álló) hitelportfólió alakulását 12 periódusra (hónapra) szimuláljuk. A várható veszteségeket (*i=1, 2-re*) az

$$y_i(t) = PD_i(t)\, x_i(0) = [1 - p(t)]\, x_i(0) \tag{15}$$

képlet adja meg. Ekkor az *Y(t)* együttes veszteségek várható értéke az

$$\mathrm{E}\left[Y(t)\right] = \mathrm{E}\left[y_1(t)\right] + \mathrm{E}\left[y_2(t)\right] \tag{16}$$

alakot ölti. A veszteségeloszlásokat pedig

$$Y(t) = \left(1 - e^{-\left[\lambda_{1,t_1} + \lambda_{1,t_2} + \ldots + \lambda_{1,t_n}\right]}\right) x_1(0) + \left(1 - e^{-\left[\lambda_{2,t_1} + \lambda_{2,t_2} + \ldots + \lambda_{2,t_n}\right]}\right) x_2(0) \tag{17}$$

módon kapjuk.

Eltérő korrelációs nagyság mellett több korrelációs struktúrát is vizsgálunk. A paramétereket úgy választottuk, hogy a megfigyelt tényekhez közeliek legyenek, elérhető adatbázis hiányában nem becsültük modellünket.

1. táblázat

Paraméterek összefoglaló táblázata

	1.	**2.**
$\bar{\lambda}$	0,0034	0,0043
σ	0,4000	0,4000
x	50	50

A szimulációt T=12 periódusra (12 hónap), N=10 000 futtatás mellett végeztük el. Az induló x_1 és x_2 hitelállományok értéke tehát 50-50 Ft, vagyis a kételemű portfólió kiinduló értéke 100 Ft, erre vetítjük a szimuláció során a veszteségeloszlást.

6.1. Átlaghoz való visszahúzás versus kopulamodellezés

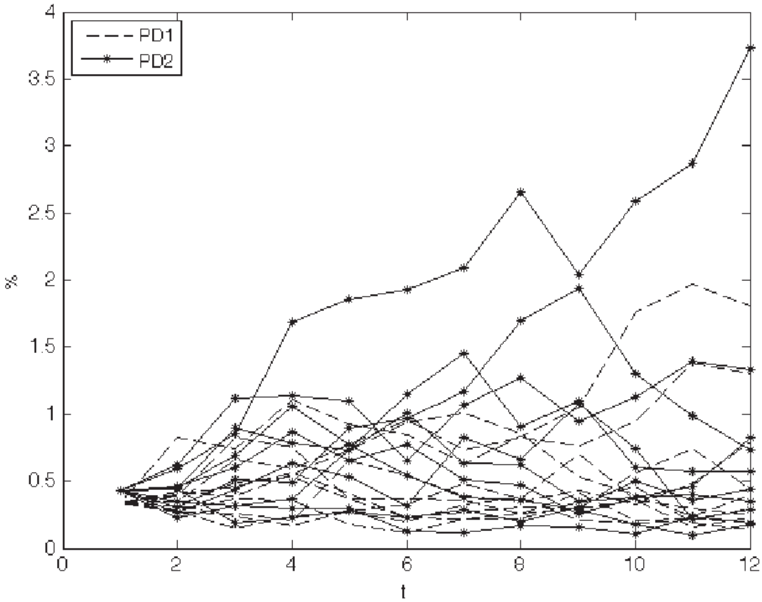
A modellben két tényező játszik szerepet a kockázatosság meghatározásában. Az átlaghoz való visszahúzást jelentő paraméter a *forward PD*-k eloszlását elemenként összehúzza, valamint az együttes eloszlást is, míg a különböző korrelációk modellezése az együttes eloszlás szélét vastagítja meg. Véleményünk szerint stabil időszakban a magasabb átlaghoz való visszahúzási paraméter írja le jól a nemteljesítési valószínűségek (PD-k) viselkedését, míg válság idején a PD-ket alacsony visszahúzási paraméter mellett érdemes számolni. A kopuláknak is ebben az esetben van igazi jelentőségük.

A *2. ábra* illusztrálja a visszahúzó tag szerepének jelentősségét. A nemteljesítési arányok (PD) időbeli alakulását szimuláltuk (Gauss-kopula szerinti függőségi struktúrával, $\rho=0,5$) kis és közepes visszahúzási paraméter mellett, majd ábrázoltunk 10-10 realizációt és a várható értéküket. Az ábrán jól látható, hogy kis visszahúzási paraméter esetén a hosszú távú egyensúlyi szinttől hajlamos a nemteljesítési arány pozitív irányba elszakadni, és így a várható értéke is nő, ha az előrevetített időtávot növeljük. Ha a visszahúzási paramétert megnöveljük, az a defaultintenzitás folyamatában – (9) egyenlet – a második (sztochasztikus) tag relatív súlyát csökkenti, ezáltal kisebb eséllyel fog extrém nemteljesítési valószínűségértékeket visszaadni.

