

Horváth Dezső

főiskolai docens

Repülő Szakág Tanszék, műszertechnikai szakcsoportvezető

**ÖNMŰKÖDŐ SZABÁLYOZÁSOK VIZSGÁLATA ANALÓG SZÁMÍTÓGÉP  
SEGÍTSÉGÉVEL: A ROBOTPILÓTA IRÁNYSTABILIZÁLÁSÁT LEÍRÓ  
LINEARIZÁLT DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZER PROGRAMOZÁSA.**

A cikk a Repülő Szakág Tanszéken található MEDA 40TA analóg számítógép alkalmazására tesz javaslatot az "Automatika", "A villamos gépek" és az "Automatikus vezérlőrendszerek" tantárgy oktatása során. A matematikai modellezés két irányával foglalkozik az analógia és a műveleti elemekből összeállított modellekkel. Vizsgálja a repülőgép semleges tengelyének dőlését egyenáramú motor segítségével. Bemutatja a robotpilóta segítségével végzett iránystabilizálás folyamatát.

**Bevezetés**

Az analóg számítógépek a matematikai gépek külön osztályát képezik. A feladatok kiinduló adatait fizikai mennyiségekkel fejezik ki (pl. hosszúság, feszültség, szögelfordulás, nyomás, stb) és amelyeket méréssel értékelnek ki. Az analóg számítógépek (folytonos működésű matematikai gépek) alkalmasak a folytonos bemenőmennyiségekkel meghatározott feladatok megoldására. [1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10]

Az analóg típusú számolóberendezés legegyszerűbb példájának a logarlécet tekinthetjük. A számok logaritmusainak az osztáshosszak felelnek meg. (A digitális berendezések legegyszerűbb példái a golyós számológépek és az asztali számológépek.)

Az analóg számítógépek felhasználhatók lineáris és nemlineáris, állandó és változó együtthatójú differenciálegyenletek és -egyenletrendszerek megoldására, de megoldhatók a parciális differenciálegyenletek és az algebrai egyenletek



is. A szimulálandó rendszer matematikai modellje az esetek többségében differenciálegyenlet. Megfelelő programozással a differenciálegyenletek megoldása a sorozatos integrálásra vezethető vissza, így a differenciálandó egységek mellőzhetőek. A differenciálás művelete zajkiemelő hatása miatt általában kerülendő. [1, 4, 5, 7, 9, 11]

### 1. A matematikai modellezés.

A matematikai modellezés két irányával foglalkozom. Az első alapján ismert rendszerek analógia alapján, a második alapján külön műveleti elemekből összeállítva építenek modelleket. [7, 9, 10]

#### a.) Modellezés analógia alapján.

A modellek építésében a rendszerek különböző fizikai természetű jelenségei közti analógiát használják fel. Így az eredeti rendszer viselkedése a fizikai sajátosságaiban tőle különböző modellen vizsgálható.

Szabályozási rendszerek analógia alapján végzett modellezése: a repülőgép semleges tengelye dőlésének vizsgálata egyenáramú motor segítségével.

A repülőgép dőlésének mozgásegyenlete:

$$J_x \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = M_x \left( v, \frac{d\gamma}{dt}, \delta_k \right) \quad (1)$$

ahol:  $\gamma$  - a dőlés szöge;

$\delta_k$  - a kormány kitérése.

Ha a repülőgép repülési sebessége állandó, és a repülőgépnek az egyensúlyi helyzettől való eltérését vizsgáljuk (az az állapot, amikor a repülőgép mozgását jellemző összes paraméter éppen a beállított értékű), akkor a dőlés lefolyá-

sának lineáris differenciálegyenlete:

$$J_x \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + \left( \frac{\partial M_x}{\partial \gamma} \right)_0 \frac{d\gamma}{dt} = - \left( \frac{\partial M_x}{\partial \delta_k} \right)_0 \delta_k \quad (2)$$

ahol:  $J_x$  - a repülőgép hossztengetyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka;

$\left( \frac{\partial M_x}{\partial \delta} \right)_0$  - a légellenállás nyomatéka;

$\left( \frac{\partial M_x}{\partial \delta_k} \right)_0$  - a botkormány aerodinamikai hatásosságát meghatározó tényező.

#### A repülőgép izolált mozgásának modellezése.

Használjuk fel az egyenáramú motort a repülőgép dőlés izolált mozgásának modellezésére (1. ábra). Az egyenáramú motor mozgásegyenlete a tengelyre ható terhelés nélkül, a vasvesztés és armatúravisszahatás elhanyagolásával:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_m ; \quad M_m = f(\omega, U_r) \quad (3)$$

ahol:  $J$  - a motor tehetetlenségi nyomatéka.

Ha a motor nyomatéki jelleggörbét egyenessel közelítjük, állandó mágneses fluxus mellett (az armatúrakör inductívását elhanyagoljuk) a következőt kapjuk:

$$M_m = c_n \phi I_r ; \quad I_r = \frac{U_r - c_e \phi \omega}{R_r} \quad (4)$$

A mozgásegyenlet:

$$J \frac{d\omega}{dt} + \frac{c_e^2 c_M \phi}{R_r} \omega = \frac{c_M \phi}{R_r} U_r ; \quad (5)$$



vagy

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{1}{T_p} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{c_M \phi}{i R_r J} U_r \quad (6)$$

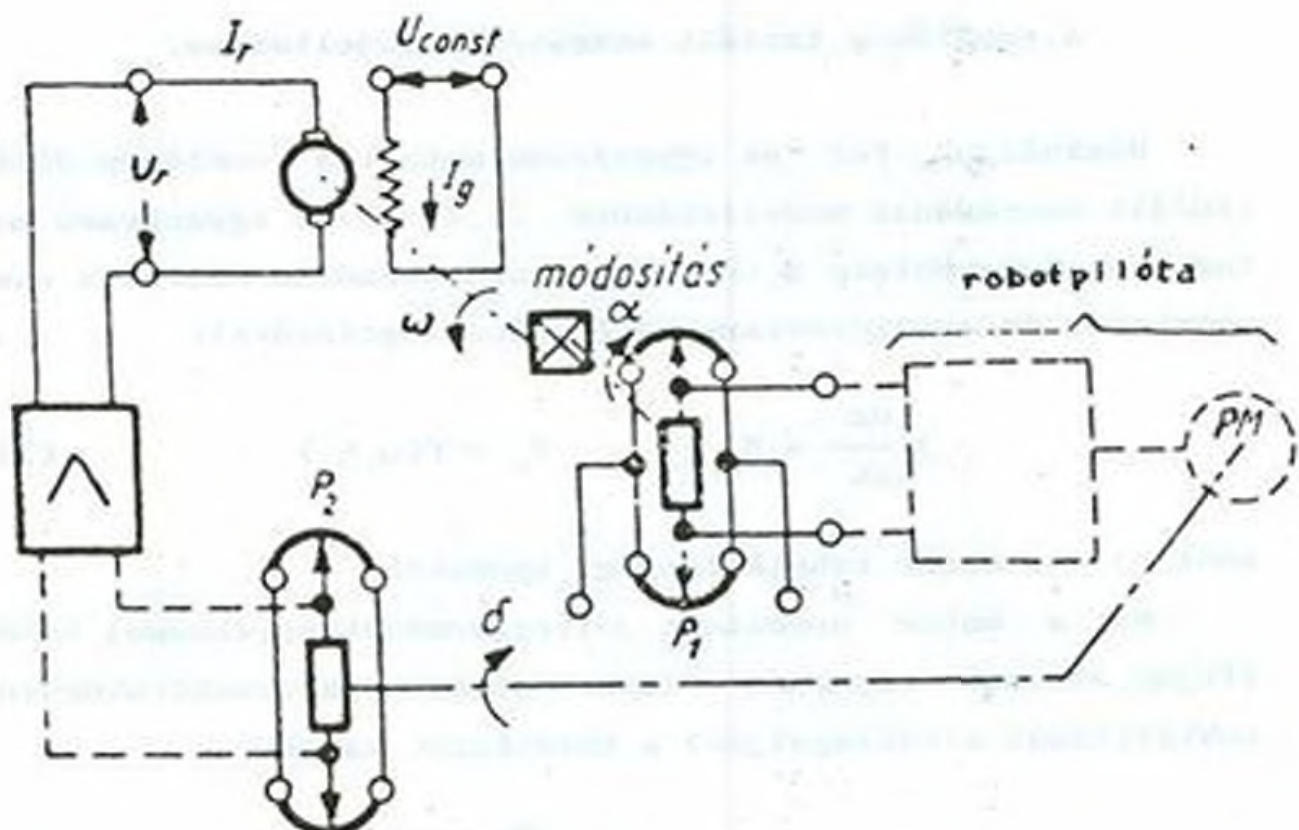
ahol:  $\phi$  - a gerjesztés fluxusa;

$\omega = i \frac{d\alpha}{dt}$  - a motor szögsebessége;

$i$  - fogaskerékátvitel;

$T_p = \frac{R_r I}{c_M c_M \phi^2}$  - a motor felfutási időállandója;

$\alpha$  - a potenciométer elfordulási szöge.



