INSTABIL SZABÁLYOZÁSI RENDSZER STABILIZÁLÁSA ÁLLAPOT-VISSZACSATOLÁSSAL

Dr. Szabolcsi Róbert*, Eszes János, Dr. Németh Miklós*****
***főiskolai adjunktus, **főiskolai tanársegéd, ***főiskolai tanár**

Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetem, Repülőtiszti Intézet

A szerzők célja összefoglalni a determinisztikus rendszerek négyzetes integrál kritériumon alapuló tervezésére vonatkozó elméleti ismereteket. Az optimális tervezést egy példán keresztül mutatják be. A vizsgált repülőgép instabil, ezért a szerzők a teljes állapot visszacsatolást javasolják a stabilis működés biztosítása érdekében. A cikkben alkalmazott súlyozó mátrixok egyrészt biztosítják a stabilis működést, másrészt alkalmazásuk során a többi minőségi jellemző is megfelelő lesz. Az optimális tervezési probléma megoldása során a szerzők Ljapunov második, közvetlen módszerét alkalmazzák.

1. BEVEZETÉS

A szabályozási rendszerekkel szemben támasztott alapvető követelmény a stabilis működés. A modern repülőgépek manőverezőképességének javítását gyakran az úgynevezett instabil tervezéssel oldják meg. A cikkben vizsgált repülőgép a hosszirányú statikus stabilitás határára tervezett, valamint a dinamikus viselkedését is instabil működés jellemzi.

A klasszikus szabályozástechnikában a dinamikus rendszerek tervezésére és analízisére ún. klasszikus, frekvenciatartománybeli eljárásokat alkalmaztak. A vizsgálati (analízis) és tervezési (szintézis) módszerek kidolgozása Bode, Nyquist és Nichols nevéhez fűződik. Az 1960-as évektől a frekvencia tartományban alkalmazott tervezési és analízis módszereket folyamatosan felváltották az időtartománybeli irányításelméleti módszerek. A "modern", időtartománybeli módszerek a rendszer állapottér leírására épülnek. Az állopottér elmélet kidolgozói és jeles alkalmazói voltak R.E. Kalman és Letov.

2. A NÉGYZETES INTEGRÁLKRITÉRIUM

Lineáris, autonóm szabályozási rendszer állapotegyenletét és a kimeneti egyenletet az alábbi alakban szokás megadni [1, 2, 6] :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \; ; \; \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{2.1}$$

ahol : **x** állapotvektor, **u** bemeneti vektor, **y** kimeneti vektor, **A** állapotmátrix, **B** bemeneti mátrix, **C** kimeneti mátrix és **D** segédmátrix. Az **A**, **B**, **C** és **D** mátrixok valós eleműek.

Többváltozós állandó paraméterű irányított rendszer esetében a minimálandó funkcionált az alábbi egyenlettel szokás megadni [6] :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\,\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\,\mathbf{u}\right)dt \rightarrow \text{Min} \tag{2.2}$$

ahol : **Q** - pozitív definit (vagy pozitív szemidefinit) diagonális mátrix, **R** - pozitív definit diagonális mátrix.

Az integrálandó $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\,\mathbf{x}$ kvadratikus alak a minőségi jellemzőkről hordoz információt, míg az $\mathbf{u}^T\mathbf{R}\,\mathbf{u}$ kvadratikus alak a költségeket jellemzi [6]. Ezék a tagok skalár mennyiségek, mivel [6] :

$$\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & . & . & . & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & q_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & . & . & . & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 x_1 \\ . \\ . \\ . \\ q_n x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i^2(t) \tag{2.3}$$

valamint

$$u^T R u = \begin{bmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & r_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & r_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 u_1 \\ . \\ . \\ . \\ r_n u_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} r_j u_j^2(t) \tag{2.4}$$

A (2.3) és a (2.4) egyenletek alapján azt mondhatjuk, hogy a (2.2) integrálkritérium az $x_i^2(t)$ és az $u_j^2(t)$ görbék alatti területet minimálja.

