ifj. Horváth Dezső mk. főhadnagy
Horváth Dezső mk. alezredes főiskolai docens

A REPÜLŐGÉP MATEMATIKAI MODELLJE

A repülőgép mozgásának matematikai modellje kapcsolatot teremt a repülőgép helyzetét és mozgását jellemző paraméterek között.

A dinamikai egyenletek a következőkből tevődnek össze; a repülőgép tömegközpontjának mozgásegyenleteiből és a tömegközéppont körüli forgómozgás egyenleteiből.

a./ A tömegközéppont mozgásának egyenletei

Newton II. törvénye alapján a tömegközéppont dinamikájának vektor-egyenlete:

$$m\,\bar{a} = \sum \bar{F} = \bar{P} + \bar{R} + \bar{G} \tag{1}$$

ahol: $\bar{G}$ - súlyerő;
$\bar{R}$ - aerodinamikai erő;
$\bar{P}$ - tolóerő.

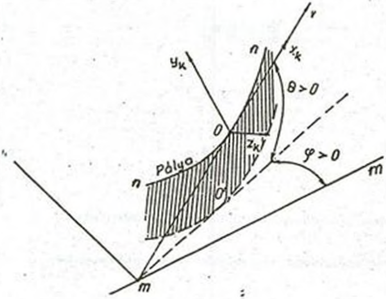
Ez az egyenlet igaz egy olyan inercionális rendszerre, amelynek kezdőpontja a tér valamely pontján helyezkedik el, vagy állandó sebességgel mozog.

Ha az (1) egyenletet a pályához kapcsolt koordináta-rendszerre (1. ábra) vetítjük a következőket kapjuk:

$$m\,\frac{dv}{dt} = P\cos\alpha_p - X - G\sin\theta \tag{2}$$

$$m\,v\,\frac{d\theta}{dt} = m\,\frac{v^2}{v_y}\,(P\sin\alpha_p + Y)\cos\gamma - G\cos\theta \tag{3}$$

$$-m\, v \cos\theta \, \frac{d\varphi}{dt} = m \, \frac{v^2 \cos^2\theta}{v_z} = (P \sin \alpha_p + Y) \sin\gamma \qquad (4)$$



A (2), (3) és (4) egyenletet kétféleképpen használhatjuk fel, mint differenciálegyenletet, valamint a pályagörbület sugarainak meghatározására szolgáló végkapcsolat egyenleteként :

1.sz. ábra

Az egyenletek bal oldalain csak a differenciál hányadosokat hagyva kapjuk:

$$\frac{dv}{dt} = g \left[\frac{P\cos \alpha_p - X}{m_g} - \sin \theta \right] \qquad (5)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{v} \left[\frac{P\sin \alpha_o + Y}{m_g} \cos \gamma - \theta \right] \qquad (6)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \frac{g}{v \cos\theta} \left[\frac{P\sin \alpha_p + Y}{m_g} \right] \sin \gamma \qquad (7)$$

A (7) egyenletben szereplő "-" jel az jelenti, hogy jobb (pozitiv) bedöntés mellett az elfordulás jobbra megy végbe, azaz a negativ φ szögek irányába.

A pálya szerinti koordináta-tengelyekre vett vetületek alapján:

$$m \frac{dv}{dt} = \Sigma F_x \tag{8}$$

$$m\, v \frac{d\theta}{dt} = \Sigma F_y \tag{9}$$

$$m\, v \cos\theta \frac{d\varphi}{dt} = \Sigma F_z \tag{10}$$

b./ A tömegközéppont körüli forgás egyenletei

A fő tehetetlenségi tengelyre vett vetületekben:

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\, \omega_y \omega_z = \Sigma M_x \tag{11}$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\, \omega_y \omega_z = \Sigma M_y \tag{12}$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\, \omega_x \omega_y = \Sigma M_z \tag{13}$$

ahol:

I_x, I_y, I_z – a repülőgép tehetetlenségi nyomatékai a kapcsolt rendszer tengelyei szerint;

ω_x, ω_y, ω_z – a repülőgép forgása szögsebességének összetevői;

$\Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z$ - összegzett nyomatékok (aerodinamikai és tolóerő szerint) összetevői a tengelyek szerint.

