Sándor Endre tanszékvezető, főiskolai docens

KOMPLEX POTENCIÁL

A komplex függvények alkalmasak kétdimenziós vektorterek szemléltetésére. Ezen vektorterek vektorai ugyanis felfoghatók, mint komplex számok, hisz minden komplex számhoz egyértelműen rendelhető egy helyvektor és viszont.

Igy a

$$\overline{W} = X\,(x;y)\,\overline{i} + Y\,(x;y)\,\overline{j} \qquad (1)$$

($\overline{i}$ és $\overline{j}$ egységvektorok)

vektortér vektorai jellemezhetők a

$$W = W(z) = X(x;y) + j\,Y(x;y) \qquad (2)$$

(ahol: $j^2=-1$)

komplex számokkal. Ez azt is jelenti, hogy az (1) alatti vektortér leírására használhatjuk a (2) alatti komplex változós függvényt. Ennélfogva a komplex függvények alkalmasak például síkbeli elektrosztatikus, illetve síkbeli (kétméretű) áramlási terek illusztrálására is. Az említett terek bizonyos jellemzőinek vizsgálatára a "műszaki élet" a <u>komplex potenciált</u> használja.

Jelen cikkben mindkét térre vonatkozóan mutatunk gyakorlati alkalmazásokat.

A komplex potenciál matematikai megalapozásához támaszkodnunk kell az alábbi tételre, melynek bizonyítása lényegében azonos egy közönséges differenciálegyenlet egzakt voltát kimondó tétel bizonyitásával.

TÉTEL:

Legyenek a $P(x;y)$ és $Q(x;y)$ függvények az $(x;y)$ sík valamely egyszeresen összefüggő D tartományban az egyes változók szerint legalább kétszer parciálisan deriválhatóak. A

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy \tag{3}$$

kifejezés akkor és csak is akkor teljes differenciál, ha

$$\frac{\partial P(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}. \tag{4}$$

BIZONYITÁS:

Lényegében azt kell megmutatnunk, hogy van olyan $R(x;y)$ függvény a D tartományon, melynek differenciálja éppen a (3) alatti kifejezés, azaz hogy

$$\frac{\partial R(x;y)}{\partial x} = P(x;y) \text{ és } \frac{\partial R(x;y)}{\partial y} = Q(x;y).$$

a./ Szükségesség:

Ha a (3) alatti kifejezés teljes differenciál, akkor fennáll a (4) alatti összefüggés. A feltétel miatt ekkor létezik olyan $R(x;y)$ függvény, melyre

$$R'_x = P(x;y) \quad \text{és} \quad R'_y = Q(x;y).$$

Képezzük az alábbi deriváltakat:

$$\frac{\partial R'_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 R}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial P(x;y)}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial R'_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 R}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}.$$

Minthogy a tett feltevések miatt az R (x;y) függvény vegyes másodrendű parciális deriváltjai megegyeznek, ezért

$$\frac{\partial P(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x;y)}{\partial x},$$

vagyis fennáll a (4) alatti összefüggés.

b./ <u>Elégségesség:</u>

Ha a (4) alatti összefüggés fennáll, akkor létezik olyan R (x;y) függvény, melynek teljes differenciálja a (3) alatti kifejezés.

Állításunkra konstruktiv bizonyitást adunk: megkonstruáljuk az R (x;y) függvényt. Tekintsük azt az R(x;y) függvényt, melyre

$$P(x;y) = \frac{\partial R(x;y)}{\partial x}. \qquad (5)$$

Ilyen a tett feltevések miatt biztosan létezik, ekkor

$$R(x;y) = \int_{x_0}^{x} P(t;y)\,dt + G(y). \qquad (6)$$

Mivel az R (x;y) függvénytől azt kivánjuk, hogy

$$\frac{\partial R(x;y)}{\partial y} = Q(x;y) \qquad (7)$$

fennálljon, ezért deriváljuk y szerint a (6) alatti egyenlőséget.

$$\frac{\partial R(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(t;y)\,dt + G'(y),$$

s a változók függetlensége miatt

$$\frac{\partial R\,(x;y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P\,(t;y)}{\partial y}\,dt + G'(y).$$