3. AZ ELFAJULT RICATTI - FÉLE MÁTRIX EGYENLET

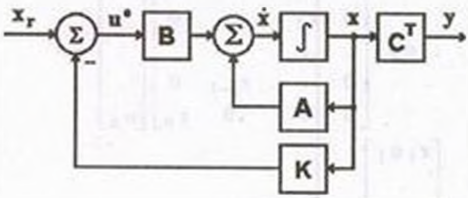
Tekintsük adottnak a vizsgált rendszer állapotegyenletét [1, 2, 5] :

$$\dot{x} = A x + B u \tag{3.1}$$

Az optimális vezérlési törvény [5] :

$$u^*(t) = -K\, x(t) \tag{3.2}$$

alakú, amely biztosítja a (2.2) négyzetes integrálkritérium minimális értékét. Az optimálási feladat megoldottnak tekinthető bármely $x(0)$ kezdeti értékre, ha ismertek a K mátrix elemei. Az optimális szabályozási rendszer hatásvázlata az 1. ábrán látható. A referencia jel legyen zérus értékű.



1. ábra
A teljes állapotvisszacsatolású rendszer hatásvázlata

Helyettesítsük a (3.2) egyenletet a (3.1) állapotegyenletbe. Kapjuk, hogy

$$\dot{x} = A x - B K x = (A - B K) x \tag{3.3}$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy az $(A - B K)$ mátrix sajátértékei negatív valós részűek. Helyettesítsük a (3.2) egyenletet a (2.2) egyenletbe. A következő egyenletet kapjuk :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^T Q x + x^T K^T R K x)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^T (Q + K^T R K) x \, dt \rightarrow \text{Min} \tag{3.4}$$

A (2.2) integrálkritérium minimálásához Ljapunov második, közvetlen módszerét használjuk fel. Feltételezzük, hogy bármely x állapotvektorhoz rendelhető egy valós elemű P pozitív definit Hermite - féle hermetikus mátrix, amelyre igaz, hogy $P = P^T$. Ebben az esetben igaz a következő egyenlet [5] :

$$x^T (Q + K^T R K) x = - \frac{d}{dt}(x^T P x) \tag{3.5}$$

Az $x^T P\, x$ kvadratikus alak deriválása és a (3.3) egyenlet felhasználása után kapjuk, hogy [5] :

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{Q}+\mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T\left[(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})^T\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})\right]\mathbf{x} \tag{3.6}$$

Ljapunov második közvetlen módszere szerint, ha az $(\mathbf{A}-\mathbf{BK})$ mátrix sajátértékei negatív valós részűek, akkor $\mathbf{Q}+\mathbf{K}^T\mathbf{RK}$ pozitív definit mátrix esetén létezik olyan pozitív definit P amelyre igaz, hogy :

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})^T\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}) = -(\mathbf{Q}+\mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K}) \tag{3.7}$$

A (3.7) egyenletet szokás Ljapunov - féle mátrix egyenletnek nevezni. A négyzetes integrálkritérium most a következő alakban adható meg :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathbf{x}^T(\mathbf{Q}+\mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}\,dt = -\left[\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}\right]_0^\infty = -\mathbf{x}^T(\infty)\mathbf{P}\mathbf{x}(\infty)+\mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \tag{3.8}$$

Mivel az $\mathbf{A}-\mathbf{BK}$ mátrix sajátértékei negatív valós részűek, ezért $\mathbf{x}(\infty) \to 0$. A (3.8) egyenlet a következő alakban írható fel :

$$\mathbf{J} = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}\mathbf{x}(0) \tag{3.9}$$

Mint az a (3.9) egyenletből látszik, az integrálkritérium függ az $\mathbf{x}(0)$ kezdeti feltételtől is.

Korábbról ismeretes, hogy az R mátrix valós elemű pozitív definit Hermite - féle hermetikus mátrix. Ezért igaz, hogy :

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^T\mathbf{T} \tag{3.10}$$

ahol : **T** - nemszinguláris (reguláris) mátrix.