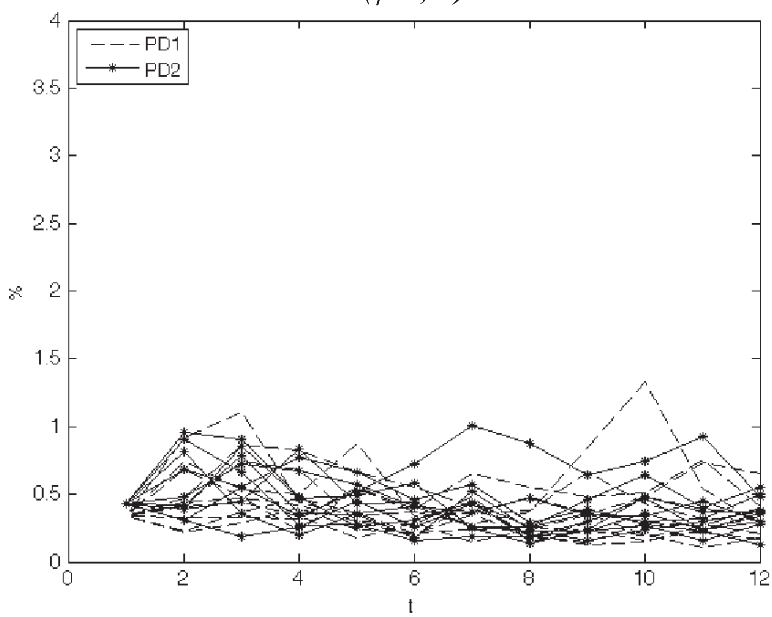
2. ábra

A két korrelált nemteljesítési valószínűség realizációi, illetve a nemteljesítési arányok várható értékének alakulása az időben

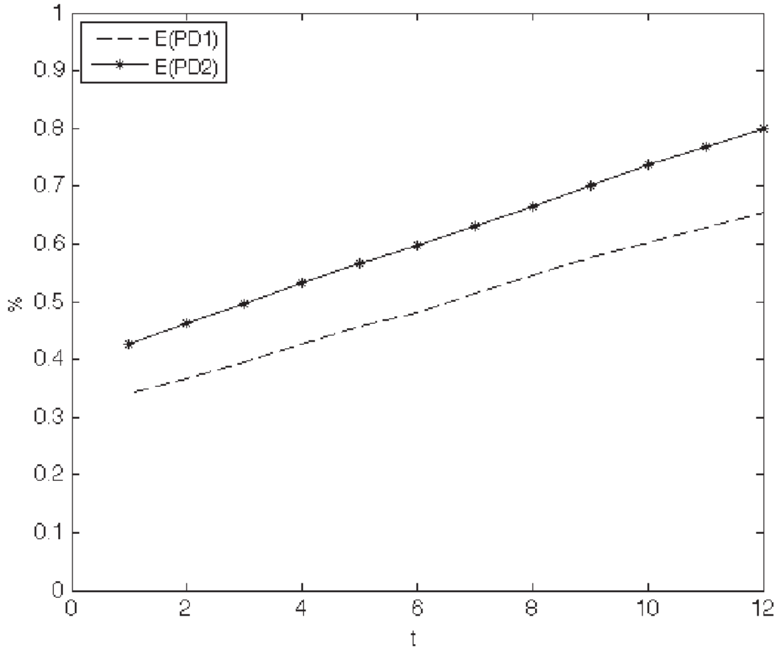
a) Realizációk kis visszahúzási paraméter mellett
(ψ =0,01)



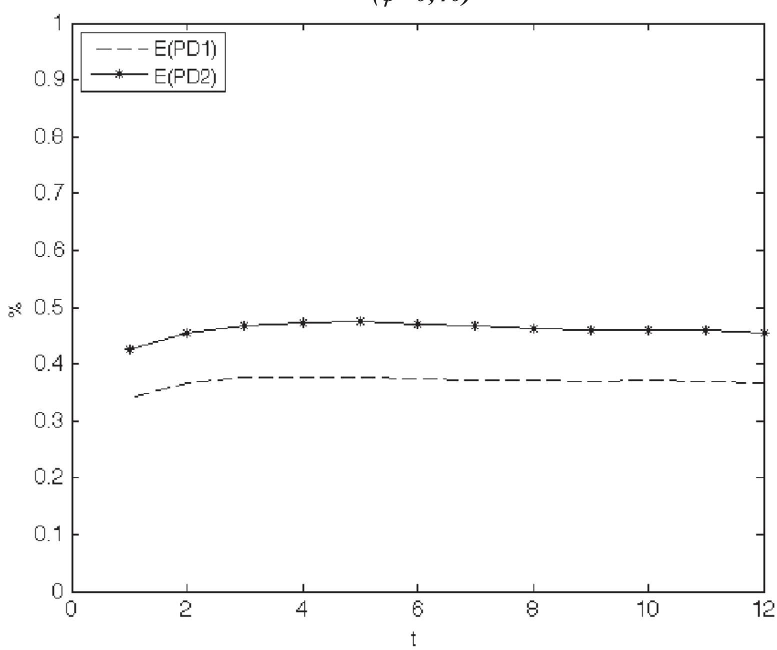
b) Realizációk közepes visszahúzási paraméter mellett
(ψ=0,40)



c) PD kis visszahúzási paraméter mellett
(ψ =0,01)



d) PD közepes visszahúzási paraméter mellett
(ψ=0,40)