Felhasználva most a (4) alatti feltételt, kapjuk

$$\frac{\partial R\,(x;y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q\,(t;y)}{\partial y}\,dt + G'(y) = Q\,(x;y) - Q\,(x_0;y) +$$

$$+ G'(y).$$

Figyelembe véve a (7) alatti követelményt:

$$Q\,(x;y) = Q\,(x;y) - Q\,(x_0;y) + G'\,(y),$$

melyből

$$G'\,(y) = Q\,(x_0;y),$$

s igy

$$G\,(y) = \int_{y_0}^{y} Q\,(x_0;t)\,dt.$$

A kapott eredményt a (6) alatti egyenletbe helyettesitve, az

$$R\,(x;y) = \int_{x_0}^{x} P\,(t;y)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q\,(x_0;t)\,dt$$

függvény épp a kivánt tulajdonsággal rendelkezik, vagyis

$$dR\,(x;y) = \frac{\partial R\,(x;y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial R\,(x;y)}{\partial y}\,dy =$$

$$= P\,(x;y)\,dx + Q\,(x;y)\,dy.$$

Ezzel a tétel állitását bebizonyitottuk. Térjünk rá ezek után a komplex potenciál ismertetésére. Ennek lényege, hogy az örvény- és forrásmentes vektortérhez egy olyan komplex függvényt - <u>komplex potenciált</u> - rendelünk, melynek segitségével a vektorteret jellemző valamennyi mennyiség kifejezhető.

Tárgyalásunk során külön kell választanunk, hogy a szóbanforgó vektortér erőteret, vagy áramlási teret reprezentál-e. Ez a szétválasztás lényegében csak formai különbséget jelent, hisz a konstrukció logikája mindkét tér esetében azonos. A komplex potenciál megkonstruálásának szigorú logikai rendszerét erőtérre vonatkozóan mutatjuk be. Áramlási tér esetében pedig csak hivatkozunk korábbi eredményeinkre.

A kettéválasztás alapvető oka a potenciálfüggvény előjelben különböző értelmezése. Ugyanis, ha $\bar{v}\ (\bar{r})$ vektortér erőtér, akkor ennek skalárpotenciálján (ha létezik) azt az $U\ (\bar{r})$ skalár-vektor függvényt értjük, melyre

$$\bar{v}\ (\bar{r}) = -\ \mathrm{grad}\ U\ (\bar{r}). \tag{8}$$

Ha $\bar{v}\ (\bar{r})$ áramlási tér, akkor ennek skalárpotenciálján, ha van azt a $\varphi\ (\bar{r})$ skalár-vektor függvényt értjük, melyre

$$\bar{v}\ (\bar{r}) = \mathrm{grad}\ \varphi\ (\bar{r}). \tag{9}$$

<u>Komplex potenciál értelmezése erőtérben</u>

Tekintsük a

$$\bar{v}\ (\bar{r}) = v_1\ (x;y)\ \bar{i} + v_2\ (x;y)\ \bar{j} \tag{10}$$

kétdimenziós erőteret, s legyen az ezt leiró komplex függvény

$$v(z) = v_1(x;y) + j\, v_2(x;y) \quad (j^2=-1). \tag{11}$$

Mint ismeretes a tér örvényességét és forrásosságát kifejező térjellemzők - a rotáció, illetve a divergencia - a következő módon adhatók meg:

$$\operatorname{rot} \bar{v}(\bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right] \bar{k}$$

amely az irány egyértelműsége miatt a $v(z)$ komplex függvénnyel is kifejezhető:

$$\operatorname{rot} v(z) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}, \tag{12}$$

illetve

$$\operatorname{div} \bar{v}(\bar{r}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y},$$

azaz

$$\operatorname{div} v(z) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}. \tag{13}$$

Legyen a (10) alatti vektortér a sík valamely egyszeresen összefüggő D tartományában örvény-, illetve forrásmentes, s létezzenek a $v_1(x;y)$ és $v_2(x;y)$ másodrendű parciális deriváltjai.