1. ábra

Átrendezve a repülőgép izolált mozgásának egyenletét:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \left( \frac{\partial M_x}{\partial \gamma} \right)_0 \frac{1}{J_x} \frac{d\gamma}{dt} = - \left( \frac{\partial M_x}{\partial \delta_x} \right)_0 \frac{1}{J_x} \delta_x \quad (7)$$

Ha a motor jellemzőit úgy választjuk meg, hogy az

$$\frac{1}{T_p} = \frac{1}{J_x} \left( \frac{\partial M_x}{\partial \gamma} \right)_0 ; \quad \frac{c_M \phi}{R_r J} K_M = \left( \frac{\partial M_x}{\partial \delta_k} \right)_0 \cdot \frac{1}{J_x} ; \quad U_r = - k_M \delta_k ; \quad (8)$$

egyenlőtlenséget elégítsük ki, a  $P_1$  potenciométer csúszkájának elfordulási szöge a dőlés szöget ábrázolja. Így a repülőgép dőlés szögének alakulása és a potenciométer tengelyének elfordulási szögváltozása időben azonos módon folyik le. A modell általános kapcsolása az 1. ábrán látható.

Az ilyen modellezés előnye, hogy a modell saját jellemzői, pl a tehetetlenségi nyomatéka, az eredeti rendszer jellemzőinek megfelelői. Hátrányai, hogy a kiindulási feltételek csak viszonylag nagy hibával reprodukálhatók, mivel a súrlódást, veszteségi nyomatékot stb. nem vesszük figyelembe. Ezzel az analóg modellel legfeljebb másodrendű egyenletet lehet leképezni.

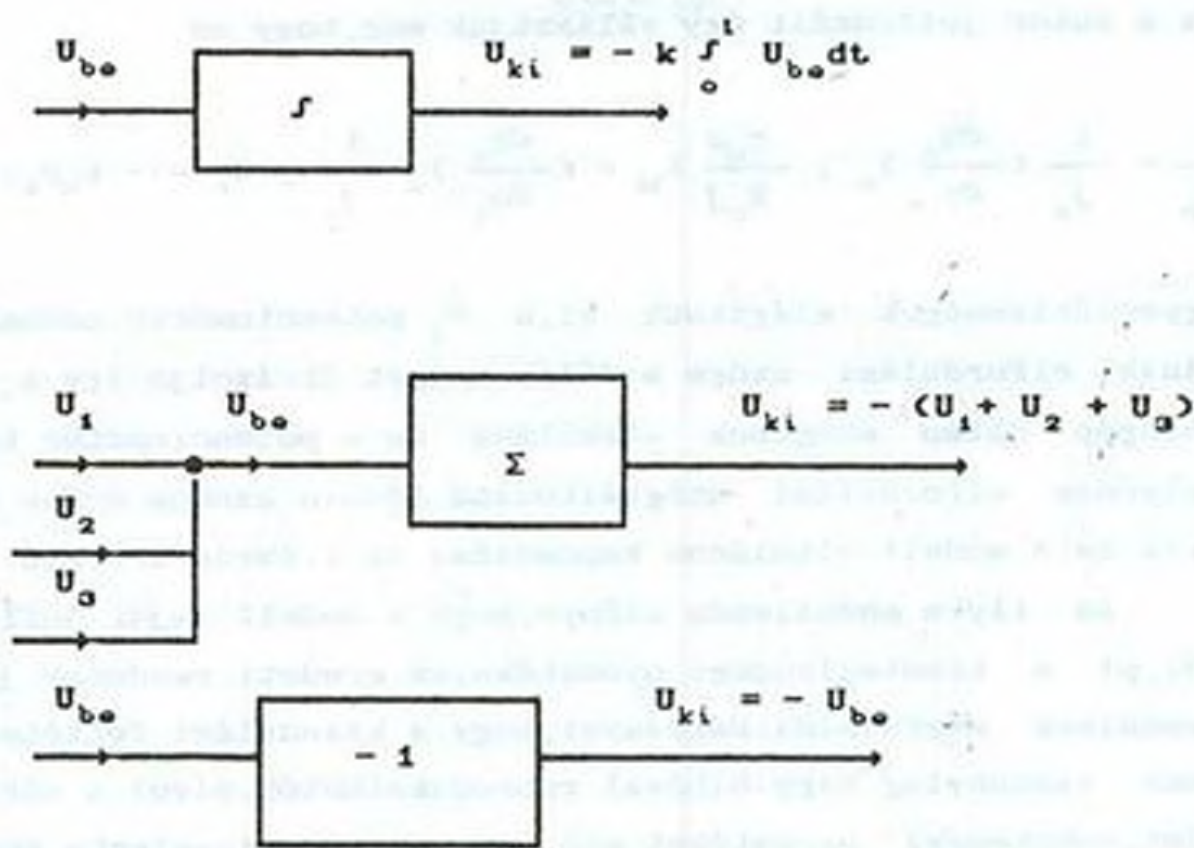
#### b.) Modellezés számítógépekkel.

Számítógépekkel felépített modellek az olyan elemi matematikai műveletek folytonos megvalósításán alapulnak, mint az összeadás, kivonás, szorzás, osztás, differenciálás és integrálás. Az analógai alapján megvalósított modellektől abban különböznek, hogy hiányzik az egyenes fizikai analógia a vizsgált jelenségeket jellemző értékek, és az egyes matematikai műveletek eredményeül kapott értékek között. Ilyen analógia nincs a megvizsgált fizikai rendszerek jellemzői és a modellezőberendezés jellemzői között sem.

Az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet megoldási módszere.

A modell a következő műveleti elemeket foglalja magába (2. ábra):





2. ábra

A műveleti elemekkel végzett számításokra oldjuk meg a repülőgép dőlésének mozgásegyenletét (7). A (7) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -B_1 \frac{d\gamma}{dt} - B_2 \delta_k \quad (9)$$

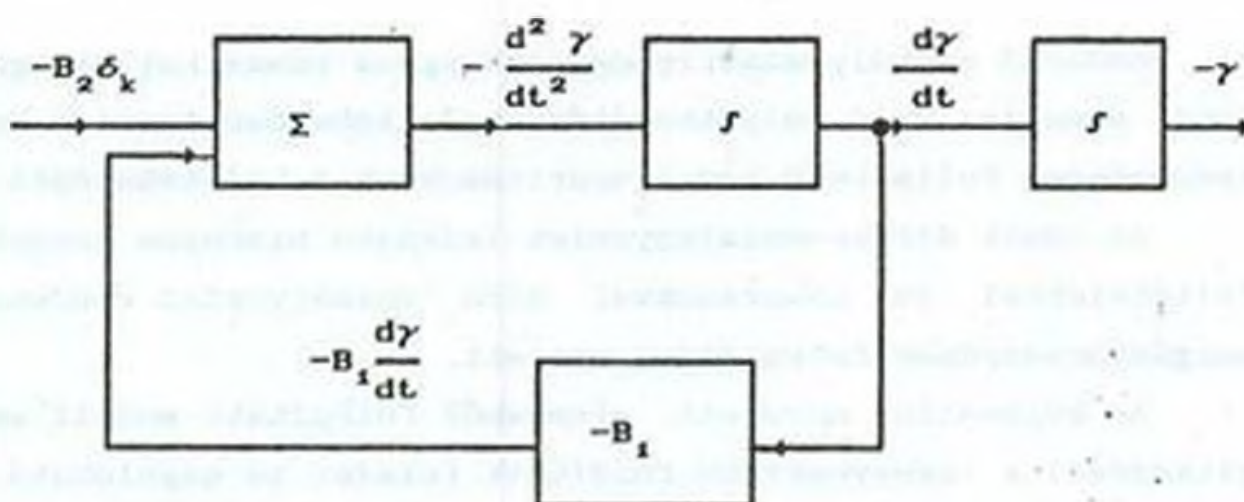
ahol:  $\delta_k(t)$ ,  $B_1$  és  $B_2$  - adott értékek;

$\gamma(t)$  - a keresett függő változó.