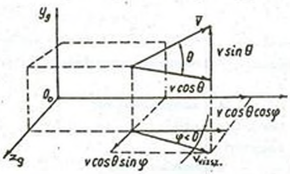
Következtetés:

1./ A tömegközéppont mozgásegyenleteinek és a tömegközéppont körüli forgás egyenleteinek rendszerét az EULER-féle dinamikai egyenletnek nevezzük.

2./ A repülőgép kapcsolt tengelyei eléggé közel fekszenek a fő tehetetlenségi tengelyhez, így a (11), (12), (13) egyenletrendszert első közelítésben fel lehet használni a repülőgép mozgásának vizsgálatához, a kapcsolt koordináta--rendszerben felírva.

c./ A mozgás kinematikai egyenletei

A tömegközéppont mozgásának kinematikai egyenletei összekapcsolják a tömegközéppont koordinátáit a földi rendszerben a v sebesség értékével és a sebesség vektor irányát jellemző szögekkel.



2.sz. ábra

A 2. ábrán láthatók a repülési sebesség vektorai a normális földi koordináta-rendszerben.

A 2. ábrából megkapjuk a repülőgép tömegközéppontja

Földhöz viszonyitott mozgásának kinematikai egyenleteit:

$$\frac{dx_g}{dt} = v \cos \theta \cos \varphi \tag{14}$$

$$\frac{dy_g}{dt} = \frac{dH}{dt} = v \sin \theta \tag{15}$$

$$\frac{dz_g}{dt} = - v \cos \theta \sin \varphi \tag{16}$$

A kinematikai kapcsolatok egyenletei teszik lehetővé az egyenletrendszer zárását, azaz azt, hogy az egyenletek száma megegyezzen a keresett ismeretlenek számával.

Keresett a 12 mozgásparaméter idő szerinti függvénye:

$v(t)$; $\theta(t)$; $\varphi(t)$, $x_g(t)$; $H(t)$; $z_g(t)$; $\vartheta(t)$; $\psi(t)$; $\gamma(t)$;

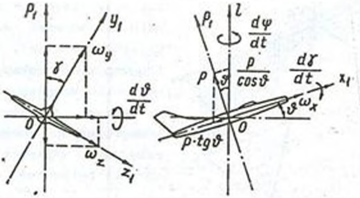
$\omega_x(t)$; $\omega_y(t)$; $\omega_z(t)$.

Szükséges még meghatározni azt a három kinematikai egyenletet, ami kapcsolatot létesit a dinamikai egyenletekben lévő

ϑ - bólintási szögsebesség;
γ - bedöntési szög;
ψ - legyező szög;
$\omega_x;\omega_y;\omega_z$ - szögsebességek

között.

A kinematikai egyenletek levezetése a 3. ábra segitségével:



3.sz. ábra

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma \tag{17}$$

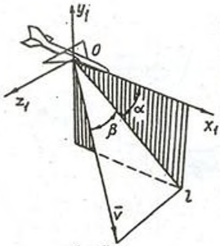
$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - p \;\mathrm{tg}\; \theta = \omega_x - (\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma)\;\mathrm{tg}\;\theta \tag{18}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p}{\cos\theta} = \frac{\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma}{\cos\theta} \tag{19}$$

A (17), (18), (19) egyenleteket az Euler-féle kinematikai egyenleteknek nevezzük. Ezáltal a 12 keresett időfüggvény meghatározásához 12 differenciálegyenlettel rendelkezünk.

Ha megakarjuk határozni az $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ szögek (4. ábra) idő szerinti változását, akkor a keresett függvények és egyenletek száma 14-re növekszik.

A vizsgált differenciális dinamikai és kinematikai mozgásegyenletek rendszerét akkor tudjuk megoldani, ha ismerjük



4. ábra

a dinamikai egyenletek jobb oldalát, azaz ismerjük a repülőgépre ható összes erőt és nyomatékot. Ez lehetővé teszi, hogy az idő függvényében megkapjuk az összes keresett mozgásparamétert. Segítségével jellemezni tudjuk a tömegközéppont mozgástörvényét és pályáját, valamint a repülőgép térbeli helyzetét.