Az örvénymentesség miatt

$\operatorname{rot} \bar{v}(\bar{r}) \equiv \bar{o}$, melyből a (12) alatti felhasználásával

$$\frac{\partial v_2(x;y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x;y)}{\partial y} = 0$$

s így

$$\frac{\partial v_2\ (x;y)}{\partial x} = \frac{\partial v_1\ (x;y)}{\partial y}.$$

A kimondott tételünk értelmében ekkor létezik olyan $U=U(x;y)$ függvény, melynek teljes differenciálja

$$dU = v_1\ (x;y)\ dx + v_2\ (x;y)\ dy = v_1\ dx + v_2\ dy.$$

Ebből következik, hogy

$$v_1 = - \frac{\partial U\ (x;y)}{\partial x} \qquad \text{és} \qquad v_2 = - \frac{\partial U\ (x;y)}{\partial y}. \tag{14}$$

A forrásmentesség miatt $\operatorname{div} \bar{v}\ (\bar{r}) = 0$, azaz a (11) alapján

$$\frac{\partial v_1\ (x;y)}{\partial x} + \frac{\partial v_2\ (x;y)}{\partial y} = 0, \quad \text{melyből}$$

$$\frac{\partial v_1\ (x;y)}{\partial x} = - \frac{\partial v_2\ (x;y)}{\partial y}. \tag{15}$$

Ismét felhasználva a kimondott tételt, létezik olyan $F = F\ (x;y)$ függvény, melynek teljes differenciálja

$$dF = - v_2\ (x;y)\ dx + v_1\ (x;y)\ dy = - v_2\ dx + v_1\ dy,$$

s ekkor

$$v_2 = - \frac{\partial F\ (x;y)}{\partial x} \qquad \text{illetve} \qquad v_1 = \frac{\partial F\ (x;y)}{\partial y}. \tag{16}$$

A (14) és (16) allatti összefüggéseket felhasználva az alábbi egyenlőségek adódnak:

$$\frac{\partial U\,(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial F\,(x;y)}{\partial x} \quad \text{és} \quad \frac{\partial U\,(x;y)}{\partial x} = - \frac{\partial F\,(x;y)}{\partial y}, \qquad (17)$$

azaz a szóbanforgó F (x;y) és U (x;y) függvényekre érvényesek a Cauchy - Riemann differenciálegyenletek.

Megmutatjuk, hogy ugyanekkor harmonikusak is. Képezzük ugyanis a (14) alatti egyenlőségekből kiindulva az alábbi deriváltakat:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = - \frac{\partial^2 U\,(x;y)}{\partial x^2}, \quad \text{illetve} \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = - \frac{\partial^2 U\,(x;y)}{\partial y^2}.$$

A (15) alatti egyenlőség alapján következik, hogy

$$- \frac{\partial^2 U\,(x;y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U\,(x;y)}{\partial y^2},$$

így

$$\frac{\partial^2 U\,(x;y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U\,x;y)}{\partial y^2} = 0,$$

mely egyenlőség épp az U (x;y) harmonikus voltát fejezi ki.

A (16) alatti egyenlőségek megfelelő deriváltjait képezve és felhasználva a (17) alatti összefüggést - a fenti analógiájára - adódik,

$$\frac{\partial^2\,F(x;y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\,F(x;y)}{\partial y^2} = 0$$

vagyis F (x;y) is harmónikus függvény.

Minthogy az U (x;y) és F (x;y) függvények a sík kiszemelt D tartományában harmonikusak, s őket a Cauchy - Riemann differenciálegyenletek kapcsolják össze, ezért e függvények egy komplex függvény valós és képzetes részének tekinthetők.

létezik tehát a D tartományon egy olyan $W = W(z)$ komplex függvény, melyre

$$W(z) = F(x;y) + j\,U(x;y) \qquad (j^2 = -1). \tag{18}$$

Az ilyen módon megkonstruált $W(z)$ komplex változós függvényt a $\bar{v}(\bar{r})$ erőtér <u>komplex potenciáljának</u> nevezzük.