A (9) egyenletből következik, hogy a  $\gamma(t)$  megkereséséhez kétszer el kell végezni a

$$-(B_1 \frac{d\gamma}{dt} + B_2 \delta_k) \text{ összeg integrálását. A } B_1 \frac{d\gamma}{dt} \text{ ismer-$$

etlen összeadandót az első integrálás után kapott érték és a  $-B_1$  együttható szorzataként lehet előállítani. Ez a tag a visszacsatolás segítségével összegződik (3. ábra).

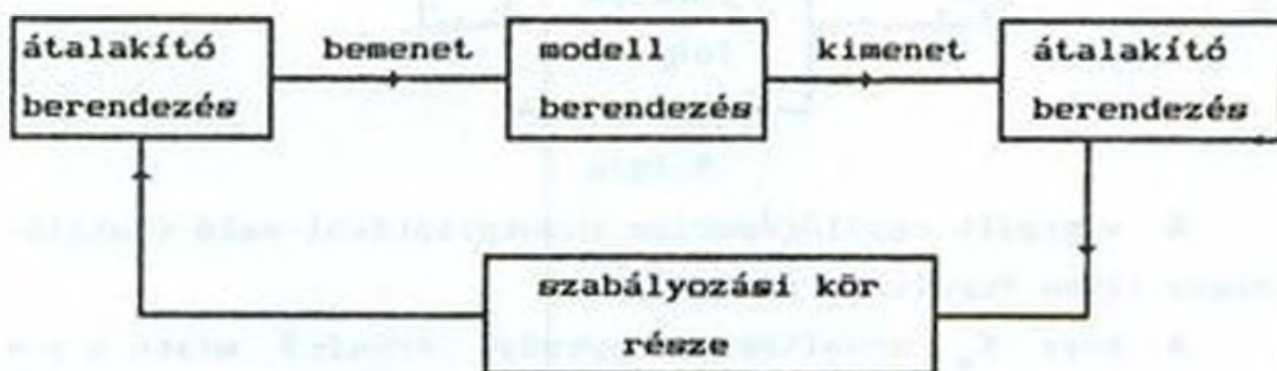


3. ábra

c.) Szabályozóköri elemeket is felhasználó modell  
(4. ábra).

A szabályozási folyamatok modellezése különálló analóg számítógépelemekkel a differenciálegyenlet numerikus integrálási módszere egy különleges válfajának tekinthető.

A numerikus integrálás elvégezhető az egész zárt szabályozási kör viselkedését leíró teljes differenciálegyenlet rendszerre, valamint a szabályozási körnek csak egy részét jellemző részlet-differenciálegyenletekre. Ekkor a szabályozás zárt körét úgy hozzuk létre, hogy a szabályozási kör hiányzó részeit a modellel helyettesítjük, így a modell és a szabályozóköri elemek együtt alkotnak szabályozási kört.



4. ábra



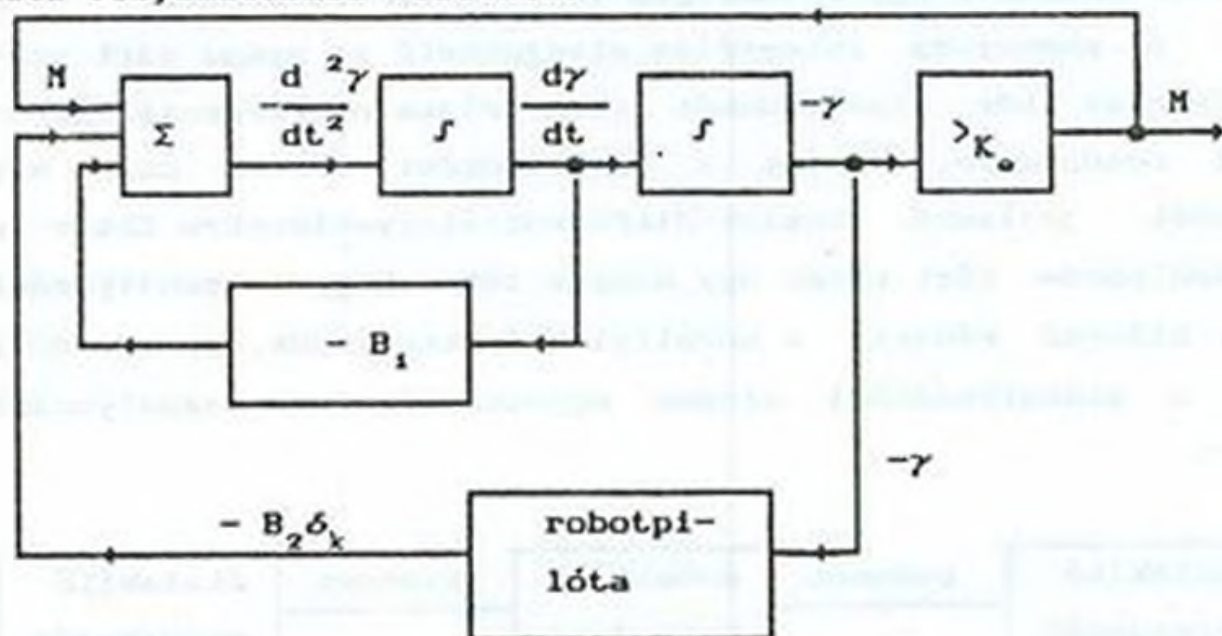
Az önműködő szabályozási rendszerek egyes részeinek vizsgálata modellel való helyettesítés útján, lehetővé teszi a berendezésben fellelhető nem linearitásoknak a kiértékelését.

Az adott differenciálegyenlet leírható bizonyos kezdeti feltételekkel és zavarásokkal bíró szabályozási rendszer mozgástörvényének felkutatása mellett.

A különálló műveleti elemekből felépített modell segítségével a legegyszerűbb fordított feladat is megoldható.

d.) Fordított feladat analóg számítógépen való megoldása (5. ábra).

A fordított feladat lényege azon zavarások jellegének meghatározása, amelyek az adott differenciálegyenletek és kezdeti feltételek esetén a rendszerben meghatározott átmeneti folyamatokhoz vezetnek.



5. ábra

A vizsgált repülőgépdőlés robotpilótával való stabilizálása ilyen fordított feladat.

A nagy  $K_0$  erősítésű tényezőjű erősítő miatt a  $\gamma = \gamma_{ki_0}(t)$  egyenlőségnek feltétlenül fenn kell állnia.  $\gamma_{ki_0}(t)$



a vizsgált repülőgép valódi körülmények között mért koordinátáinak alakulása/.

Az erősítő kimenő feszültsége a választott léptékben a tárgyra ható zavarási reprodukálja. Megállapítható a különböző szabályozott szakaszokban fellépő, már megengedhetetlen túlterhelések nagysága is.

A modellezés módszerei, különösen a zárt szabályozási kör tényleges elemeit is felhasználó modellezés, az önműködő szabályozási rendszer egy sajátos vizsgálati módszerének tekinthető.

## 2. Lineáris differenciálegyenlet megoldása.

Az önműködő szabályozási rendszer mozgását leíró differenciálegyenlet az analóg számítógépre felírható:

a.) a keresett koordinátát leíró egyetlen egyenlet alakjában (rendszerint a szabályozott jellemzőt):

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = b_0 \frac{d^m y}{dt} + b_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dy}{dt} + b_m y, \quad y = F(t) \quad (10)$$

ahol:  $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m$  - együtthatók;

$x$  - szabályozott jellemző;

$F(t)$  - a külső zavarás.

b.) elsőrendű differenciálegyenlet alakjában:

$$b_i \frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + F_i(t) = 0 \quad (11)$$

ahol:  $b_i; a_{ik}$  - együtthatók;

$x_1, x_2, \dots, x_l, \dots, x_n$  - a rendszer koordinátái;

$F_l(t)$  - a rendszerre ható zavarások.

c.) a szabályozott szakasz és szabályozó egyenletére különválasztott egyenletrendszerek alakjában.