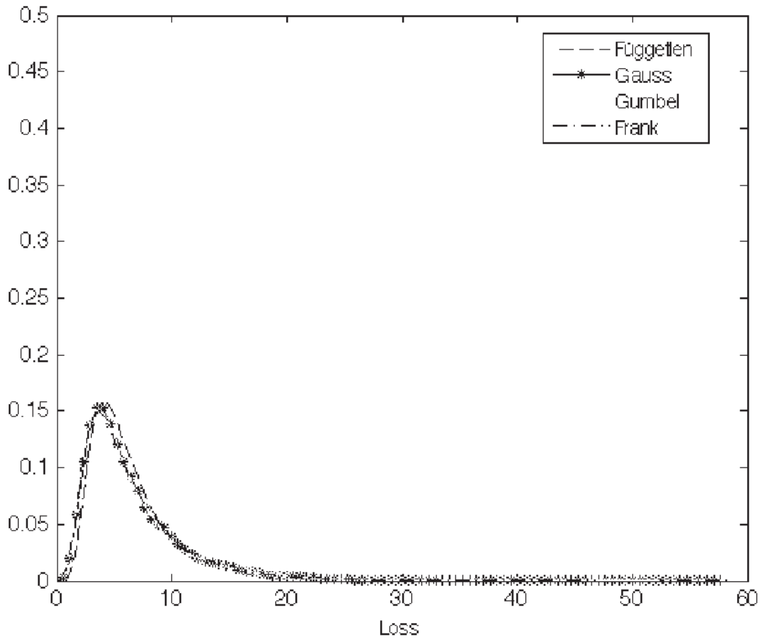


Monte–Carlo-szimulációval megvizsgáltuk (N=10 000-es futtatásszám mellett), hogy T=12 periódus végére (azaz T-ben) hogyan alakul a veszteségeloszlás alakja, 100%-os veszteségrátát feltételezve. Az eredményeinket a *3. ábra* és a *2. táblázat* tartalmazza. A Gauss-kopula esetén a lineáris korrelációs együttható értéke 0,5 volt, a Gumbel- és Frank-kopulákat pedig a lineáris korreláció szerinti mértékkel egyenértékű paraméterrel láttuk el.

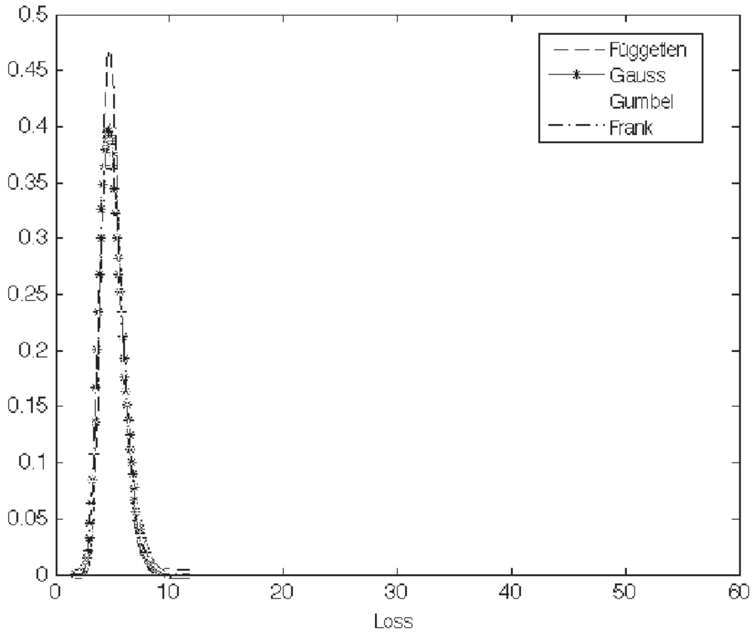
3. ábra

PD eloszlása kis és közepes visszahúzási paraméter mellett

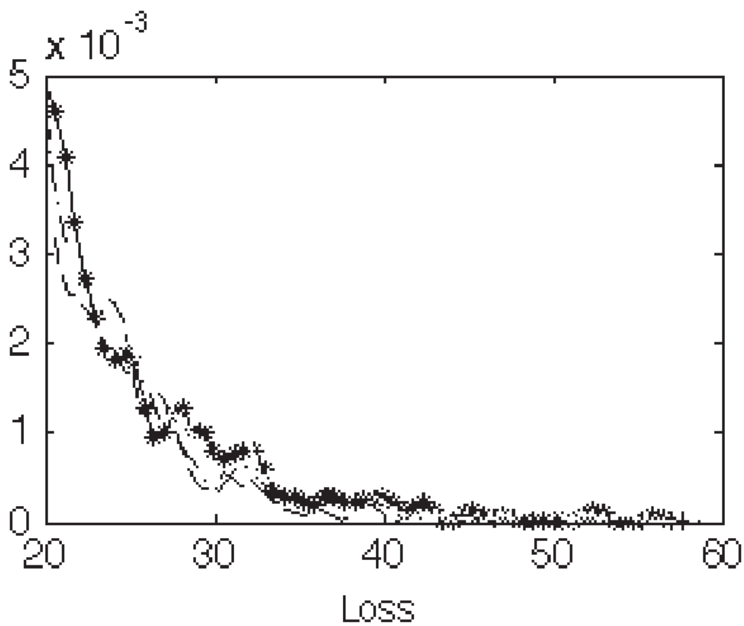
a) PD eloszlása kis visszahúzási paraméter mellett
(ψ =0,01)