A (3.10) egyenlet figyelembevételével a (3.7) egyenletet a következő módon írhatjuk fel :

$$(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK) + Q + K^T T^T TK = 0 \tag{3.11}$$

A (3.11) egyenlet a kijelölt szorzások után az alábbi alakban írható fel:

$$A^T P + PA + \left(-K^T B^T P - PBK + K^T T^T TK\right) + Q = 0 \tag{3.12}$$

Felhasználva, hogy $P = P^T$, valamint $R^{-1} = T^{-1}(T^T)^{-1}$, a zárójelben álló kifejezés tovább alakítható:

$$K^T T^T TK - K^T B^T P - PBK = K^T T^T TK - K^T\left[T^T\left(T^T\right)^{-1}\right]B^T P - P^T BK + \left(P^T - P\right)BR^{-1}B^T P =$$

$$= K^T T^T TK - K^T T^T\left(T^T\right)^{-1}B^T P - P^T B\left(T^{-1}T\right)K + P^T B\left[T^{-1}\left(T^T\right)^{-1}\right]B^T P - PBR^{-1}B^T P =$$

$$= \left[K^T T^T - P^T BT^{-1}\right]\left[TK - \left(T^T\right)^{-1}B^T P\right] - PBR^{-1}B^T P =$$

$$= \left[TK - \left(T^T\right)^{-1}B^T P\right]^T\left[TK - \left(T^T\right)^{-1}B^T P\right] - PBR^{-1}B^T P \tag{3.13}$$

Ezért a (3.12) egyenlet az alábbi módon írható fel :

$$A^T P + PA + \left[TK - \left(T^T\right)^{-1}B^T P\right]^T\left[TK - \left(T^T\right)^{-1}B^T P\right] - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{3.14}$$

A négyzetes integrálkritérium minimálása, vagyis az optimális vezérlési törvény K visszavezetési mátrixának meghatározása az

$$x^T\left[TK - \left(T^T\right)^{-1}B^T P\right]^T\left[TK - \left(T^T\right)^{-1}B^T P\right]x \tag{3.15}$$

szorzat minimálását jelenti. Mivel a (3.15) mátrix nem negatív, ezért a (3.14) egyenlet minimális (zérus) értéket akkor vesz fel, amikor

$$TK = \left(T^T\right)^{-1} B^T P \tag{3.16}$$

A (3.16) egyenletből fejezzük ki a K visszacsatolási mátrixot :

$$K^\circ = T^{-1}\left(T^T\right)^{-1} B^T P = R^{-1} B^T P \tag{3.17}$$

A (3.17) egyenlet definiálja az optimális K visszacsatolási mátrixot. Az optimális vezérlési törvény :

$$u^\circ(t) = -K^\circ x(t) = -R^{-1} B^T P x(t) \tag{3.18}$$

A P mátrix megállapítására gyakran alkalmazzák az ún. elfajult Ricatti-féle algebrai mátrixegyenletet [1,2,3,4] :

$$A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \tag{3.19}$$

Az eddig elhangzottak alapján megfogalmazhatjuk az optimálási feladat megoldásának lépéseit :

1, A (3.19) egyenlet alapján meghatározzák a P pozitív definit költségmátrixot ;

2, A kapott P mátrixot behelyettesítik a (3.17) egyenletbe. A K visszacsatolási mátrix optimális, az optimális vezérlési törvényt a (3.18) egyenlet definiálja.

Az optimáli svisszacsatolási mátrix K^0 meghatározását számítógépes programcsomagok segítik. Ezek közül a legelterjedtebbek a MATLAB [3,5], $MATRIX_X$ és a CTRL - C nevű programok.

Ezen cikkben a szerzők a MATLAB® programcsomag Control System Toolbox programjának az "lqr.m" file-ját alkalmazták a tervezési feladat megoldására.