A $\bar{v}(\bar{r})$ erőtér és a hozzátartozó $W(z)$ komplex potenciálja között igen fontos összefüggés van. Mivel $W(z)$ reguláris, így képezhető a deriváltja

$$\frac{dW(z)}{dz} = W'(z) = \frac{\partial F(x;y)}{\partial x} + j\,\frac{\partial U(x;y)}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial F(x;y)}{\partial x} - j\,\frac{\partial F(x;y)}{\partial y}$$

(a (17) alatti felhasználásával), melyből a (16) alatti szerint

$$W'(z) = -v_2 - j\,v_1$$

adódik, s így

$$\left|W'(z)\right| = \sqrt{v_2^2 + v_1^2} = \left|\bar{v}(\bar{r})\right|. \tag{19}$$

<u>A komplex potenciál deriváltjának abszolút értéke tehát meg adja a vektortér erősségét.</u> Másrészt a

$$W'(z) = -v_2 - jv_1 = j^2 v_2 - jv_1 = -j\,(v_1 - jv_2)$$

miatt

$$W'(z) = -j\,\overline{v(z)}.$$

Mindkét oldalt j-vel szorozva:

$jW'(z) = \overline{v(z)}$, s áttérve a konjugáltakra $-j\,\overline{W'(\overline{z})} = v(z)$, (20)

vagyis <u>a komplex potenciál deriváltja konjugáltjának (-1)-szerese magát a vektorteret adja.</u>

Tekintsük át a (18) alatti előállításban szereplő $F(x;y)$ és $U(x;y)$ függvények szintvonalait. Ezeknek egyenlete $F(x;y) = c_1$, illetve $U(x;y) = c_2$ implicit alakban adott egyváltozós függvények, ahol c_1 és $c_2 \in R$. Képezzük ezen függvények deriváltját - felhasználva az implicit alakban adott függvény deriválási szabályát.

Az $F(x;y) = c_1$ függvényre vonatkozóan kapjuk

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}.$$

Felhasználva a (16) alatti egyenlőségeket

$$y' = \frac{v_2}{v_1}. \tag{21}$$

vagyis az $F(x;y)$ függvény szintvonalaihoz húzott érintő egyenesek iránya minden pontban megegyezik a $\bar{v}(\bar{r})$ erőtér irányával, hisz az iránytangensek megegyeznek.

Az $U(x;y)$ függvényre vonatkozóan $\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{U'_x(x;y)}{U'_y(x;y)}$.
melyből a (14) alatti egyenlőségek felhasználásával

$$y' = -\frac{v_1}{v_2}. \tag{22}$$

adódik.

A (21) és (22) alatti összefüggések azt mutatják, hogy a komplex potenciált megadó harmonikus függvények szintvonalai egymásra merőlegesek (ortogonális trajektoriák).

Minthogy

$$- \operatorname{grad} U(x;y) = - \frac{\partial U(x;y)}{\partial x} \bar{i} - \frac{\partial U(x;y)}{\partial y} \bar{j},$$

s így a (14) alatti összefüggések felhasználásával

$$- \operatorname{grad} U(x;y) = v_1 \bar{i} + v_2 \bar{j} = \bar{v}(\bar{r}),$$

ezért a potenciáltér (8) alatti értelmezése alapján az U(x;y) függvényt potenicál-függvénynek nevezzük.

Mint láttuk az F(x;y) függvény szintvonalaihoz húzott érintőegyenesek iránya a $\bar{v}(\bar{r})$ vektorok, azaz az erővektorok irányával egyezik meg, ezért az F(x;y) függvényt erőfüggvénynek nevezzük.

Elektrosztatikai alkalmazás

Helyezzünk el a kétdimenziós vektortér origójában egy q nagyságú pontszerű töltést. E töltés által létesitett elektromos erőtér térerősségvektora

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{2qx}{x^2+y^2} \bar{i} + \frac{2qy}{x^2+y^2} \bar{j}.$$

Határozzuk meg a komplex potenciált, a potenciálfüggvényt, az erőfüggvényt, valamint az ekvipotenciális görbék és az erővonalak egyenletét!

Irjuk fel a térerősség-vektorokat komplex értelmezéssel

$$E(z) = \frac{2qx}{x^2+y^2} + j\,\frac{2qy}{x^2+y^2}.$$

A $W(z) = F(x;y) + j\,U(x;y)$ komplex potenciál a (20) alatti összefüggés alapján határozható meg, mely szerint

$$-j\,\overline{W'(z)} = E(z),$$

ahol $W(z)$ éppen a keresett komplex potenciál. Egyenletünket j-vel szorozva $W'(z) = j\,E(z)$, azaz

$$W'(z) = -\frac{2qy}{x^2+y^2} + j\,\frac{2qx}{x^2+y^2}, \qquad \text{s így}$$

$$W'(z) = -\frac{2qy}{x^2+y^2} - j\,\frac{2qx}{x^2+y^2}.$$

Minthogy

$$W'(z) = \frac{\partial F(x;y)}{\partial x} + j\,\frac{\partial U(x;y)}{\partial x}, \qquad \text{illetve}$$

