

A MATEMATIKAI MODELL

Már évek óta foglalkozom különféle rendszerek, berendezések matematikai modellezésével és modellvizsgálattal. Munkámról beszélni lényegében csak a *matematikai modell* kifejezésig tudok, néha sajnos még mérnököknek is. Beszélgető partnereim ekkor valami elvont, "normális" ember számára érthetetlen dologra asszociálnak, bele sem gondolva, hogy ez nem is olyan érthetetlen. Ezen tapasztalatom adta az ötletet, hogy most egy cikk erejéig megpróbáljak a tisztelt olvasónak válaszolni arra a kérdésre, hogy

MÍ A MATEMATIKAI MODELL?

Cikkem alapjául a MHTT Légvédelmi Repülő és Űrhajózási Szakosztály 1992. évi pályázatára benyújtott tanulmányom szolgált.

1. A modell fogalma általában

A mérnöki gyakorlatban rendszernek nevezzük egy vagy több (adott esetben végtelen sok) elem összességét. A rendszerek (jelenségek) vizsgálatának feladata az, hogy megállapítsa a rendszer viselkedését, azaz a behatások (input) és a reakciók (output) közötti kapcsolatokat. Egy adott rendszer tudományos igényű vizsgálatának feltétele a rendszermodell megalkotása.

Modellezésen értjük a valóságos rendszer lényegi tulajdonságainak felismerését, és azok valamilyen formájú leképezését.

A modell egy valóságos rendszer egyszerűsített, annak a vizsgálat szempontjából lényegi tulajdonságait kiemelő mása.

A modell mindazon másodlagos jellemzőket elhanyagolja, amelyek a kitűzött vizsgálat szempontjából nem tekintünk meghatározónak. Ezért elég ha a modell a valódi rendszert csak meghatározott szempontból vagy szempontokból helyettesíti.

Például egy ballisztikus rakétát - egyszerűen - egy ferdén elhajított kővel tudunk modellezni, ha a pályáját vizsgáljuk és nem foglalkozunk a hajtóműveben lejátszódó hőtani folyamatokkal.

Nincs kikötve, hogy modell csak az lehet, ami kizárólag erre a célra készült. Ez nem feltétele a modellnek. Valamilyen tárgy akkor válik modullé, ha a vizsgálatot végző személy ilyen funkciót ad neki. A modellválasztás mégsem önkényes, hiszen teljesíteni kell mindazokat a követelményeket, amelyek az eredeti rendszerrel, jelenséggel való hasonlóságát biztosítják.

A fenti példában szereplő követ használhatjuk másra is, nem csak a rakéta modellezésére.

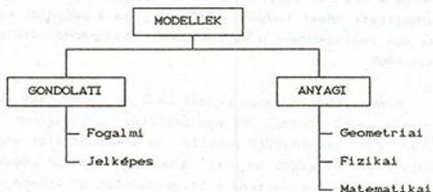
2. A modellek csoportosítása

A modellek osztályozásáról kiterjedt irodalom található. A modelleket csoportosíthatjuk például aszerint, hogy milyen a modell belső természete. Ez alapján anyagi és eszmei (vagy másnéven gondolati) modelleket különböztethetünk meg (1. ábra).

Az eszmei modellek az ember által megteremtett logikai kapcsolat szerint "működnek". Módszerüket, formájukat illetően szubjektívek, de tartalmukat nézve - azaz a tárgykört, amellyel foglalkoznak - objektívek. Az eszmei modellek nélkülözhetetlen elemei a megismerés folyamatának. Természetesen a logikai törvények alapján kapott eredményeit ellenőrizni kell a fizikai valóságban. Ilyen értelemben csak utó-

lag dönthető el, hogy valóban modelljei voltak-e a vizsgált folyamatnak. Mint az az ábrából is látszik, kétféle gondolati modellfajtát különböztetünk meg:

- fogalmi és
- jelképes.