4. INSTABIL REPÜLŐGÉP STABILIZÁLÁSA ÁLLAPOT-VISSZACSATOLÁSSAL

Legyen a vizsgált szabályozási rendszer a repülőgép hosszirányú mozgását stabilizáló robotpilóta. A repülőgép állapotegyenlete legyen a következő [4] :

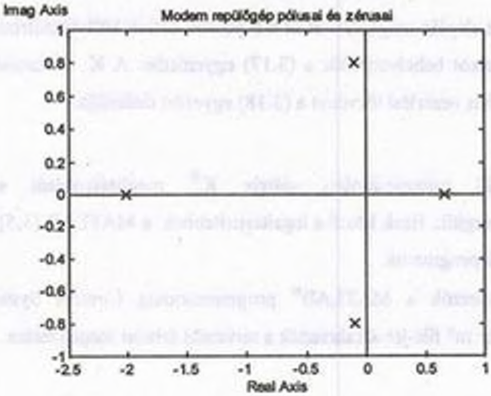
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\omega}_z \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.007 & 0.012 & 0 & -9.81 \\ -0.128 & -0.54 & 1 & 0 \\ 0.064 & 0.96 & -0.99 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ \alpha \\ \omega_z \\ \vartheta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.036 \\ -12.61 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_m \tag{4.1}$$

ahol v_x a repülőgép sebessége, α állásszög, ω_z bólintási szögsebesség, δ_m a magassági kormány kitérése, valamint ϑ a bólintási szöget jelöli.

A nemirányított repülőgép sajátértékei a komplex síkon az alábbiak :

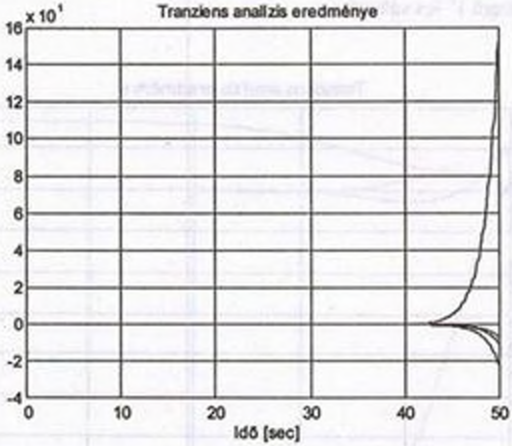
$$\lambda_1 = 0{,}6606 \; ; \; \lambda_{2,3} = -0{,}0959 \pm 0{,}8029\, i \; ; \; \lambda_4 = -2{,}0058 \tag{4.2}$$

A repülőgép pólusai a 2. ábrán láthatók. A repülőgép zérushelyekkel nem rendelkezik.



2. ábra
A szabad repülőgép pólusai : × - póIushelyek

Mint az a 2. ábrán jól látható, a szabad repülőgép λ_1 sajátértéke a komplex sík jobb felére esik, tehát a repülőgép mozgása instabil. A szabad repülőgép tranziens viselkedése a 3. ábrán látható. A bemeneti jel az állásszög 1^0 - os ugrásszerű változása.



3. ábra
A szabad repülőgép tranziens viselkedése
v_x - "..." ; α - "---" ; ω_z - "--" ; ϑ - "-.-"

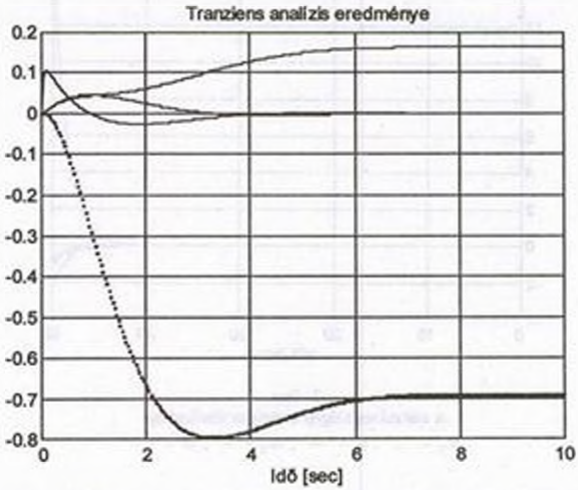
Tervezzünk olyan szabályozót a repülőgép számára, amely biztosítja a repülési jellemzők értékeinek megtartását. A tervezés során alkalmazzuk a (2.2) integrálkritériumot. Legyenek az integrálkritérium súlyozó mátrixai a következők :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{R} = [10] \tag{4.3}$$

A (4.3) súlyozó mátrixokat alkalmazva a (2.2) integrálkritérium minimálás értékét biztosító állapotvisszacsatolási mátrix tehát :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0{,}3344 & 0{,}2947 & 2{,}2996 & 3{,}8167 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

A (4.4) állapotvisszacsatolási mátrixszal rendelkező szabályozási rendszer (1. ábra) tranziens viselkedése a 4. ábrán látható. Bemeneti jel ebben az esetben is az állásszög ugrásszerű 1^0 -os változása .