$W'(z) = \dfrac{\partial U(x;y)}{\partial y} - j\,\dfrac{\partial F(x;y)}{\partial y}$ ezért fenn kell állniuk a

következő egyenleteknek:

a./ $\dfrac{\partial F(x;y)}{\partial x} = -\dfrac{2qy}{x^2+y^2}$, c./ $\dfrac{\partial U(x;y)}{\partial y} = -\dfrac{2qy}{x^2+y^2}$,

b./ $\dfrac{\partial U(x;y)}{\partial x} = -\dfrac{2qx}{x^2+y^2}$, d./ $\dfrac{\partial F(x;y)}{\partial y} = -\dfrac{2qx}{x^2+y^2}$.

A komplex potenciált előállító, keresett $U(x;y)$ és $F(x;y)$ függvények a fenti parciális-differenciálegyenlet-rendszerből határozhatók meg.

Az a./-ból adódik

$$F(x;y) = -\int \frac{2qy}{x^2+y^2}\,dx = -\frac{2q}{y}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1} = 2\ q\ \mathrm{arcctg}\ \frac{x}{y} + G(y).$$

Minthogy $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$, így $\mathrm{arcctg}\ \frac{x}{y} = \mathrm{arctg}\ \frac{y}{x}$, vagyis

$$F(x;y) = 2\ q\ \mathrm{arctg}\ \frac{y}{x} + G(y)$$

A $G(y)$ a d./ alatti feltételből határozható meg.

$$\frac{\partial F(x;y)}{\partial y} = 2q\ \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\ \frac{1}{x} + G'(y) = \frac{2qx}{y^2+x^2} + G'(y)\ ,\ \text{s így}$$

$$\frac{2qx}{x^2+y^2} = \frac{2qx}{y^2+x^2} + G'(y),\ \text{melyből}\ G(y) \equiv C.$$

Az erőfüggvény tehát $F(x;y) = 2q\ \mathrm{arctg}\ \frac{y}{x} + C$, illetve C-t 0-nak választva

$$F(x;y) = 2q\ \mathrm{arctg}\ \frac{y}{x}.$$

Az erővonalak pedig az $F(x;y) = K$ összefüggés alapján

$$2q\ \mathrm{arctg}\ \frac{y}{x} = K,$$

melyből

$$\mathrm{arctg}\ \frac{y}{x} = \frac{K}{2q},$$

s így

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{K}{2q}.$$

Bevezetve a $\operatorname{tg} \frac{K}{2q} = K_1$ jelülést, az erővonalak egyenlete $y = K_1 x$, azaz az origón átmenő egyenletek.

A b./-ből adódik

$$U(x;y) = - \int \frac{2qx}{x^2+y^2} dx = - q \ln (x^2+y^2) + H(y)$$

A H(y)-t a c./ alapján határozzuk meg.

$\frac{\partial U(x;y)}{\partial y} = - q \frac{1}{x^2+y^2} 2y + H'(y)$, s így a c./ miatt

$$- \frac{2qy}{x^2+y^2} = - \frac{2qy}{x^2+y^2} + H'(y)$$

melyből $H'(y) = 0$, vagyis $H(y) = C$.

A potenciálfüggvényt tehát $U(x;y) = - q \ln (x^2+y^2) + C$, illetve C-t 0-nak választva

$$U(x;y) = - q \ln (x^2+y^2).$$

Az ekvipotenciális vonalak az $U(x;y) = C$ összefüggésből határozhatók meg, s így

$$q \ln \frac{1}{x^2+y^2} = C \text{, melyből}$$

$$\frac{1}{x^2+y^2} = e^{\frac{C}{q}}.$$

Bevezetve az $e^{-\frac{C}{q}} = K$ jelölést $x^2 + y^2 = K$ adódik.