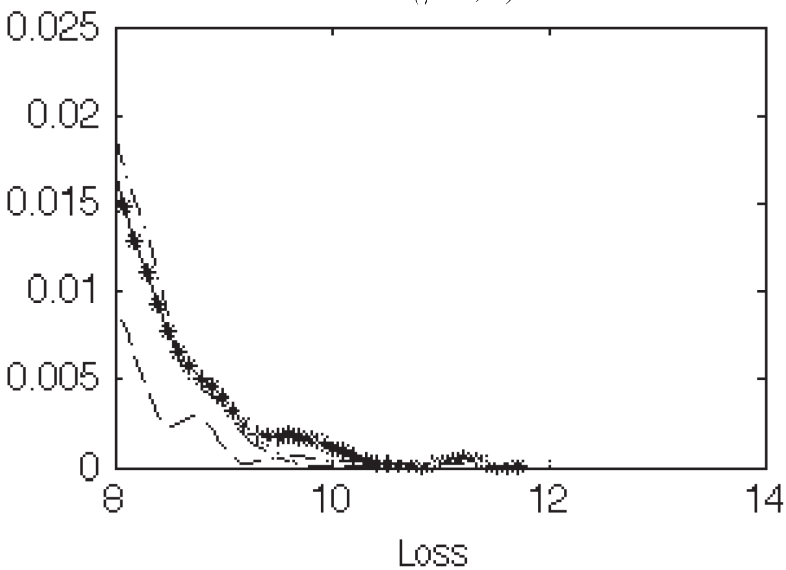
b) PD eloszlása közepes visszahúzási paraméter mellett
(ψ =0,40)



c) Az eloszlás széle kis visszahúzási paraméter mellett
(ψ=0,01)



d) Az eloszlása széle közepes visszahúzási paraméter mellett
(ψ =0,40)



A 3. ábra a) és b) részén – bár a négy függőségi struktúra grafikonja nagymértékben fedi egymást – látható, hogy a visszahúzási paraméter növelésével az eloszlás kevésbé lesz ferde. A c) és d) ábrarésznél pedig az is kitűnik, hogy a független esetnél az eloszlás széle kevésbé vastag, mint bármely kopula esetén.

Az ábrák szembetűnőbb eredményeit a 2. táblázatban mutatjuk be. A táblázatban a 100 Ft-os kiinduló kételemű hitelportfólióra számított 12 havi várható értékeket és kockázati mértékeket ismertetjük. Először tekintsük a két visszahúzási paraméter esetén kapott eredmények különbözőségét! Visszakaptuk azt az előre is sejthető eredményt, amely szerint míg a várható értékek a paraméter változtatásával nem változnak sokat, a percentilisek akár két-háromszorosukra nőnek, ha csökkentjük a visszahúzás mértékét.

2. táblázat

Számított kockázati mértékek kis és közepes visszahúzó paraméter mellett[4]

	Ψ=0,01				Ψ=0,40			
	Független	**Gauss**	**Gumbel**	**Frank**	**Független**	**Gauss**	**Gumbel**	**Frank**
E[Y]	6,76	6,74	6,72	6,67	4,99	5,00	4,99	5,00
VaR_{95}	14,89	16,15	16,36	15,94	6,59	6,94	7,01	6,90
VaR_{99}	22,39	25,63	27,70	24,62	7,51	8,05	8,20	8,04
ES_{95}	19,55	22,16	23,11	21,45	7,16	7,65	7,77	7,59
ES_{99}	27,35	32,44	34,99	31,01	8,05	8,74	8,97	8,57

Egy-egy visszahúzási paraméter esetén pedig a függőségi struktúrák közötti különbség is szembetűnő, ha az eloszlásokat jellemző mutatószámokat tekintjük. A várható érték a függőségi struktúra változtatásával szinte alig változik – ez az a része a hitelkockázatnak, amelyre a kamatszpredek útján készülnek a bankok –, ám a VaR-értékek már nagyobb különbséget mutatnak, amelynek az a jelentősége, hogy erre kell a bankoknak tőketartalékkal készülniük. A Gumbel-kopula esetén – amelyre a felső extremitásokban való összefüggés jellemző – alacsony visszahúzási paraméternél a 99. percentilishez tartozó VaR 5,31 százalékponttal nő a független esethez képest.

3. táblázat

A korrelációs struktúra változásának hatásai a független esethez képest

	Ψ=0,01				Ψ=0,40			
	Független	**Gauss**	**Gumbel**	**Frank**	**Független**	**Gauss**	**Gumbel**	**Frank**
E[Y]	1,000	0,997	0,994	0,987	1,000	1,002	1,000	1,002
VaR_{95}	1,000	1,085	1,099	1,071	1,000	1,053	1,064	1,047
VaR_{99}	1,000	1,145	1,237	1,100	1,000	1,072	1,092	1,071
ES_{95}	1,000	1,134	1,182	1,097	1,000	1,068	1,085	1,060
ES_{99}	1,000	1,186	1,279	1,134	1,000	1,086	1,114	1,065

4 A táblázatban található értékek a hitelezési veszteséget mutatják a kezdetben 50-50 értékű (azaz összesen 100 értékű) hitelportfóliókból. Tehát például 0,01-es visszahúzási paraméter esetén, Gauss-kopula szerinti függőségi struktúrát feltételezve, 1% a valószínűsége annak, hogy a kezdetben 100 értékű állomány 25,63-mal csökkenjen hitelbedőlés miatt.