1. ábra

Modellek csoportosítása

A fogalmi modell a közvetlen érzéki tapasztalatok absztrakt gondolkodás segítségével történő "feldolgozása". Feladata a kísérletek értelmezése, a kísérleti eredmények alapján a hipotézisek ellenőrzése, illetve újabb hipotézisek alkotása. Jelentős eszköze a gondolati kísérlet. Ennek során ismert természeti - esetleg társadalmi, gazdasági - törvények felhasználásával megalkotott fogalmi modellünket gondolatban meghatározott körülmények közé helyezzük és levezetjük a vizsgált rendszer várható viselkedését. Az így kapott eredmények kísérleti ellenőrzése a gondolatmenet helyességének eldöntésére, illetve hiányosságainak feltárására alkalmas. Ilyen gondolati kísérletnek kell megelőznie minden tényleges kísérletet, ha el akarjuk kerülni, hogy durva hibákat kövessünk el. Egyes területeken (például az elméleti fizika vagy csillagászat) a fogalmi modellalkotás nélkül lehetetlen kutatómunkát végezni.

A jelképes modell az empíria (tapasztalat) adatait vagy feladatait fogalmazza meg jelrendszerek segítségével. A mérési eredmények rendszerint táblázat, grafikus ábrázolás vagy számok, esetleg jelek formájában adóttak. Ezek közvetlenül a tudományos szintű feldolgozás, általánosítás céljára alkalmatlanok. A mérnöki gyakorlatban például egy többoldalas táblázatot vagy leírást szemléletesség szempontjából helyettesíteni tud egy egyszerű grafikon. ("A mérnök diagramokban gondolkodik" - ahogyan azt az egyik tanárom mondta.)

Az anyagi modellek saját, objektív törvényei szerint működnek. Csak a működés feltételeit választhatjuk meg, de a belső törvényszerűségeket nem tudjuk irányítani.

Az anyagi modelleket - a realizálási módjuk szerint - csoportosíthatjuk, úgy mint:

- homológ, vagy másnéven geometriai;
- analóg azaz fizikai;
- matematikai modell.

A homológ modell geometriailag hasonló az eredeti rendszerrel, és benne ugyanolyan fizikai jelenség játszódik le. A műszaki életben a geometriai modelleket elsősorban tervezésben használják fel. Ekkor a bonyolult elrendezésű építmények, szerkezetek térbeli elhelyezését előbb geometriai modellel készítik el, ezért ezt térbeli tervezésnek is nevezik. A térbeli tervezés szükségletévé teszi a szerelési műhelyrajzokat mivel ezeket a kisminta egyes csomópontjainak fényképe helyettesítheti. Ennek eredményeképpen fokozódik a tervezés megbízhatósága.

Például a gyakorlati aerodinamikában homológ modelleket alkalmaznak a szélcsatorna kísérletekben.

Fizikai modell esetén az eredetivel megegyező fizikai

természetű modellen tanulmányozzuk a rendszerben lejátszódó jelenséget. Az eredeti és a modell hasonlóságának feltétele, hogy mindkettő matematikai leírása (azaz matematikai modellje) megegyezzen. Az analóg modell az eredeti rendszerhez viszonyítva hasonló behatásra hasonló módon válaszol. A fizikai modell semmilyen szemléletes kapcsolatban nem kell hogy álljon az eredeti jelenséggel, csak az inputok és outputok közötti kapcsolatot adja hűen, ezért az ezt realizáló berendezést *analóg számítógépnek* is nevezik.

3. A matematikai modell

A modellek közül a mérnöki gyakorlatban legelterjedtebb a matematikai modell. A matematikai modell a matematika szimbólum rendszerén keresztül teremt kapcsolatot a vizsgált rendszer be- és kimenő jellemzői között. A matematikai formulák ismert, valamint ismeretlen mennyiségeket tartalmaznak, és a feladat határozottsága esetén az ismeretlen kimenő jellemzők meghatározhatók az ismert bemenő és belső jellemzők birtokában. A matematikai modell kellően definiált kezdő- és peremfeltételekkel együtt egyben az adott jelenség algoritmusát is szolgáltathatja.

A rendszer viselkedését leíró matematikai összefüggések jellege, vagy meghatározásának módszere szerint - páronként - az alábbi matematikai modelleket különböztetjük meg:

statikus - dinamikus

Statisz a modell, ha a rendszer állapota algebrai egyenletekkel, vagy idő szerinti deriváltakat nem tartalmazó differenciálegyenletekkel írható le. Jellemzésére elterjedt még a stacionárius (vagy stacioner), állandósult, illetve egyensúlyi állapot kifejezés is.

A dinamikus modellek az időben is leírják a jellemzők változását. Megjelenési formájuk közönséges vagy parciális differenciálegyenletek. Lehetséges, hogy a tárgyalás nem az

idő-, hanem valamely célszerűen megválasztott transzformált tartományban valósul meg.