A megoldáshoz szükségesek:

- a vezérlő törvények változásának törvényei;
- kezdeti adatok;
- a repülőgép valamennyi szükséges jellemzője.

Korábban vezérlő függvényként az állásszög vagy a túlterhelés a γ bedöntési szög és a hajtómű üzemmódjának idő szerinti változását adtuk meg, most viszont lehetőségünk van a kormányok vagy a vezérlőkarok kitérésének vezérlő függvények minőségében való felhasználására.

A dinamikai egyenletek jobb oldalai az erők vagy nyomatékok összegei, azok viszont meghatározhatók valamennyi vezérlőszerv kitérései alapján.

A kapott differenciál-egyenletek megoldása igen munkaigényes és gyakorlatilag csak számitógépek alkalmazásával realizálható.

Bizonyos egyszerűsitések figyelembevételével az egyenletek felirhatók lineáris formában és igy lehetőség van az általános formában való megoldásra.

d./ Hosszirányú és oldalirányú mozgás egyenletei

Hosszirányú mozgásnak nevezzük az olyan mozgást, amelyet a repülőgép a függőleges sikban az α állás, a θ bólintási, θ pályaszögek, H repülési magasság változtatása mellett hajt végre, az y koordináta-tengely mentén.

A hosszirányúhoz az olyan mozgás tartozik, amelyben a P, X, Y és G erők (5. ábra), valamint az M_z bólintási nyomaték hat. A hosszirányú mozgást a következő paraméterek jellemzik: v, X, H, α, θ, θ és ω_z.

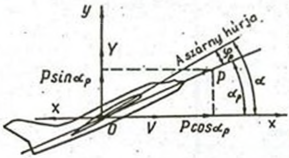
Az 5. ábra alapján:

$\alpha_p = \alpha + \varphi_p$ - a hajtómű tengelyének állásszöge;

α - a szárny állásszöge;

φ - a hajtómű beépitési szöge, ami a szárny húrja és a hajtómű tengelye közötti szöggel egyenlő.

Azokat a paramétereket, amelyek az oldalirányú mozgást jellemzik: a z_o koordinátát, a φ, β, γ és ψ szögeket, valamint az ω_x és ω_y szögsebességeket, azonosan egyenlőnek vesszük a nullával.



5. sz. ábra

Oldalirányú mozgásnak nevezzük az olyan mozgást, amelyet a repülőgép a vizszintes sikban végez a β csúszás, ψ elfordulás, γ bedöntési szögek szerint, az OX koordináta-tengelyhez viszonyitva.

Az oldalirányúhoz az olyan mozgás tartozik, ahol a Z oldalirányú erő, valamint az M_x és M_y oldalirányú nyomatékok hatására jön létre, amelyben a Z koordináta, a pálya vizszintes vetülete elfordulásának φ szöge, a ψ legyező szög, a γ bedöntési szög, a θ csúszásszög, valamint az ω_x és ω_y szögsebességek változása következik be. A hosszirányú mozgás v, H, α, θ és ϑ paramétereit ekkor állandó értékűnek vesszük és változásukat nem vesszük figyelembe és elfogadjuk, hogy $\omega_z = 0$.

A mozgásfelosztás feltételes jellegére való tekintettel, a módszer lehetővé teszi a stabilitás és a kormányozhatóság sok reális jellemzőjének tanulmányozását.

A hosszirányú és oldalirányú mozgás egyenleteit külön-külön felirva kapunk két egyenletrendszert, amelynek mindegyikében két ismeretlen időfüggvény, illetve két dinamikai vagy kinematikai mozgásegyenlet található.