A szabályozott szakaszra:

$$a_0 \frac{d^n \gamma}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \gamma}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \gamma + k \mu = b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_m y, \quad y = F(t) \quad (12)$$

A sztatikus szabályozó egyenlete:

$$c_0 \frac{d^a \mu}{dt^a} + c_1 \frac{d^{a-1} \mu}{dt^{a-1}} + \dots + c_{a-1} \frac{d\mu}{dt} + \mu = \epsilon_n \gamma + \epsilon_{n-1} \frac{d\gamma}{dt} + \epsilon_{n-2} \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + \dots + \epsilon_1 \frac{d^{n-1} \gamma}{dt^{n-1}} \quad (13)$$

Asztatikus szabályozóra:

$$c_0 \frac{d^a \mu}{dt^a} + c_1 \frac{d^{a-1} \mu}{dt^{a-1}} + \dots + c_{a-1} \frac{d\mu}{dt} = \epsilon_n^* \gamma + \epsilon_{n-1}^* \frac{d\gamma}{dt} + \dots + \epsilon_1^* \frac{d^{n-1} \gamma}{dt^{n-1}} \quad (14)$$

ahol:  $\gamma$  - a szabályozott jellemző;

$\mu$  - a szabályozó kimenőjele;

$F(t)$  - a szabályozott szakaszra ható zavarójel;

$a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m; c_0, c_1, \dots, c_n; \epsilon_1, \dots, \epsilon_n;$

$\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_n^*$

- együtthatók;



$\epsilon_n$  - a szabályozó sztatikus erősítési tényezője.  
 d.) a dinamikai egyenletek formájában.

Egyhurkos önműködő szabályozási rendszer (6. ábra) mozgásegyenleteinek alakja:

$$T_1 \frac{dx_2}{dt} + x_2 = K_1 x_1;$$

$$T_2 \frac{dx_3}{dt} + x_3 = K_2 x_2;$$

$$T_3 T_4 \frac{d^2 x_4}{dt^2} + T_4 \frac{dx_4}{dt} + x_4 = K_3 x_3; \quad \} (15)$$

$$\frac{dx_5}{dt} = K_4 x_4$$

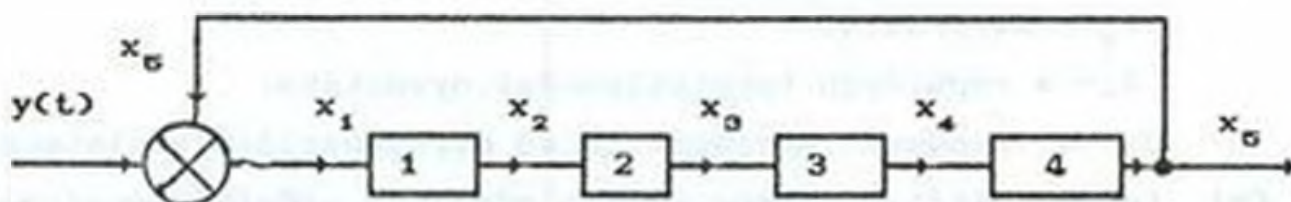
$$x_1 = y(t) - x_5$$

ahol:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  - a rendszer koordinátái;

$y(t)$  - a külső szabályozó hatás;

$T_1, T_2, T_3, T_4$  - időállandók;

$K_1, K_2, K_3, K_4$  - az egyes tagok erősítési tényezői.



$$\text{ahol: } 1 - \frac{K_1}{T_1 s + 1} ; 2 - \frac{K_2}{T_2 s + 1} ; 3 - \frac{K_3}{T_3 T_4 s^2 + T_4 s + 1} ;$$

$$4 - \frac{K_4}{s}$$

6. ábra

e.) a vizsgált fizikai objektum kiindulási differenciálegyenlet-rendszerének alakjában.

A repülőgép iránystabilitásának linearizált<sup>1</sup> egyenlet-rendszere.

A szabályozott szakasz egyenletei:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= A_1\beta + A_2\delta + \frac{F_z}{m \cdot v} ; \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + A_3 \frac{d\psi}{dt} + A_4\beta + A_5\delta &= \frac{M_z}{I_y} ; \\ \theta &= \psi - \beta \end{aligned} \quad \} \quad (16)$$

A robotpilóta egyenlete:

$$T_p \frac{d^2\delta}{dt^2} + h \frac{d\delta}{dt} + \delta = i(\psi + T_1 \frac{d\psi}{dt} + T_2 \frac{d^2\psi}{dt^2}) \quad (17)$$

ahol:  $\psi$  - a repülőgép irányszöge;

$\beta$  - a csúszás szöge;

$\delta$  - a botkormány kitérése;

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  - a repülőgép időállandói;

$T_p, h, i, T_1, T_2$  - a robotpilóta időállandói;

$M_z$  - zavarónyomaték;

$F_z$  - zavaróerő;

$I$  - a repülőgép tehetetlenségi nyomatéka.

Ha a rendszer mozgását leíró differenciálegyenleteket fel tudjuk állítani, akkor azok a műveleti erősítők segítségével vagy a differenciálhányadosok rendszámának sorozatos növelése vagy csökkentése útján megoldhatók (differenciáló, ill. integráló módszer).

<sup>1</sup> feltételezzük, hogy az irány szerinti mozgás izolált, azaz nem vesszük figyelembe a dőlésnek a repülőgép irány szerinti mozgásra gyakorolt hatását.



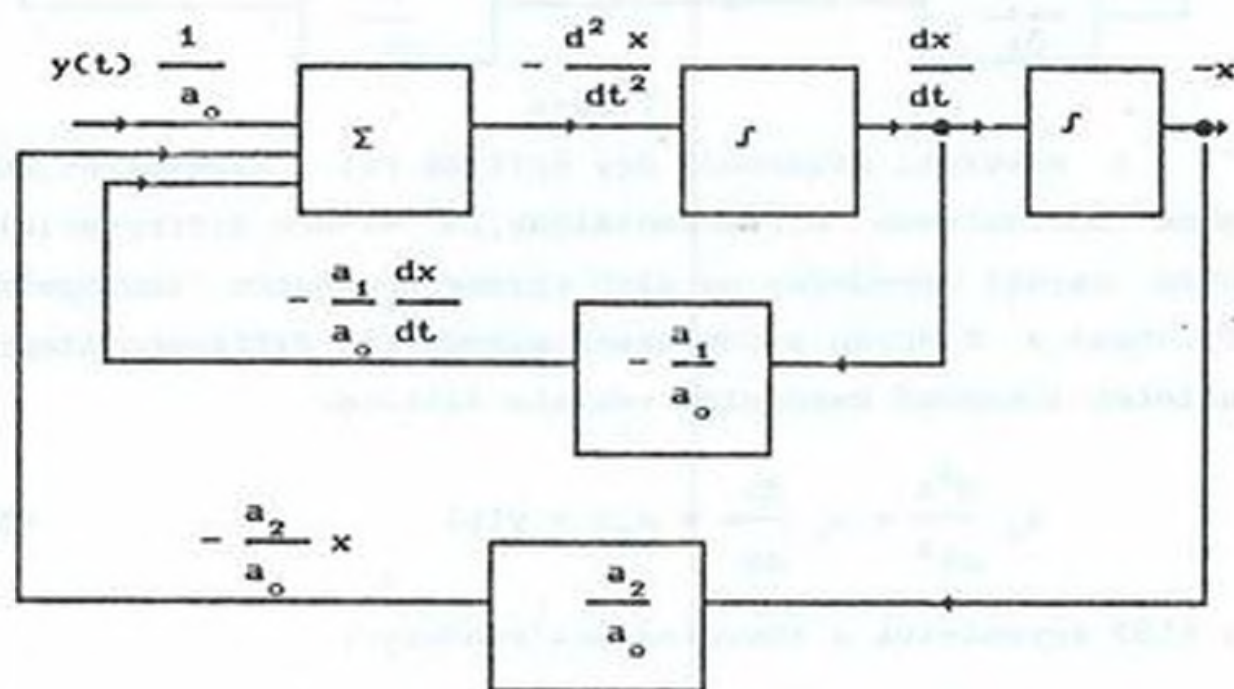


juk, minden differenciálás eredményét a megfelelő állandó együtthatók  $( -\frac{a_0}{a_2}$  és  $-\frac{a_1}{a_2}$  ) szorzó egységeinek segít-

ségével megszorozzuk, végül megkapjuk az első összegező egységre adandó tagokat. A feladat megoldása a differenciálhányadosok rendszámcsökkentésének módszerével az egymás utáni integráláson és minden integrálás eredményének az összegező egység bemenetén való összegezésén alapul<sup>2</sup>.

Lineáris, másodrendű differenciálegyenlet megoldása integráló módszerrel.

A 8. ábrán a lineáris, másodrendű differenciálegyenletnek a differenciálhányadosok rendszámcsökkentésének módszerével való leképezést látjuk.



8. ábra

<sup>2</sup>a feladat megoldásának ez a módja nem praktikus, mivel soros differenciálás esetén a bemenőjelben mindig jelen lévő hibák megengedhetetlen mértékben nőnek



A kapcsolási vázlat összeállításához a megoldandó egyenletet át kell rendezni; a viszonylag legmagasabb differenciálhányadost az egyik oldalra, a többi összeadandót a jobboldalra rendezzük, és a független változókat a visszacsatolásokon keresztül az összeadandó egységre vezetjük. A feladat leképzésének alapegységei az integráló műveleti elemek.