A korrelációs és a visszahúzási paraméterek hatását vizsgáljuk a 3. és *4. táblázat* segítségével. A 3. táblázat azt mutatja, hogy alacsony és közepes visszahúzási paraméter mellett (és rögzített, 0,5-es korreláció esetén) a független esethez képest hányszorosára nőnek az eloszlásokat jellemző mutatók. A független esetet 1-re (100%) normáltuk, majd ehhez viszonyítottuk a Gauss-, Gumbel- és Frank-kopulákkal végzett számítások eredményét. Például a Gumbel-kopula esetén alacsony visszahúzási paraméternél a 99. percentilishez tartozó VaR 23,7%-kal nagyobb a független esethez képest. A Gumbel-kopula modellezte legintenzívebben a szélsőségekben az együttmozgás hatását.

A 4. táblázatban a 0,40-es visszahúzási paramétert normáltuk, majd ezzel hasonlítottuk össze az alacsony visszahúzási paraméter hatásait. Így például a Gumbel-kopula esetén a 99. percentilishez tartozó VaR 337,8%-kal nő, ha a visszahúzási paramétert 0,4-ről 0,01-re csökkentjük.

4. táblázat

A visszahúzási paraméter változásának hatása a 0,40-es paraméterezéshez képest

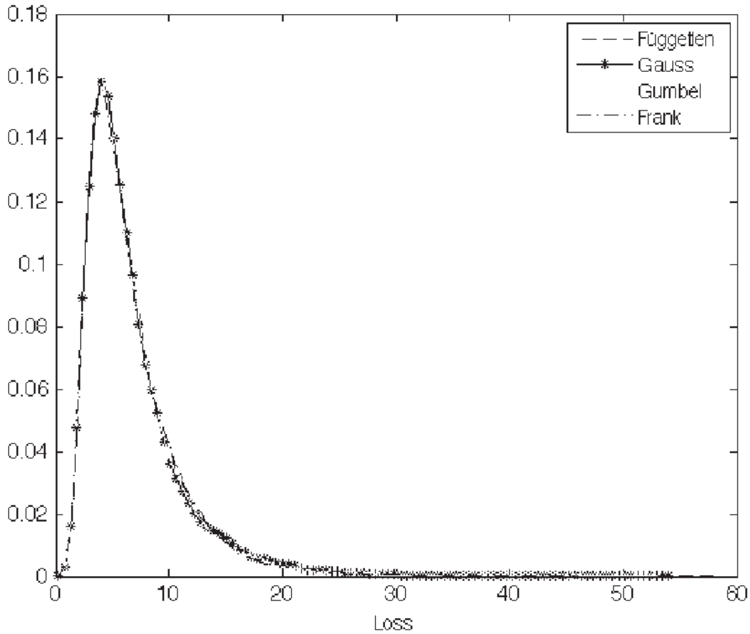
	Ψ=0,01				Ψ=0,40			
	Független	**Gauss**	**Gumbel**	**Frank**	**Független**	**Gauss**	**Gumbel**	**Frank**
E[Y]	1,355	1,348	1,347	1,334	1,000	1,000	1,000	1,000
VaR_{95}	2,259	2,327	2,334	2,310	1,000	1,000	1,000	1,000
VaR_{99}	2,981	3,184	3,378	3,062	1,000	1,000	1,000	1,000
ES_{95}	2,730	2,897	2,974	2,826	1,000	1,000	1,000	1,000
ES_{99}	3,398	3,712	3,901	3,618	1,000	1,000	1,000	1,000

6.2. Mikor játszik szerepet a csődvalószínűségek eloszlásában a korreláció?

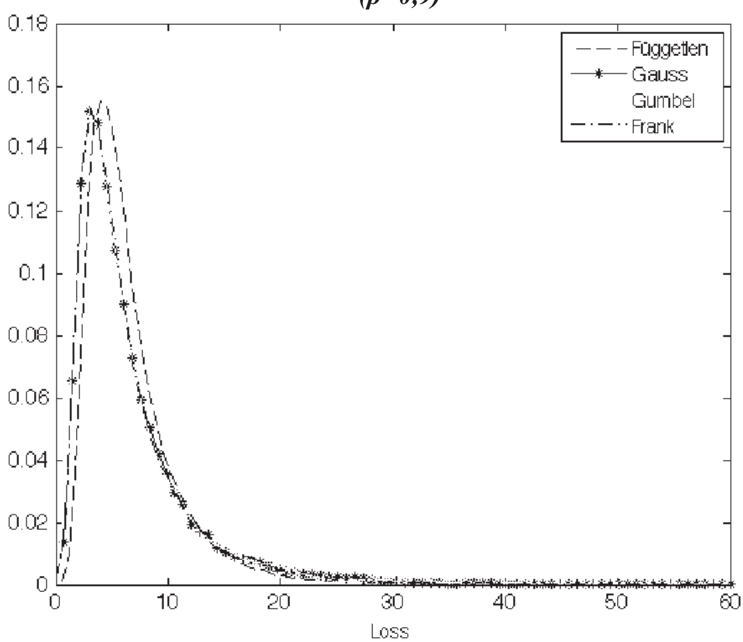
A csődráták szimulációja során a kapott eloszlásokra vagyunk kíváncsiak. Az egyedi (illetve, itt egy szektorra vonatkozó) csődráták eloszlása a lognormális. Az együttes eloszlás két korrelált lognormális eloszlású valószínűségi változó összegéből származik. A szektorok közötti korrelációt gyakran szakértői becsléssel adják meg, Janecskó [2002] *0,7*-es korrelációt javasol, jelen tanulmányban *0,1*, *0,5* és *0,9*-es korrelációs együtthatók mellett vizsgáljuk az együttes eloszlás alakulását. Annak érdekében, hogy a korrelációs szerkezetnek legyen relevanciája, a következőkben az alacsony (0,01-es) visszahúzási paramétert alkalmazzuk.