1./ Hosszirányú mozgás egyenletei (függőleges sikban)

$$m \frac{dv}{dt} = P \cos \alpha_p - X - G \sin \theta \qquad (20)$$

$$m\, v \frac{d\theta}{dt} = P \sin \alpha_p + v - G \cos \theta \qquad (21)$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = \Sigma M_z \qquad (22)$$

$$\frac{dx_g}{dt} = v \cos \theta \qquad (23)$$

$$\frac{dy_g}{dt} = \frac{dH}{dt} = v \sin \theta \qquad (24)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_z \tag{25}$$

$$\theta = \theta + \alpha \tag{26}$$

2./ Az oldalirányú mozgás egyenletei a vizszintes sikban, elfogadva azt, hogy $\theta = 0$ és $\omega_z = 0$, valamint elhagyjuk a hosszirányú mozgás egyenleteit.

$$- m\, v\, \frac{d\varphi}{dt} = \Sigma F_z \tag{27}$$

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = \Sigma M_x \tag{28}$$

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} = \Sigma M_y \tag{29}$$

$$\frac{dz_g}{dt} = - v \sin \varphi \tag{30}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - \omega_y \cos \gamma \operatorname{tg} \vartheta \tag{31}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_y \frac{\cos \gamma}{\cos \theta} \tag{32}$$

$$\psi = \alpha + \beta \tag{33}$$

A két egyenletrendszerből is látható, hogy ΣF_z, ΣM_x, ΣM_y, ΣM_z jobb oldalak és a P, X és Y erők is a mozgásparaméterek és a vezérlőszervek kitérési szögeinek bonyolult függvényei.

e./ A stabilitás és kormányozhatóság vizsgálata a matematikai modell segitségével

A stabilitás úgy vizsgálható a matematikai modell segitségével, mint egy dinamikai rendszeré.

A repülőgép stabilitása az adott repülési paraméter szerint - a repülőgép azon képessége, hogy a zavarás (X_z) megszűnését követően visszatér az adott kiinduló paraméter értékéhez. Igy lehet vizsgálni a hosszirányú, az oldalirányú a túlterhelés és sebesség szerinti stabilitást stb.

Általános stabilitásnak nevezzük a dinamikai rendszer olyan tulajdonságát, amikor a megváltozott mozgás paramétereinek eltérése a kiinduló értékektől az idő folyamatában nem halad meg egy bizonyos véges értéket.

A gyakorlatban azonban a dinamikai rendszerek aszimptotikus stabilitását értékelik. Aszimptotikus stabilitásnak nevezzük a dinamikai rendszer - külső behatást (zavarást) követő - olyan viselkedését, amikor a mozgásparaméterek eltérése a kiinduló értéktől az idő függvényében ($t \to \sim$) a nullához tart.

A stabilitás értékelésének kritériumai a karakterisztikus egyenlet tényezői szerint, másodrendűtől negyedrendűig vannak kidolgozva.

A negyedrendű differenciálegyenletek rendszerének karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_o = 0 \qquad (34)$$

Ahhoz, hogy az objektum megváltozott mozgása aszimptotikusan stabil legyen, a következő feltételek teljesülése szükséges (Murvitch-Rauch kritérium):

$$\left.\begin{array}{l} a_3 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_o > 0 \\ \quad a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_o\, a_3^2 > 0 \end{array}\right\} \qquad (35)$$

Következésképpen a repülőgép stabilitása alatt azt a képességet értjük, hogy a zavarás hatásának megszűnését követően visszatér a kiinduló helyzetbe.

A matematikai modell segítségével a repülőgép kormányozhatóságát is vizsgálhatjuk. A repülőgép kormányozhatóságának azt a képességét nevezzük, hogy megváltoztatja a mozgás paramétereit a repülőgépvezető tevékenységének megfelelően.

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. A.A.Kraszovszkij: Az irányítható repülőszerkezetek repülésének automatikus vezérlési rendszerei
1971. Moszkva, Zsukovszkij Akadémia

2. Taraszenkov, Braga, Taranyenko: Dinamika paljota i boevova manevriroványijá letatyelnih apparatov
1984. Moszkva, Zsukovszkij Akadémia

3. G.P.Kobranov és mások: A repülőtechnikai alapjai
1977. Moszkva, Voennoe Izdatyelsztvo

4. Szűcs Ervin: Hasonlóság és modell
Műszaki Könyvkiadó