### 3. A feladat programozása, megoldása.

Az analóg számítógép segítségével megoldandó differenciálegyenletek megadhatók:

- egy magas rendszámú egyenlettel;
- különféle rendszámú differenciálegyenletekből álló rendszerrel;
- és egy elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel.

Elvileg a feladatok programozása végezhető a differenciálhányados rendszámnövelés ill. csökkentés módszerével. A rendszámnövelés esetén a keresett függvényből kiindulva oldjuk meg a feladatot, és az egyes műveleti elemeket úgy kapcsoljuk össze, hogy a sorozatos differenciálást és az egyes differenciálhányadosok összeadását valósítjuk meg. A rendszámcsökkentés esetén a keresett függvény legmagasabb rendszámú differenciálhányadosából kiindulva történik a megoldás.

#### 3.1. Programozás a differenciálhányados rendszámcsökkentésével.

A repülőgép robotpilóta segítségével végzett iránystabilizálási folyamatát leíró differenciálegyenlet-rendszer szerkezeti vázlatának összeállítása.

A következő kezdeti feltételekből induljunk ki: a dőlést figyelmen kívül hagyjuk, feltételezzük, hogy a repülőgép  $v = \text{const}$  sebességgel mozog, a robotpilóta merev visszacsatolású, valamint csak az első és második differenciálhányadost vesszük figyelembe.

A felírható egyenletek [1, 2, 3, 4, 9]:

$$T_1 \ddot{\psi} + \dot{\psi} = -K_1 \delta - K_2 \beta + f_1(t) \quad (20)$$

$$T_2 \dot{\beta} + \beta = T_2 \dot{\psi} + f_2(t) \quad (21)$$

$$T_2 \ddot{\delta} + \dot{\delta} = K_3 I \quad (22)$$

$$T_3 \dot{I} + I = K_\psi \psi + K_\psi \dot{\psi} + K_\psi \ddot{\psi} - K_4 \delta \quad (23)$$

A (20) egyenlet az Y tengelyre vonatkozó nyomaték egyenlete, a (21) a Z tengelyre vetített összes erő egyenlete, a (22) a kormánymű egyenlete, a (23) az erősítő és érzékelőszerv egyenlete.

ahol:  $T_1 = \frac{J}{M_c \dot{\psi}}$

} a repülőgép időállandói;

$$T_2 = \frac{m \cdot v}{2\beta}$$

$$K_1 = \frac{M_p \delta}{M_c \dot{\psi}}$$

} a repülőgép erősítési tényezői;

$$K_2 = \frac{M_c \beta}{M_c \dot{\psi}}$$

$$f_1(t) = \frac{M_b(t) - M_b^0}{M} \quad - \text{zavarónyomaték növekménye;}$$



$$f_2(t) = \frac{z_b(t) - z_b^0}{z^\beta} \quad \text{a zavaróerő növekménye;}$$

$T_4$  - a kormányberendezés gyorsulásának időállandója;

$T_9$  - az erősítő időállandója;

$K_3$  - a kormánymű sztatikus átviteli tényezője;

$K_4$  - a merev visszacsatolást meghatározó tényező;

$K_\psi, K_{\psi'}, K_{\psi''}$  - az első és második differenciálhányadosok végleges értéktől való eltérésének hatását reprezentáló tényezők;

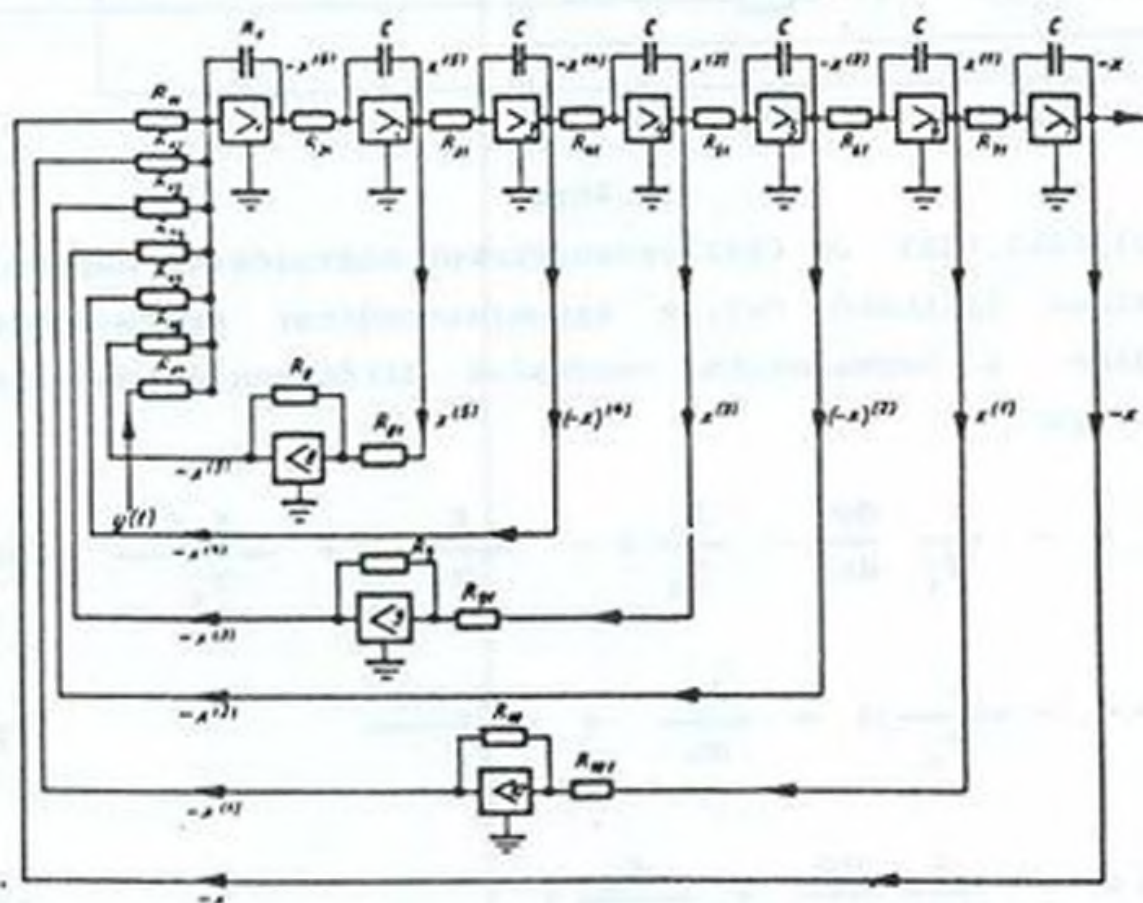
$\psi$  - irányszög eltérése;

$\beta$  - a siklás szögének eltérése;

$\delta$  - a kormány kitérése;

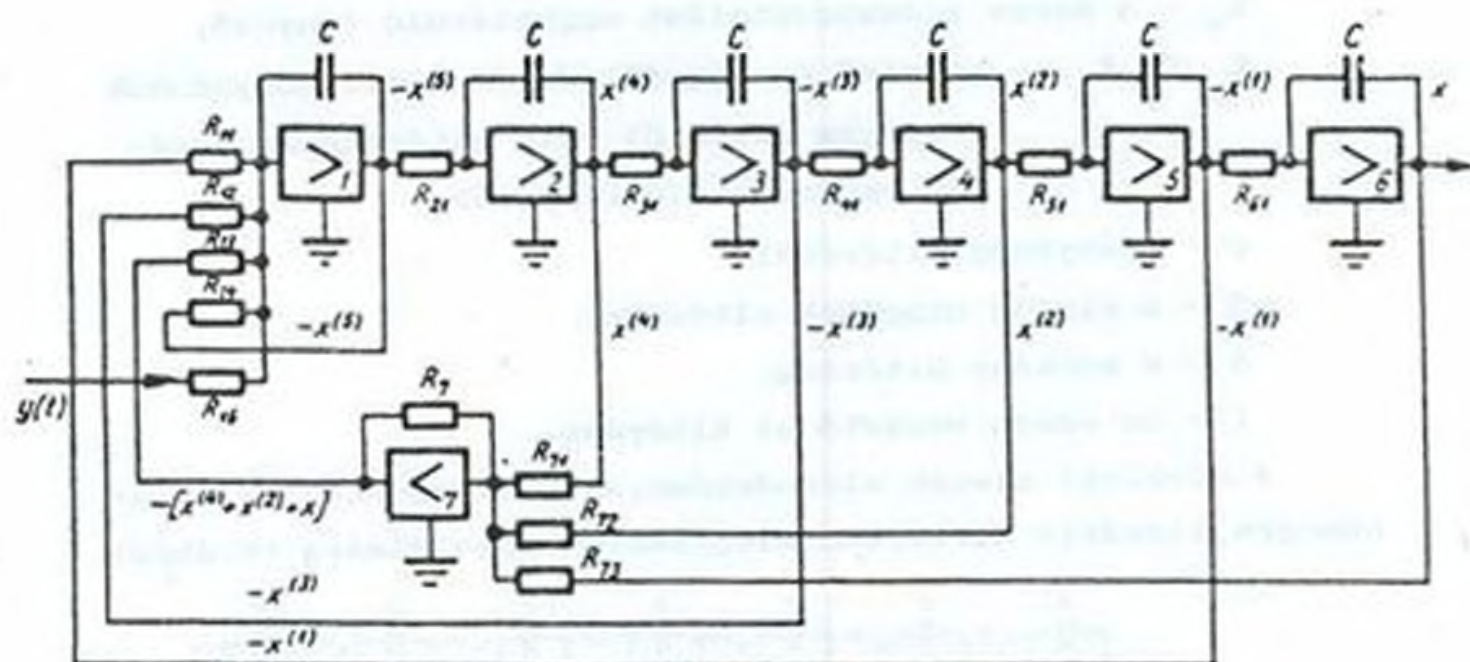
$I$  - az eredő vezérlőjel kitérése.