4. ábra

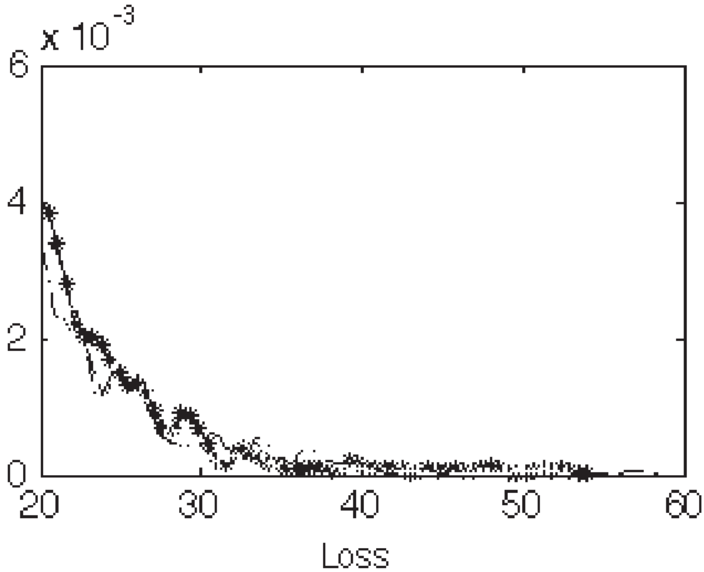
PD eloszlása alacsony és magas korrelációs együttható mellett
a) PD eloszlása alacsony korrelációs együttható mellett
(ρ=0,1)



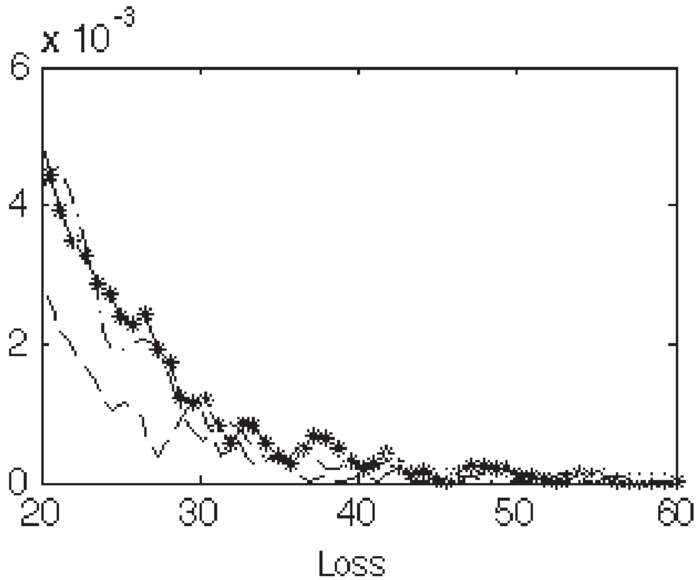
b) PD eloszlása magas korrelációsegyüttható mellett
(ρ=0,9)



c) Az eloszlás széle alacsony korrelációs együttható mellett
(ρ=0,1)



d) Az eloszlása széle magas korrelációsegyüttható mellett
(ρ=0,9)



A 3. ábra a) és c) részén bemutattuk a 0,5-es korreláció mellett kapott eredményeket; a 0,1 és 0,9-es korreláció esetén a 4. ábra mutatja az eloszlások alakját. A teljes eloszlást tekintve, itt is nagymértékben fedik egymást a grafikonok, bár az látható, hogy a korreláció növelésével kismértékben eltávolodnak egymástól. Itt még inkább látszik az eloszlások szélének ábrázolásánál, hogy a korreláció növelésével mindhárom kopula esetén az eloszlás eltávolodik a független esettől.

Az *5. táblázat* az eloszlásokat leíró mutatók változását számszerűsíti, az összehasonlítást pedig a *6.* és *7. táblázat* segítségével végeztük el.

