Szabolcsi Róbert mk. főhadnagy

A LÉGIJÁRMŰVEK NEMLINEÁRIS MOZGÁSEGYENLETEINEK LINEARIZÁLÁSA

A repülőszerkezetek térbeli mozgásai pontosan, nemlineáris, inhomogén differenciálegyenlet rendszerrel írhatók le. A gyakorlatban sokszor kell meghatározni egy légijármű viselkedését repülés közben külső zavaró hatások esetén (stabilitás-vizsgálat), vagy a légijármű automatikus vezérlő rendszerének minőségi jellemzőit. Mindezt a repülőszerkezet nemlineáris mozgásegyenleteivel meglehetősen nehézkes elvégezni, ezért a mérnöki gyakorlatban az inhomogén differenciálegyenlet rendszert egyszerűsítik oly módon, hogy a légijármű térbeli mozgását felbontják hosszirányú és oldalirányú mozgásokra. Ezzel egyszerűsödik a mozgásfajták differenciálegyenlet rendszere, de az egyes egyenletek még mindig nemlineárisak. A nemlineáris differenciálegyenleteket leggyakrabban a kis zavarások módszerével linearizálhatók, a változók kis növekményeire.

Válasszuk ki a légijármű hosszirányú, nemlineáris differenciálegyenlet rendszeréből a következőt:

$$m\ v\ \theta = P\ \sin\alpha + Y - G\ \cos\theta \qquad (1)$$

Az (1) egyenlet linearizálásakor figyelembe vesszük, hogy

$$P = f_1(v;\ H;\ \delta_{HVK}) \approx f_1\ (v;\ \delta_{HVK})$$

$$Y = f_2\ (v;\ H;\ \alpha;\ \delta_{VV}) \approx f_2\ (v;\ \alpha) \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletekben:

m – a légijármű tömege;
v – a repülés sebessége;
θ – pályaszög;
P – a hajtómű tolóereje;
α – állásszög;
Y – felhajtóerő;
$G=m\cdot g$ – súlyerő;
δ_{HVK} – a hajtómű vezérlőkar állása;
δ_{VV} – a vizszintes vezérsik kitérése.

Az (1) egyenlet linearizálása a következő lépésekben történik:

1. Legyen a kiindulási stacionárius állapot állandó magasságon végrehajtott, egyenes vonalú, egyenletes repülés. Ebben a kiindulási állapotban a változókat jelöljük "0" indexszel:

$$\theta_o;\ \alpha_o;\ \vartheta_o;\ v_o;\ H_o;\ \text{stb.}$$

2. A kis zavarások módszerével a változókat a következő alakban irhatjuk fel:

$$v = v_o + \Delta v; \qquad P = P_o + \Delta P; \qquad \theta = \theta_o + \Delta\theta \quad \text{stb.}$$

3. Feltételezzük, hogy a linearizálni kivánt függvény nemlineáris összefüggései a kiindulási stacionárius állapotban és annak környezetében akárhányszor differenciálhatók, igy azok TAYLOR-sorba fejthetők. A munkapont körüli változásokra szoritkozva a magasabb rendű tagokat elhanyagoljuk. Ennek megfelelően:

$$m\,v\,\theta = m\,v_o\,\theta_o + \left.\frac{\partial(m\,v\,\theta)}{\partial v}\right|_o \Delta v + \left.\frac{\partial(m\,v\,\theta)}{\partial \theta}\right|_o \Delta\theta =$$

$$= m\,v_o\,\theta_o + m\,\theta_o\,\Delta v + m\,v_o\,\Delta\theta;$$

$$P\sin\alpha = P_o\sin\alpha_o + \left.\frac{\partial(P\sin\alpha)}{\partial v}\right|_o \Delta v + \left.\frac{\partial(P\sin\alpha)}{\partial \delta_{HVK}}\right|_o \Delta\delta_{HVK} +$$

$$+ \left.\frac{\partial(P\sin\alpha}{\partial \alpha}\right|_o \Delta\alpha = P_o\sin\alpha_o + P^v\sin\alpha_o\,\Delta v + P^{\delta_{HVK}}\sin\alpha_o\,\Delta\delta_{HVK} +$$

$$+ P_o\cos\alpha\,\Delta\alpha;$$

$$Y = Y_o + \left.\frac{\partial Y}{\partial v}\right|_o \Delta v + \left.\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\right|_o \Delta\alpha = Y_o + Y^v\,\Delta v + Y^\alpha\,\Delta\alpha;$$

$$m\,g\cos\theta = m\,g\cos\theta_o + \left.\frac{\partial(m\,g\cos\theta)}{\partial \theta}\right|_o \Delta\theta =$$

$$= m\,g\cos\theta_o - m\,g\sin\theta\,\Delta\theta.$$

4. A (3) pontban kapott kifejezéseket helyettesitsük be a kiindulási (1) egyenletbe, figyelembe véve a kiindulási állapotot: $\theta_o = 0$; $\theta_o = 0$.