Az ekvipotenciális vonalak tehát origó középpontú körök. A komplex potenciál pedig

$$W(z) = 2q \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + j\, q \ln \frac{1}{x^2+y^2},$$

illetve a nyert formulát f(z) alakra hozva

$$W(z) = 2q \operatorname{arc} z + 2jq \ln \frac{1}{|z|} = 2qj \left[\ln \frac{1}{|z|} - j \operatorname{arc} \frac{1}{z}\right] =$$

$$= 2qj \ln \frac{1}{z}.$$

<u>Komplex potenciál értelmezése áramlási térben</u>

Legyen kétdimenziós

$$\bar{v}(\bar{r}) = v_1(x;y)\, \bar{i} + v_2\,(x;y)\, \bar{j}$$

vektortér forrás- és örvénymentes áramlási tér, s az ezt leíró komplex függvény

$$v(z) = v_1(x;y) + j\, v_2\,(x;y) \qquad (j^2 = -1).$$

Ha az áramlási tér valamely egyszeresen összefüggő D tartományában léteznek a $v_1(x;y)$ és $v_2(x;y)$ függvények másodrendű parciális deriváltjai, akkor – a forrás- és örvénymentessége miatt (lásd erőtér) – fennállnak az alábbiak:

$$\frac{\partial v_2(x;y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x;y)}{\partial y} = 0, \tag{23}$$

illetve

$$\frac{\partial v_1(x;y)}{\partial x} + \frac{\partial v_2(x;y)}{\partial y} = 0. \tag{24}$$

Ekkor a bizonyított tételünk miatt létezik olyan $\varphi(x;y)$, illetve $\psi(x;y)$ függvény, melyekre a (23) alapján

$$d\varphi(x;y) = v_1(x;y)\,dx + v_2\,(x;y)\,dy$$

és a (24) alapján

$$d\psi(x;y) = -\,v_2(x;y)\,dx + v_1\,(x;y)\,dy.$$

Ezekből következik, hogy

$$v_1(x;y) = \frac{\partial\varphi\,(x;y)}{\partial x} \quad \text{és} \quad v_2(x;y) = \frac{\partial\varphi\,(x;y)}{\partial y}. \qquad (25)$$

illetve

$$v_2(x;y) = -\,\frac{\partial\psi\,(x;y)}{\partial x} \quad \text{és} \quad v_1(x;y) = \frac{\partial\psi\,(x;y)}{\partial y}. \qquad (26)$$

Minthogy a $\varphi(x;y)$ és $\psi(x;y)$ függvényekre érvényesek a Cauchy - Riemann differenciálegyenletek, s ugyanakkor harmonikusak is (lásd az erőtér esetét!) ezért ezek egy komplex függvény valós és képzetes részének tekinthetők. Létezik tehát a D tartományon egy olyan W(z) komplex függvény, melyre

$$W(z) = \varphi(x;y) + j\,\psi(x;y). \qquad (27)$$

Az ilyen módon megkonstruált W(z) komplex változós függvényt a $\bar{v}(\bar{r})$ áramlási tér komplex potenciáljának nevezzük. Ennek valós részét - <u>a $\varphi(x;y)$ függvényt - potenciál-függvénynek nevezzük.</u> Ugyanis

$$\operatorname{grad}\varphi(x;y) = \frac{\partial\varphi(x;y)}{\partial x}\,\bar{i} + \frac{\partial\varphi(x;y)}{\partial y}\,\bar{j}\,,$$

s így a (25) alapján

$$\operatorname{grad}\varphi(x;y) = v_1(x;y)\,\bar{i} + v_2(x;y)\,\bar{j} = \bar{v}(\bar{r}).$$

vagyis a $\varphi(x;y)$ függvény a $\bar{v}(\bar{r})$ vektortér potenciálterét szolgáltatja.

Mivel a $\varphi(x;y) = c_1$ és $\psi(x;y) = c_2$ szintvonalak egymás ortogonális trajektóriái (lásd erőtér esetét!), ezért <u>a $\psi(x;y)$ függvényt áramfüggvénynek nevezzük.</u>

A komplex potenciál segitségével a sikbeli áramlást jellemző valamennyi mennyiség kifejezhető.