Matematikailag leírhatjuk egy gépkocsi egyenletes sebességű egyenes irányú mozgását, ekkor statikus modellt hozunk létre, mivel a kocsi sebessége, motorjának teljesítménye időben nem változik. De ha ugyanezen kocsi egy bizonyos sebességről egy adott másikra történő gyorsulását akarjuk modellezni, akkor dinamikus modellt kell felállítanunk.

lineáris - nemlineáris

A lineáris modellekben csak a változók és deriváltjaik szerepelhetnek, általában állandó együtthatókkal szorozva. Alakjuk lineáris vagy linearizált egyenlet, illetve egyenletrendszer.

A nemlineáris modellek az előző megkötöttségektől mentesek. Az adott rendszerben lejátszódó folyamatot leíró egyenletek legalább egyike nemlineáris. A nemlineáris modellek - az egyszerűbb vizsgálat érdekében - valamilyen linearizálási módon lineáris modellekké alakíthatók át.

folytonos paraméterű - diszkrét paraméterű

A folytonos modellekben a változók egy adott tartományon belül bármilyen értéket felvehetnek, illetve minden időpillanatban van egy meghatározható értékük.

Diszkrét paraméterű modellek esetén a változók csak meghatározott diszkrét értékeket vehetnek fel, illetve a vizsgálati időtartományban csak kitüntetett időpontokhoz tartozhat értékük.

A lottószámkokat adott időben húzzák és azok csak konkrét, egész számok lehetnek. Így a lottóhúzás egy diszkrét idejű, diszkrét állapotterű (sztochasztikus) folyamat.

Életünk sordja - sajnos - folyamatosan öregszik, azaz matematikailag megfogalmazva: életünk egy folytonos idejű

folyamat. De mivel életkorunkat években határozzuk meg, így az csak diszkrét értékeket vehet fel. Ez példa arra is, hogy egy folytonos paraméterű folyamatot diszkrét paraméterűként is vizsgálhatunk.

determinisztikus - sztochasztikus

A determinisztikus modellekben szereplő jellemzők, valamint maguk a változók egyértelmű függvényekkel térben és időben egyaránt megadhatók.

A sztochasztikus modellek ugyanezen jellemzői és változói csak bizonyos valószínűségi összefüggések felhasználásával határozhatók meg.

A bemutatott felsorolás természetesen nem teljes, mivel egy konkrét, gyakorlatban megvalósított matematikai modell általában a fenti jellegek szintézisét jelenti. Gondoljunk csak például a fenn már említett lottóhúzásra.

4. A matematikai modell képzése

Egy rendszer matematikai modelljének megalkotásához alapvetően két út kínálkozik:

- az általános természettudományos ismeretekre támaszkodva, fizikai megfontolások alapján analitikus formájú közvetlen matematikai modell előállítását (úgynevezett white-box eljárás);

- megfigyelési, illetve kísérleti identifikáció, ahol a matematikai modell megalkotásához az alapvető információkat mérések sorozatával kapjuk (ez a black-box eljárás).

A black-box eljárást alkalmazzák az általános iskola alsó tagozatos tanulói matematikából amikor a "dardó"-ba beeső és onnan kieső szöveg alapján találgatják ki, hogy mi történik a gépben. Valójában a benti történetek matematikai

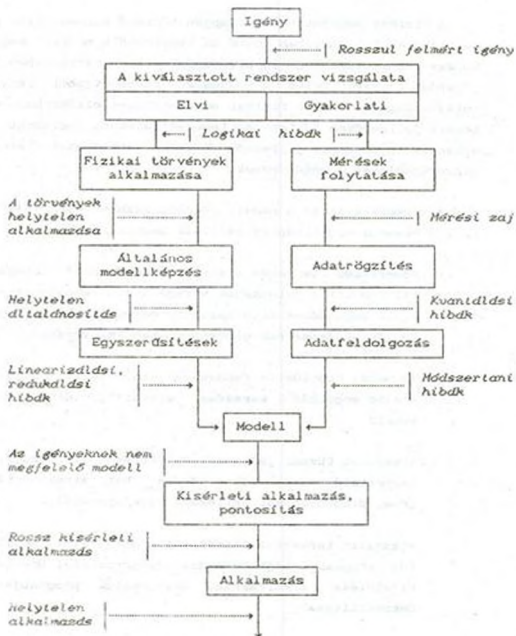
modelljét állítják fel.