5. táblázat

A korreláció mértéke és az együttes portfólió kockázata

		Független	**Gauss**	**Gumbel**	**Frank**
ρ=0,1	$\mathbf{VaR_{95}}$	14,89	15,35	14,91	14,90
	$\mathbf{VaR_{99}}$	22,39	23,70	23,28	23,26
	$\mathbf{ES_{95}}$	19,55	20,62	19,85	20,05
	$\mathbf{ES_{99}}$	27,35	29,50	28,70	28,95
ρ=0,5	$\mathbf{VaR_{95}}$	14,89	16,15	16,36	15,94
	$\mathbf{VaR_{99}}$	22,39	25,63	27,70	24,62
	$\mathbf{ES_{95}}$	19,55	22,16	23,11	21,45
	$\mathbf{ES_{99}}$	27,35	32,44	34,99	31,01
ρ=0,9	$\mathbf{VaR_{95}}$	14,89	17,65	17,47	17,22
	$\mathbf{VaR_{99}}$	22,39	29,39	30,45	27,60
	$\mathbf{ES_{95}}$	19,55	25,40	25,58	24,18
	$\mathbf{ES_{99}}$	27,35	39,05	40,69	36,68

A 6. táblázat tulajdonképpen a 3. táblázat kiegészítése a 0,1-es és 0,9-es korreláció esetével (a kevésbé releváns várható érték kivételével). Itt is megfigyelhető, hogy adott lineáris korrelációs együttható esetén a függőségi struktúra változtatásával a független esethez képest megnőnek a kockázati mutatók. Látható, hogy a 0,1-es korreláció ugyan nagyon alacsony, a 99. percenilishez tartozó VaR már ekkor is sokat nő – mindössze azért, mert a függőségi struktúrát változtatjuk. A 0,9-es korreláció feltevésével viszont még nagyobb változáson megy keresztül az eloszlás: Gumbel-kopula esetén a 99-es VaR 36%-kal nő, az ES pedig 48,8%-kal.

6. táblázat

A korrelációs struktúra változásának hatása

		Független	Gauss	Gumbel	Frank
ρ=0,1	**VaR$_{95}$**	1,000	1,031	1,001	1,001
	VaR$_{99}$	1,000	1,059	1,040	1,039
	ES$_{95}$	1,000	1,055	1,015	1,026
	ES$_{99}$	1,000	1,079	1,049	1,059
ρ=0,5	**VaR$_{95}$**	1,000	1,085	1,099	1,071
	VaR$_{99}$	1,000	1,145	1,237	1,100
	ES$_{95}$	1,000	1,134	1,182	1,097
	ES$_{99}$	1,000	1,186	1,279	1,134
ρ=0,9	**VaR$_{95}$**	1,000	1,185	1,173	1,156
	VaR$_{99}$	1,000	1,313	1,360	1,233
	ES$_{95}$	1,000	1,299	1,308	1,237
	ES$_{99}$	1,000	1,428	1,488	1,341

7. táblázat

A lineáris korreláció változásának hatása adott függőségi struktúra mellett

		Független	Gauss	Gumbel	Frank
ρ=0,1	$\mathbf{VaR_{95}}$	1,000	1,000	1,000	1,000
	$\mathbf{VaR_{99}}$	1,000	1,000	1,000	1,000
	$\mathbf{ES_{95}}$	1,000	1,000	1,000	1,000
	$\mathbf{ES_{99}}$	1,000	1,000	1,000	1,000
ρ=0,5	$\mathbf{VaR_{95}}$	1,000	1,052	1,097	1,070
	$\mathbf{VaR_{99}}$	1,000	1,081	1,190	1,058
	$\mathbf{ES_{95}}$	1,000	1,075	1,164	1,070
	$\mathbf{ES_{99}}$	1,000	1,100	1,219	1,071
ρ=0,9	$\mathbf{VaR_{95}}$	1,000	1,150	1,172	1,156
	$\mathbf{VaR_{99}}$	1,000	1,240	1,308	1,187
	$\mathbf{ES_{95}}$	1,000	1,232	1,289	1,206
	$\mathbf{ES_{99}}$	1,000	1,324	1,418	1,267

A 7. táblázat pedig azt mutatja meg, hogy adott függőségi struktúra esetén csupán a lineáris korrelációs együttható növelése (illetve a Gumbel- és Frank-kopula paraméterének az ennek megfelelő változtatása) hányszorosára növeli az eloszlásokat leíró mutatókat. Míg természetesen a független eseten nem változtat a korreláció növelése, a többi esetben igen érzékenyen reagálnak (pl. a Gumbel-kopula esetén a 99-es percentilis 30,8%-kal nő, ha a paraméterét úgy változtatjuk, ami a lineáris korreláció 0,1-ről 0,9-re növelésének megfelel). Ez felhívja a figyelmet arra, hogy ha a hitelkockázat modellezéshez ezt a megközelítést használjuk, akkor a visszahúzási paraméter és a függőségi szerkezet kiválasztása mellett a megfelelő korrelációs együttható megadása is fontos feladat.

7. Összegzés

A tanulmányban a hitelállomány-romlások közötti korreláció szerepét vizsgáltuk egy redukált hitelkockázati modell segítségével. A redukált modellekkel a gyakorlatban a kamatláb és a csődintenzitás közötti, valamint a csődintenzitás és a visszaszerzési ráta közötti korrelációt modellezik. Mi azt vizsgáltuk, hogy két, egymással szorosan összefüggő hitelportfólió együttes kockázatát hogyan befolyásolja az eltérő korrelációs szerkezet. A Bázel II.-es szabályozás mögött álló modell azt tételezi fel, hogy egy közös makrofaktor határozza meg a különálló hitelállományok kockázatát, ezen kívül vannak még egyedi kockázatok, amelyek ha diverzifikálhatók, eltűnik a közös kockázat; amennyiben nem, akkor ezt is számszerűsíteni és mérni kell.