A műveleti elemek elrendezése, állandó együtthatójú, inhomogén, lineáris differenciálegyenlet megoldására (9. ábra).



9. ábra

A kapcsolás egyszerűsíthető, ha az összegzés és integrálás műveletét az első fokozattal végeztetjük, és egyetlen segédösszegzővel helyettesítjük az eredeti kapcsolás jel fordító műveleti elemeit (8,9 és 10 elem). Az átalakított kapcsolás, a 10. ábrán látható.



10. ábra

A (20), (21), (22) és (23) egyenleteket megvalósító kapcsolás hasonlóan építhető fel, az egyenletrendszer egyes elemeit előzőleg a legmagasabb rendszámú differenciálhányadosra megoldjuk:

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = - \frac{1}{T_1} \frac{d\psi}{dt} - \frac{K_1}{T_1} \delta - \frac{K_2}{T_1} \beta + \frac{f_1(t)}{T_1} \quad (24)$$

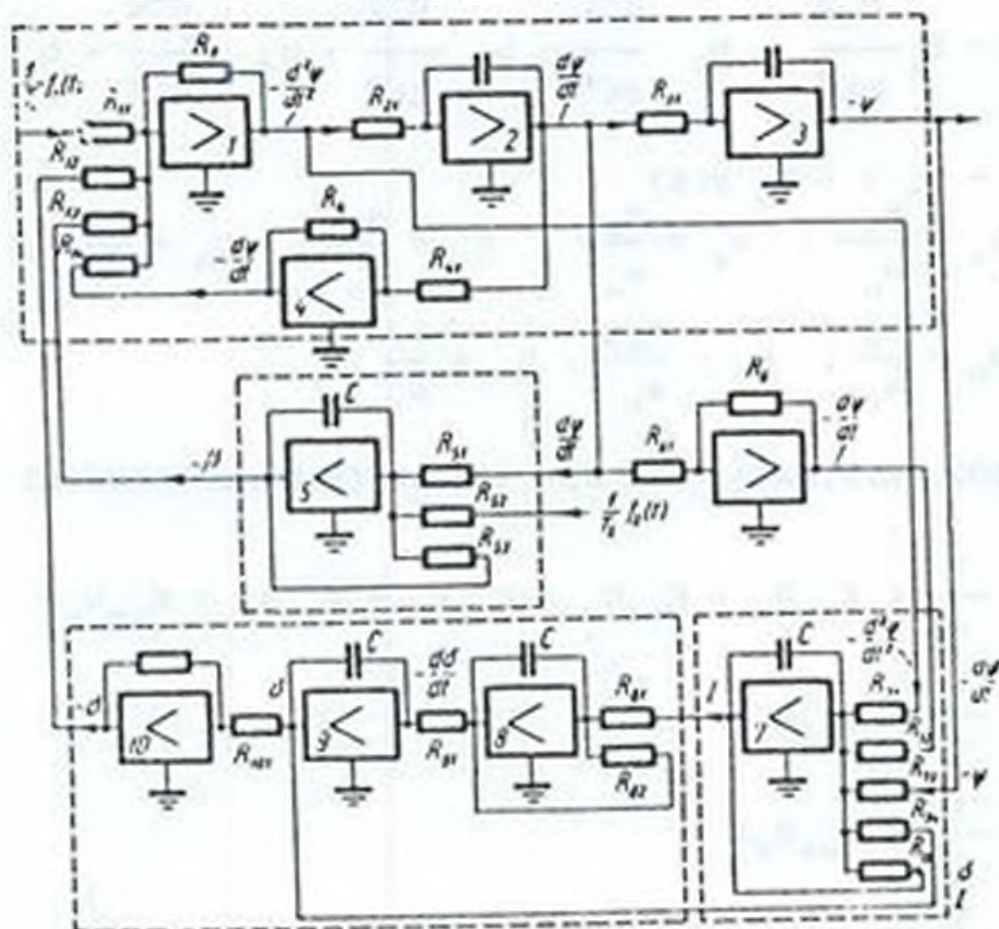
$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} = - \frac{1}{T_2} \beta + \frac{d\psi}{dt} + \frac{f_2(t)}{T_2} \quad (25)$$

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} = - \frac{1}{T_4} \frac{d\delta}{dt} + \frac{K_3}{T_4} I \quad (26)$$



$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{T_3} + \frac{K_\psi}{T_3} \psi + \frac{K_{\dot{\psi}}}{T_3} \frac{d\psi}{dt} + \frac{K_{\ddot{\psi}}}{T_3} \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{K_\delta}{T_3} \delta \quad (27)$$

A teljes kapcsolási vázlat a 11. ábrán látható.



11. ábra

A szaggatott vonalakkal körülhatárolt részek az egyenletrendszer egyes kiinduló egyenleteinek felelnek meg.

A műveleti elemek kimenő és bemenőjelei közötti összefüggések (a 9. ábra alapján):

A szükséges ellenállásértékek a következő egyenletekből számíthatók ki:

integrátorra:  $K_{ij} = \frac{1}{R_{ij}c}$  ;

differenciátorra:  $K_{ij} = R_2 c_{ij}$  ;

erősítőre:  $K_{ij} = \frac{R_2}{R_{ij}}$  .

A kimenőjel és bemenőjel közötti összefüggéseket a

$$\frac{d^6x}{dt^6} = -b_1 \frac{d^5x}{dt^5} - b_2 \frac{d^4x}{dt^4} - b_3 \frac{d^3x}{dt^3} - b_4 \frac{d^2x}{dt^2} - b_5 \frac{dx}{dt} - b_6 x + b_0 y(t) \quad (28)$$

ahol:  $b_1 = \frac{a_1}{a_0}$  ;  $b_2 = \frac{a_2}{a_0}$  ;  $b_3 = \frac{a_3}{a_0}$  ;  $b_4 = \frac{a_4}{a_0}$  ;

$$b_5 = \frac{a_5}{a_0} ; b_6 = \frac{a_6}{a_0} ; b_0 = \frac{1}{a_0} .$$

és a (20), (21), (22), (23) egyenletek felhasználásával kapjuk:

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{1}{s} (K_{11}U_5 + K_{12}U_3 + K_{13}U_7 + K_{14}U_1 + K_{15}U_0) \\ U_2 &= -\frac{1}{s} (K_{21}U_1) \\ U_3 &= -\frac{1}{s} (K_{31}U_2) \\ U_4 &= -\frac{1}{s} (K_{41}U_3) \\ U_5 &= -\frac{1}{s} (K_{51}U_4) \\ U_6 &= -\frac{1}{s} (K_{61}U_5) \\ U_7 &= - (K_{71}U_2 + K_{72}U_4 + K_{73}U_6) \end{aligned} \quad (29)$$



ahol:  $s = \frac{d}{dt_m}$  ;

$t_m$  - a berendezés független változója, az idő.