A fizikai megfontolások alapján történő matematikai modellalkotás folyamatában döntő az absztrahált modell megalkotása. Ehhez ismernünk és elemeznünk kell a rendszerben lejátszódó folyamat belső, a vizsgálat szempontjából lényegi tulajdonságait. Ezek a fizikai megfontolások elsősorban extenzív jellemzőkre felírt mérlegegyenleteket, valamint az extenzív és intenzív jellemzők között kapcsolatot teremtő összefüggéseket eredményeznek.

A vizsgálat során a modell létrehozásának egyik legfontosabb eleme a modellképzés céljának meghatározása:

- modellezés (tervezés alatt álló rendszerek vizsgálata, speciális jelenségek vizsgálata, lehetséges műszaki megoldások kiválasztása, egyes szerkezeti jellemzők eltéréseinek gyorsított tanulmányozása);
- tervezés (optimális rendszerek kialakítása, gazdaságosabb megoldások keresése, élettartam-költség tervezés);
- vizsgálat (üzemi jellemzők értékelése, szerkezeti, üzemeltetési jellemzők eltérései hatásainak értékelése, diagnosztikai jellemzők kiválasztása);
- vizsgálat tervezése (kísérleti próbajáratok, beüzemelési programok meghatározása, diagnosztikai üzemmódok kijelölése, alkalmassági vizsgálatok programjainak összeállítása);
- minősítés (alkalmassági előírások, minőségi követelmények kidolgozása);
- irányítás, szabályozás (optimális és adaptív irányí-

tás, egyedi állapotszabályozás megvalósítása);



2. ábra

A modellképzés általános logikája

- állapotfelismerés (fedélzeti adatgyűjtő, -feldolgozó rendszerben alkalmazható, könnyen azonosítható, adaptív modellek kidolgozása).

A modellképzési feladat jellegét és logikáját a következő kérdésekre adott válaszok határozzák meg:

- Milyen modellt kívánatos létrehozni?
A kérdésre adott felelet meghatározza a szükséges pontosságot és bonyolultságot, az alkalmazandó matematikai módszerek körét is.
- Hogyan építhető fel a modell?
- Milyen gazdasági követelményeket vagy korlátozásokat kell állítanunk a modellel szemben?
- Hogyan értékeljük a modell minőségét és pontosságát?
- Hogyan dolgozzuk fel az összes rendelkezésre álló információt?
- Milyen módon lehet optimálisan megszerezni a hiányzó információkat?
- Mi legyen a modellen belüli nemlinearitásokkal?
Célszerű-e linearizálni az egyenleteket? A linearizálás után megfelelő pontosságú lesz-e a modell;

A fenti kérdésekre adott válaszok lényegében meghatározzák a felépítendő modell sajátosságait. A modellképzés általános logikáját mutatja be a 2. ábra, ahol dőlt betűkkel a lehetséges hibák is elolvashatók.

Felhasznált irodalom:

- 1 - Pokorádi László: Az AI-SV hajtómű matematikai modellje, Tudományos Kiképzési Közlemények 1989/2, Szolnok, MN. KGyRMF., 38-43.
- 2 - Dr. Pokorádi László: Helikopter levegőrendszer matematikai modellvizsgálata, A Repülés Világa, Budapest, 1990/1, 29-31.
- 3 - Dr. Pokorádi László: A matematikai modellek és alkalmazásuk a repülőműszaki gyakorlatban, pályamunka, MHTT Légvédelmi Repülő és Űrhajózási Szakosztály 1992, Jellege: *Mérnök*.
- 4 - Dr. Rohács József: Repülőgép Uzemai jellemzők változásának vizsgálata, IX. Magyar Repüléstudományi Napok, Budapest, 1988, 130-144.
- 5 - Dr. Rohács J. - Simon I.: Repülőgépek és helikopterek üzemeltetési zsebkönyve, Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1989.
- 6 - Dr. Szabó Imre: Gépezeti rendszertechnika, Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1986.
- 7 - Szűcs Ervin: Hasonlóság és modell, Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1972.
- 8 - Скурихин В. И. - Ширин В. Б. - Дубровский В. В.: Математическое моделирование, Техника, Киев, 1983.