A (27) alatti előállitás alapján

$$W'(z) = \frac{\partial\varphi\ (x;y)}{\partial x} + j\ \frac{\partial\psi\ (x;y)}{\partial x},$$

melyből a (25), illetve a (26) szereplő megfelelő egyenlőségek felhasználásával

$$W'(z) = v_1(x;y) - j\ v_2(x;y).$$

amiből az áramlás sebességvektora

$$v(z) = \overline{W'(\bar{z})}. \qquad (28)$$

A sebesség nagysága pedig

$$|v(z)| = \sqrt{v_1^2\ (x;y) + v_2^2\ (x;y)} = |W'\ (z)|.$$

<u>Alkalmazás</u>

Határozzuk meg a párhuzamos sikáramlás potenciál- és áramfüggvényét, valamint a komplex potenciálját!
Párhuzamos sikáramlás esetén a sebességvektor állandó, azaz a vektor mindkét komponense állandó. A sebességvektor tehát

$$\bar{v}(\bar{r}) = v_1 \bar{i} + v_2 \bar{j}$$

alakban irható, ahol v_1 és v_2 konstans. Áttérve a komplex előállitásra:

$$\bar{v}(\bar{r}) \rightarrow v(z) = v_1 + j\, v_2 \quad (j^2 = -1).$$

A keresett komplex potenciál a (28) alapján határozható meg. Irhatjuk

$$\overline{W'(z)} = v_1 + v_2 j \text{ , melyből}$$

$$W'(z) = v_1 - v_2 j.$$

A W(z) deriválthatóságából következik, hogy

$$W'(z) = \frac{\partial \varphi\,(x;y)}{\partial x} + j\,\frac{\partial \psi\,(x;y)}{\partial x},$$

illetve

$$W'(z) = \frac{\partial \psi\,(x;y)}{\partial y} - j\,\frac{\partial \varphi\,(x;y)}{\partial y}.$$

Igy a $\varphi(x;y)$ és $\psi(x;y)$ függvények meghatározására az alábbi parciális-differenciálegyenletek adódnak.

a./ $\dfrac{\partial \varphi\,(x;y)}{\partial x} = v_1$, c./ $\dfrac{\partial \varphi\,(x;y)}{\partial y} = v_2$.

b./ $\dfrac{\partial \psi\,(x;)}{\partial x} = -v_2$, d./ $\dfrac{\partial \psi\,(x;y)}{\partial y} = v_1$.

Az a./ alapján

$$\varphi\,(x;y) = \int v_1\, dx = v_1 x + g(y).$$

A c./ felhasználásával

$$\frac{\partial\varphi\ (x;y)}{\partial y} = g'(y) = v_2\ ,\ \text{s így}$$

$$g(y) = v_2 y + C_1.$$

A potenciálfüggvény tehát

$$\varphi\ (x;y) = v_1 x + v_2 y + C_1.$$

A b./ alattiból

$$\psi\ (x;y) = -\int v_2\ dx = -\ v_2 x + \ln\ (y).$$

A d./ felhasználásával

$$\frac{\partial\psi\ (x;y)}{\partial y} = \ln'(y) = v_1\ ,\ \text{s így}$$

$$\ln(y) = v_1 y + C_2.$$

Az áramfüggvény tehát

$$\psi\ (x;y) = -\ v_2 x + v_1 y + C_2.$$

A keresett komplex potenciál pedig - a konstansok 0-nak választásával:

$$W(z) = \varphi\ (x;y) + j\ \psi\ (x;y) = v_1 x + v_2 y + j\ (-v_2 x + v_1 y) =$$

$$= v_1 x + v_2 y - j\ v_2 x + j\ v_1 y = x\ (v_1 - jv_2) + jy\ (v_1 - jv_2) = \bar{v}\ z.$$

FELHASZNÁLT IRODALOM:

1./ Fuksz - Sabat: Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk.

2./ Dr. Gáspár Gyula: Komplex függvénytan.

3./ Gruber - Blahó: Folyadékok mechanikája.

4./ Obadovics J. Gyula: Matematikai zsebkönyv.

5./ Műszaki hő- és áramlástan (egyetemi jegyzet).

6./ Fenyő - Frey: Matematika villamosmérnököknek.

7./ Sándor E. - Dr.Pokorádi L.: Komformis leképezések és alkalmazásuk az aerodinamikában Tudományos Kiképzési Közlemények, MH SZRTF Szolnok, 1991/2. 18-39.o.