A (29) egyenletekben az  $U_0$  feszültség adja a keresett  $x$  változót. Az egyenletrendszert  $U_0$ -ra megoldva:

$$U_0 [s^6 + K_{14}s^5 + K_{13}K_{12}s^4 + K_{12}K_{21}K_{31}s^3 + K_{13}K_{21}K_{31}K_{41}K_{72}s^2 + K_{11}K_{21}K_{31}K_{41}K_{61}s + K_{13}K_{21}K_{31}K_{41}K_{61}K_{73}] = K_{61}K_{51}K_{41}K_{31}K_{21}K_{15}U_0 \quad (30)$$

Az  $U_0$  a kiindulóváltozót bizonyos léptékben adja meg. A változók transzformációs egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} x &= M_x U_0 \\ y &= M_y U_0 \\ t &= M_t t_m \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

ahol:  $M_x$  - az  $x$  értéket és a berendezés  $U_0$  feszültség értékét összekapcsoló lépték;

$M_y$  - az  $y$  értékhez tartozó lépték;

$M_t$  - időlépték.

Helyettesítsük a (31) egyenletet a (30) egyenletbe. Ekkor a számítógép átviteli tényezői, léptékei és a kiinduló változók közötti egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d^6 x}{dt^6} + \frac{K_{14}}{M_t} \frac{d^5 x}{dt^5} + \frac{K_{13}K_{21}K_{71}}{M_t^2} \frac{d^4 x}{dt^4} + \frac{K_{12}K_{21}K_{31}}{M_t^3} \frac{d^3 x}{dt^3} + \\ + \frac{K_{13}K_{21}K_{31}K_{41}K_{72}}{M_t^4} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{K_{11}K_{21}K_{31}K_{41}K_{61}}{M_t^5} \frac{dx}{dt} + \\ + \frac{K_{13}K_{21}K_{31}K_{41}K_{61}K_{73}}{M_t^6} x = \frac{M_x}{M_y M_t^6} K_{15}K_{31}K_{41}K_{51}K_{61}y(t) \end{aligned} \quad (32)$$

A (32) egyenlet együtthatóinak a (28) kiindulóegyenlet együtthatóival meg kell egyezniük. A (28) és (32) egyenletek megfelelő differenciálhányadosainak és jobboldalainak együtthatóit egymással egyenlővé téve:

$$\begin{aligned} \frac{K_{14}}{H_t} = b_1; \quad \frac{K_{13}K_{21}K_{71}}{H_t^2} = b_2; \quad \frac{K_{12}K_{21}K_{31}}{H_t^3} = b_3; \\ \frac{K_{13}K_{21}K_{31}K_{41}K_{72}}{H_t^4} = b_4; \quad \frac{K_{11}K_{21}K_{31}K_{41}K_{51}}{H_t^5} = b_5; \quad \} (33) \\ \frac{K_{13}K_{21}K_{31}K_{41}K_{51}K_{61}K_{73}}{H_t^6} = b_6; \quad \frac{K_{13}K_{21}K_{31}K_{41}K_{51}K_{61}}{H_y H_t^6} H_x = b_0. \end{aligned}$$

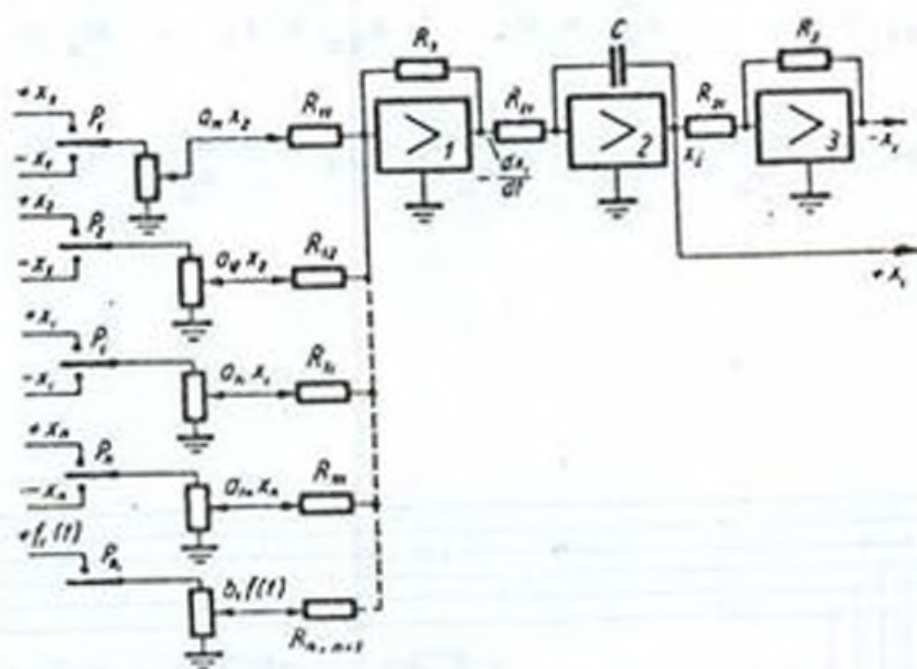
A kapott összefüggésekből látható, hogy az átviteli tényezők és a léptékek meghatározásában bizonyos önkényesség van, mivel az egyenletek száma kisebb az ismeretlenek számánál. A (32) kifejezések alapján a műveleti elemek átviteli tényezői és léptékei, valamint a kiinduló lineáris differenciálegyenletek együtthatói között közvetlen szabályt lehet megfogalmazni, amelynek alapján ezek az összefüggések a programként elkészített kapcsolási vázlat alapján közvetlenül felírhatók.

### 3.2. Mátrix-elrendezésű számítógépek. [1, 2, 3, 4, 8]

$$\text{Ha a rendszert } \frac{dx_i}{dt} = - \sum a_{ij} x_j + b_j f(t) \quad (34)$$

alakú elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer írja le, az összes egyenletet azonos elrendezésű kapcsolat reprodukálja (12. ábra).





12. ábra

Ez lehetővé teszi, hogy a számítógépeken a műveleti elemeket egyszer s mindenkorra összekapcsolják és így a feladat programozása, a 13. ábrán az

$$a_0 \frac{d^3 x_1}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_2 \frac{dx_1}{dt} + a_3 x_1 = f_3(t) \quad (35)$$

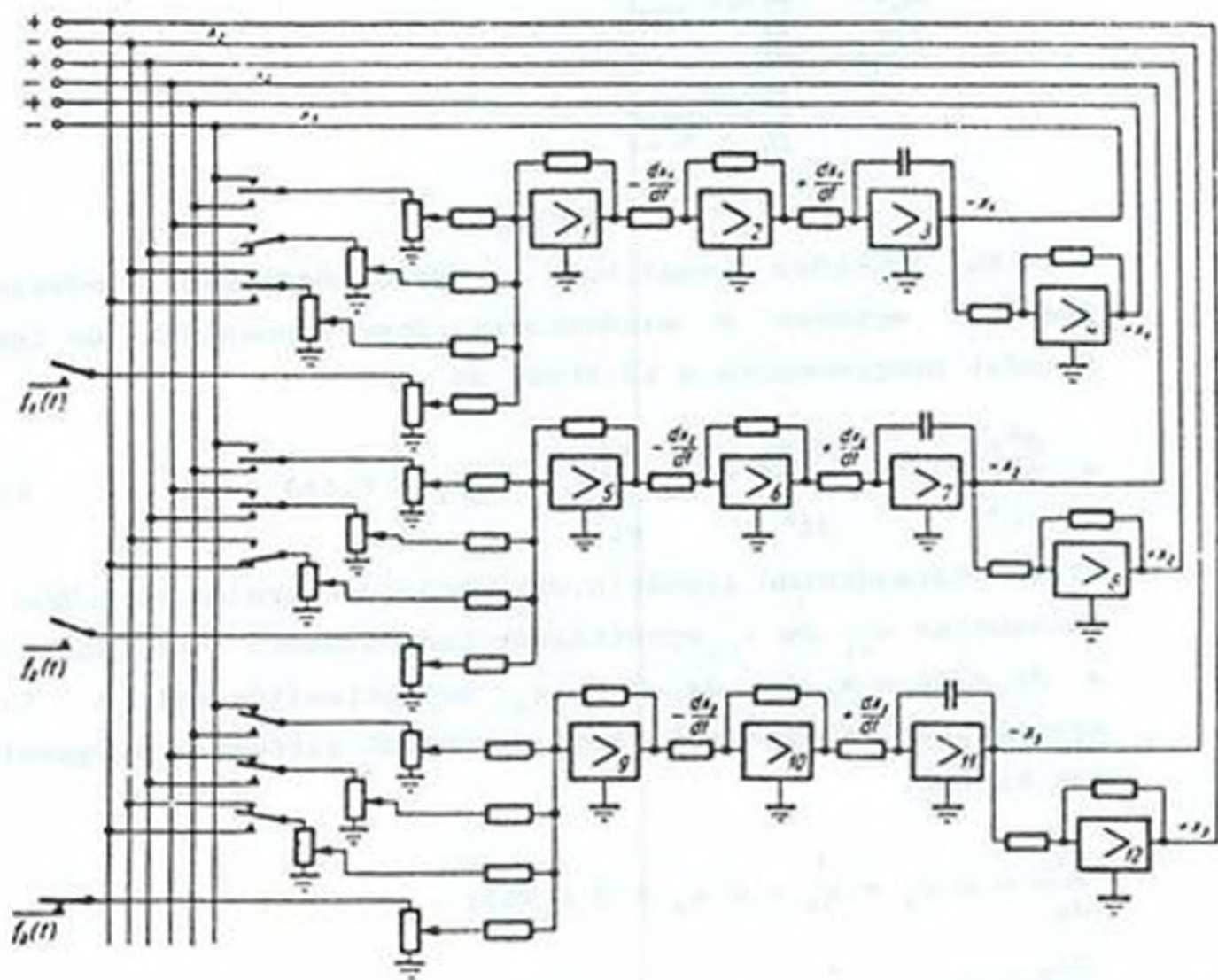
alakú harmadrendű, lineáris, differenciálegyenlet esetében is látható, az  $a_{ij}$  és  $b_{ij}$  együtthatók beállítására redukálódik. Ha a  $dx_1/dt = x_2$  és  $dx_2/dt = x_3$  helyettesítéseket a (34) egyenletben elvégezzük, három elsőrendű differenciálegyenletet kapunk:

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 x_1 + x_2 + 0 x_3 + 0 f_1(t);$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 0 x_1 + 0 x_2 + x_3 + 0 f_2(t);$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{a_3}{a_0} x_1 - \frac{a_2}{a_0} x_2 - \frac{a_1}{a_0} x_3 + \frac{1}{a_0} f_3(t).$$

ahol:  $a_{11} = 0; \quad a_{12} = 1; \quad a_{13} = 0; \quad b_1 = 0;$   
 $a_{21} = 0; \quad a_{22} = 0; \quad a_{23} = 1; \quad b_2 = 1;$   
 $a_{31} = -\frac{a_3}{a_0}; \quad a_{32} = -\frac{a_2}{a_0}; \quad a_{33} = -\frac{a_1}{a_0}; \quad b_3 = \frac{1}{a_0};$



13. ábra



A feladat programozásakor nem kell a tömbvázlatot elkészíteni, elegendő csak az  $a_{ij}$  és  $b_i$  együtthatók értékeit meghatározni és ezeket a megfelelő potenciométerek segítségével beállítani.

#### Mátrix-programozás. [3,4,5,8]

A 13. ábrán három darab olyan egységet kapcsoltak össze mint amilyen a 12. ábrán látható, azzal a különbséggel, hogy minden egyes elsőrendű egyenletet megoldó részben az összegző, integráló és előjelfordító elemeken kívül, az  $x_i$  változó léptékének beállítására szolgáló elem is beépítésre kerül (a 13. ábrán a 2, 6 és 10 elemek). Az ilyen elven végzett programozás a mátrix-programozás. Azokat az analóg számítógépeket, amelyekben a műveleti elemeket előre, elsőrendű differenciálegyenleteket megoldó elemekké egyesítik, mátrix-elrendezésű gépekként nevezik.

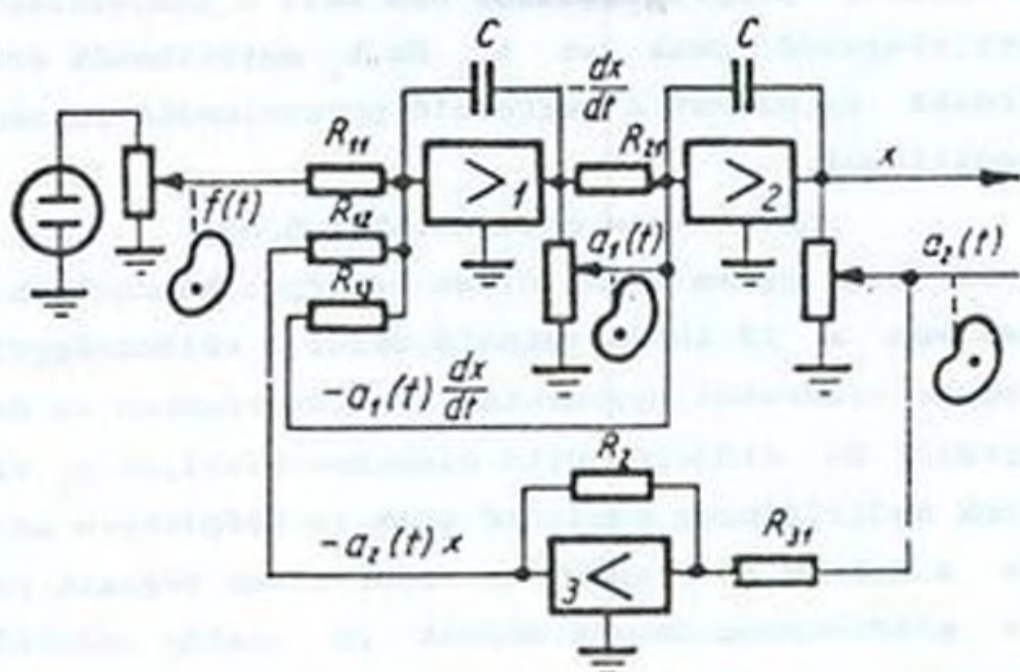
A mátrix-elven végzett programozás biztosítja, hogy az egyes műveleti elemeket önműködően helyes sorrendben kapcsolják egymáshoz, és kijelöli az egyenletek átalakításának azt az útját, amelyen haladva a műveleti elemek egyes jellemzői nem rontják a teljes berendezés stabil működését. A mátrix-elven végzett programozás a berendezésben szükséges műveleti elemek számát megnöveli.

### 3.3. Műveleti elemek elrendezése lineáris, változó együtthatójú differenciálegyenlet megoldására.

[1,2,3,4,8,10,11]

A változó együtthatójú differenciálegyenleteket megoldó, műveleti elemekből felépített kapcsolás a 14. ábrán látható. Ebben az esetben gondoskodni kell arról, hogy a megfelelő elemek kimenetére vezérelt potenciométereket lehessen kapcsolni. A vezérlést variátorokkal<sup>3</sup> oldják meg.





14. ábra

#### Felhasznált irodalom

- [1] - Dr. Szabó Imre: Rendszer- és irányítástechnika  
Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
- [2] - Dr. Csáki Frigyes: Irányítástechnikai kézikönyv  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1977.
- [3] - A. A. Красовский: Системы автоматического управления  
полетом пилотируемых летательных аппаратов  
Издание В. В. И. А. Ж. Е. Жуковского, Москва, 1971.

<sup>3</sup>Adott időfüggvény szerint változó együtthatókat előállító berendezéseket együttható-variátoroknak nevezzük. Elektromechanikus és elektronikus együttható-variátorokat különböztetünk meg. A legegyszerűbb elektromechanikus együttható-variátorok a lineáris potenciométerek, amelyek csúszkáját szalag és megfelelő profilú excenter mozgatja. Az excenter profilja az adott időfüggvényt reprodukálja. Az excenter-variátor, ha az excenter profil elkészítési pontossága  $\pm 0,1 \dots 0,5 \text{ mm}$  közé tehető, és az excenter legnagyobb sugara  $60 \text{ mm}$ , akkor  $\pm 0,16 \dots 0,33 \%$  hibával működik.



- [4] - В. Я. Коган: Электрические моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования  
Москва, 1959, Государственное Издательство Физико-математической Литературы
- [5] - Справочник по аналоговой вычислительной технике  
Издательство "Техника", Киев, 1975.
- [6] - Programmierung und Lösung von Aufgaben auf den Transistorisierten Analogrechnern MEDAT  
Bratislava, 1967.
- [7] - Dipl. ing K. Kabes: Die Modelleinheiten AAT und ihre Anwendung zum Aufbau von Einzweck-Analogrechnern  
Bratislava, 1968.
- [8] - Gábrriel László: MEDA T analóg számítógépcsalád  
FÜTI Rotaüzem, 1969.
- [9] - Dr. Csáki F. - Bras R: Automatika  
Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
- [10] - Somló J. - Pham Thuong Cat: Lineáris és nemlineáris szabályozási rendszerek számítógépes tervezése  
Akadémia Kiadó, Budapest, 1983.
- [11] - Francis H. Raven: Az önműködő szabályozás  
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.