4. ábra

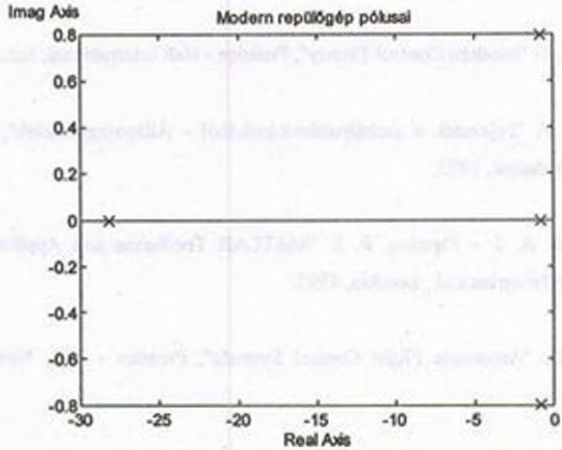
A tejes állapotvisszacsatolású rendszer tranziens viselkedése

v_x - "..." ; α - "—" ; ω_z - "--" ; ϑ - "-.-"

A zárt szabályozási rendszer sajátértékei a következők lesznek :

$\lambda_{1,2} = -0{,}7636 \pm 0{,}7937\ i$; $\lambda_3 = -0{,}7738$; $\lambda_4 = -28{,}2444$ 4.5)

A zárt szabályozási rendszer pólusai az 5. ábrán láthatók. A rendszer zérusokkal nem rendelkezik.



5. ábra

Az irányított repülőgép pólusai: × - póIushelyek

Mint az az 5. ábrán látható, a zárt szabályozási rendszer pólusai a komplex sík baloldali részén helyezkednek el, tehát a rendszer stabilis működésű. Így a szabályozó tervezési feladatot megoldottnak tekinthetjük.

ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk szerzői összefoglalták a determinisztikus rendszerek LQ alapú tervezésével foglalkozó elméleti ismereteket. A teljes állapotvisszacsatolás egyik szokványos alkalmazását tartalmazó cikkükben új példán keresztül bemutatták a négyzetes integrál kritérium alkalmazását olyan repülőgépre, amelynek hosszirányú statikus stabilitási derivatív együtthatója zérus, tehát a stabilitás határán működik. A szabad repülőgép pozitív előjelű pólusát a komplex sík jobboldali feléről állapotvisszacsatolással helyezték át a baloldali félsíkra.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] Brogan, W. L. "Modern Control Theory", Prentice - Hall International, Inc., 1991.

[2] Dr. Csáki F. "Fejezetek a szabályozástechnikából - Állapotegyenletek", Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

[3] Clipperfield, A. J. - Fleming, P. J. "MATLAB Toolboxes and Applications for Control", Peter Peregrius Ltd., London, 1993.

[4] McLean, D. "Automatic Flight Control Systems", Prentice - Hall, New York - London, 1990.

[5] Ogata, K. "Designing Linear Control Systems with MATLAB", Prentice - Hall International Editions, 1994.

[6] Vegte, J. V. "Feedback Control Systems", Prentice - Hall International, Inc., New Jersey, 1990.

ABSTRACT

The aim of authors is to summarize theoretical backgrounds of LQ based design methods. The optimal synthesis method is introduced through an example of controller synthesis for aircraft . The aircraft model is unstable, therefore the authors propose full state feedback in order to ensure stable working. Weighting matrices used in this paper allows to stabilize the unstable aircraft, secondly dynamic performance characteristics will be appropriate. During solving the LQ optimal design problem authors use the second method of Lyapounov.