Modellünkben két különálló hitelállományt vizsgáltunk, amelyek nem egy közös makrofaktortól, hanem elsősorban egymástól függtek, a korreláció azonban nem teljes, hanem 1-nél kevesebb. Az intenzitáson alapuló modellek azon jellegzetessége, hogy egy hosszú távú átlaghoz (feltétel nélküli PD) visszahúznak, jelentős trade-off elé állítja a hitelkockázatot modellezőket. Az átlaghoz való visszahúzási folyamatok ugyanis elveszik a korreláció „élét", a kopulamodellezés erejét. Átlaghoz való visszahúzással inkább hosszú távra, kopulákkal inkább rövid távra (1 évre) érdemes modellezni.

Irodalomjegyzék

Balás Tamás [2009]: A bankrendszer hitelportfóliójának minőségét leíró mutatók összehasonlítása, in: Jelentés a pénzügyi stabilitásról (2009. november), háttértanulmány, Budapest

Barra István [2007]: Kopulák alkalmazása a többváltozós extrémérték-elméletben. TDK dolgozat, BCE, Budapest

Basel Commitee On… [2003]: The New Basel Capital Accord. 3rd Consultative Document, Basel Committee on Banking Supervision. Bank for International Settlements, Bázel

Benedek Gábor–Kóbor Ádám–Pataki Attila [2002]: A kapcsolatszorosság mérése *m*-dimenziós kopulákkal és értékpapírportfólió-alkalmazások. *Közgazdasági Szemle,* XLIX. évf. február, 105–125. o.

Credit Suisse [1997]: Credit Risk+, A Credit Risk Management Framework. Credit Suisse First Boston International

Duffie, Darrel–Singleton, Kenneth J. [2003]: Credit Risk – Pricing Measurement and Management, Princeton Series in Finance

Janecskó Balázs [2002]: Portfóliószemléletű hitelkockázat szimulációs meghatározása. *Közgazdasági Szemle* XLIX. évf. július–augusztus, 664–676. o.

Janecskó Balázs [2004]: A Bázel II. belső minősítésen alapuló módszerének közgazdasági-matematikai háttere és a granularitási korrekció elmélete. *Közgazdasági Szemle*, LI. évf. március, 218–234. o.

Kóbor Ádám [2003]: A piaci kockázatmérési eszközök alkalmazási lehetőségei a pénzügyi stabilitás elemzésében, PhD-értekezés, Budapesti Corvinus Egyetem

MNB [2008]: Jelentés a pénzügyi stabilitásról, Magyar Nemzeti Bank

MNB [2009]: Jelentés a pénzügyi stabilitásról (időközi felülvizsgálat), Magyar Nemzeti Bank, 2009. november

Király Júlia–Nagy Márton [2008]: Jelzálogpiacok válságban: kockázatalapú verseny és tanulságok. *Hitelintézeti Szemle*, VII. évf. 5. sz.

Klein, John P.–Moeschberger, Melvin L. [2003]: Survival Analysis. Techniques for Censored and Truncated Data, 2nd Edition, Springer.

Koncz Gábor [2009]: Hitelkockázati stressztesztelés alkalmazása a magyar bankrendszerre. TDK-dolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem

Kovács Edith [2005]: Speciális többváltozós eloszlások modellezése kopulák segítségével. In: G. Márkus György (ed.): Új Európa, 105–114. o.

Lando, David [2004]: Credit risk modeling: Theroy and Applications. Princeton Series in Finance

Madar László [2008]: A defaultráta, a nemteljesítési valószínűség és a szabályozás egyéb követelményei. *Hitelintézeti Szemle*, VII. évf. 1. sz..

McNeil, Alexander J.–Frey, Rüdiger–Embrechts, Paul [2005]: Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools. Princeton University Press

MEDVEGYEV PÉTER [2009]: Összetett eloszlások kiszámolása, a CreditRisk+ modell (kézirat, egyetemi jegyzet). Budapesti Corvinus Egyetem

SZABADOSNÉ NÉMETH ZSUZSANNA–DÁVID LÁSZLÓ [2005]: A kis- és középvállalati szegmens mulasztási valószínűségének előrejelzése magyarországi környezetben. *Hitelintézeti Szemle*, IV. évf. 3. sz.

PAULOVICS OTTÓ [2005]: LGD-modellezés elméletben és gyakorlatban. *Hitelintézeti Szemle*, IV. évf. 5–6. sz., 63–83.o.

TULASSAY ZSOLT [2008]: A hozamok többváltozós modellezése. Előadás a Budapesti Corvinus Egyetemen, 2008. december 9.

WILLMOTT, PAUL [2000]: Paul Willmott on Quantitative Finance. John Wiley and Sons

WILSON, T. C. [1997a]: Portfolio Credit Risk (I). Risk, szeptember. (Reprinted in Credit Risk Models and Management. 2004, 2nd edition, edited by DAVID SHIMKO, Risk Books).

WILSON, T. C. [1997b] Portfolio Credit Risk (II). Risk, October. (Reprinted in Credit Risk Models and Management. 2004, 2nd edition, edited by DAVID SHIMKO, Risk Books).