$$m\,v_o\,\Delta\theta = P_o\sin\alpha_o + P^v\sin\alpha_o\,\Delta v + P^{\delta_{HVK}}\sin\alpha_o\,\Delta\delta_{HVK} +$$

$$+ P_o\cos\alpha\,\Delta\alpha + Y_o + Y^v\,\Delta v + Y^\alpha\Delta\alpha - m\,g\cos\theta_o + m\,g\sin\theta\,\Delta\theta \qquad (3)$$

5. A vizsgált mozgásegyenlet kiindulási állapotbban:

$$m\,v_o\,\theta_o = P_o\sin\alpha_o + Y_o - m\,g\cos\theta_o = 0 \qquad (4)$$

6. Vonjuk ki a (3) egyenletből a (4) egyenletet és rendezzük a kapott kifejezést:

$$m\ v_o\ \Delta\theta - (P^v \sin\alpha_o + Y^v)\Delta v - (P_o \cos\alpha + Y^\alpha)\Delta\alpha - m\ g\ \sin\theta\ \Delta\theta =$$
$$= P^{\delta_{HVK}} \sin\alpha_o\ \Delta\delta_{HVK} \qquad (5)$$

7. A (5) egyenletet osszuk el $(m\ v_o)$-val:

$$\Delta\theta - \frac{1}{m\ v_o}(P^v \sin\alpha_o + Y^v)\Delta v - \frac{1}{m\ v_o}(P_o \cos\alpha + Y^\alpha)\Delta\alpha -$$
$$- \frac{g}{v_o}\sin\theta\Delta\theta = \frac{1}{mv_o} P^{\delta_{HVK}} \sin\alpha_o\ \Delta\delta_{HVK}$$

8. Áttérünk dimenzió nélküli mennyiségekre, például:

$$\bar{v} = \frac{\Delta v}{v_o} = \frac{v - v_o}{v_o}; \qquad \bar{\alpha} = \frac{\Delta\alpha}{1\ \text{rad}}$$

Megjegyzés: A továbbiakban a dimenzió nélküli mennyiségek felül-vonásait elhagyom.

9. A (8) pontnak megfelelően:

$$\theta + a_y^v\ v + a_y^\alpha\ \alpha + a_y^\theta\ \theta = a_y^{\delta_{HVK}}\ \delta_{HVK} \qquad (6)$$

ahol: $a_y^v = -\frac{1}{m\ v_o}(P^v \sin\alpha_o + Y^v);$

$a_y^\alpha = -\frac{1}{m\ v_o}(P_o \cos\alpha + Y^\alpha);$

$a_y^\theta = -\frac{g}{v_o}\sin\theta;$

$$a_y^{\delta_{HVK}} = \frac{1}{m\, v_o} \sin\alpha_o \; P^{\delta_{HVK}}$$ - együtthatók.

A légijármű mozgását leiró egyenlet (6) már lineáris, állandó együtthatójú.

10. Az (6) egyenlet operátortartományban felirva:

$$\theta(s)\left[s + a_y^{\theta}\right] + a_y^{\alpha}\alpha(s) + a_y^{v}\, v(s) = a_y^{\delta_{HVK}}\; \delta_{HVK}(s)$$

A repülőszerkezet hosszirányú, linearizált mozgásegyenletei az operátortartományban, a kiindulási feltételek figyelembevételével:

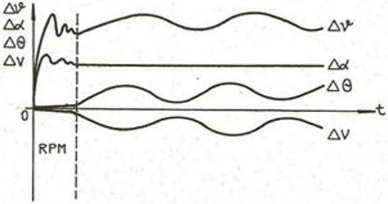
$$\begin{aligned}
&\left[s + a_x^{v}\right] \Delta v(s) + a_x^{\theta}\, \theta(s) + a_x^{\alpha}\, \alpha(s) = a_x^{\delta_{HVK}}\; \delta_{HVK}(s) \\
&a_y^{v}\, v(s) + \left[s + a_y^{\theta}\right] \theta(s) + a_y^{\alpha}\, \alpha(s) = 0 \\
&a_{m_z}^{v}\, v(s) + a_{m_z}^{\theta}\, \theta(s) + \left[s + a_{m_z}^{\omega_z}\right] \omega_z(s) + a_{m_z}^{\alpha}\, \alpha(s) = a_{m_z}^{\delta_{VV}}\; \delta_{VV}(s) \\
&- a_y^{v}\, v(s) - a_y^{\theta}\, \theta(s) - \omega_z(s) + \left[s - a_y^{\alpha}\right] \alpha(s) = 0
\end{aligned} \qquad (7)$$

A (7) lineáris algebrai egyenletrendszernek akkor van a triviálistól eltérő megoldása, ha a fődeterminánsa zérus:

$$D = \begin{vmatrix} s + a_x^v & a_x^\theta & 0 & a_x^\alpha \\ a_y^v & s+a_y^\theta & 0 & a_y^\alpha \\ a_{m_z}^v & a_{m_z}^\theta & s+a_{m_z}^{\omega_z} & a_{m_z}^\alpha \\ -a_y^v & -a_y^\theta & -1 & s-a_y^\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= a_o\, s^4 + a_1\, s^3 + a_2\, s^2 + a_3\, s + a_4 = 0$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása egy nagy- és egy kisértékű konjugált komplex gyökpár, melyek kis zavarások esetén a repülőszerkezet rövid- és hosszúperiódusú mozgását egyértelműen meghatározzák (1. ábra).



1. ábra

A repülőszerkezetre ható külső zavarás legyen függőleges irányú széllökés. Kezdetben a repülőszerkezet tehetetlensége miatt a repülés sebességének abszolut értéke v, valamint a pályaszög θ gyakorlatilag nem változik. Ekkor az állásszög α és a bólintási szög ϑ intenziv változását figyelhetjük meg. Mivel az állásszög és a bólintási szög nagy frekvenciával változik, igy a vizsgált paraméterek $(\alpha;\vartheta)$ periódusideje kicsi, ezért ezt a mozgást szokás rövidperiodikus mozgásnak nevezni (RPM).

A rövidperiodusu mozgás befejeztével jelentőssé válik a repülés sebességvektorának (abszolut értékének v és irányának θ) megváltozása. Mivel ekkor az állásszög állandónak tekinthető, ezért a pályaszög változása követi a bólintási szög változását: $\vartheta = \theta + \alpha$. Ez a mozgás kisfrekvenciájú, nagy periódusidejű, ezért hosszúperiódusú mozgásnak is szokásos nevezni.

Az eddigiek alapján a rövidperiódusú mozgásra igaz, hogy $\Delta v \approx 0$, igy a repülőszerkezet hosszirányú mozgását leiró linearizált egyenletrendszer (7) a következőképpen irható fel:

$$\left(s + a_{m_z}^{\omega_z}\right) \omega_z(s) + a_{m_z}^{\alpha} \alpha(s) = a_{m_z}^{\delta_{vv}} \delta_{vv}(s)$$

$$-\omega_z(s) + \left(s - a_y^{\alpha}\right) \alpha(s) = 0 \qquad (8)$$

Megjegyzés: Mivel a repülőszerkezetek hosszúperiódusú mozgásának periódusideje néhány perc is lehet, valamint ezt a mozgásfajtát a repülőgépvezető vagy a fedélzeti automatikus vezérlőrendszer csillapitja, ezért a továbbiakban a hosszirányú mozgást a (8) egyenletrendszerrel jellemezzük.

A REPÜLŐGÉP ÁTVITELI FÜGGVÉNYEI

Határozzuk meg a repülőgép hosszirányú mozgásának átviteli függvényeit. Legyen a bemenőjel a vizszintes vezérsik kitérése $-\delta_{vv}(s)$, a kimenőjel pedig az állásszög $\alpha(s)$ vagy a keresztlengely körüli forgómozgás szögsebessége: $\omega_z(s)$ (2. ábra).

2. ábra

a./ A repülőgép állásszög szerinti átviteli függvénye

A keresett függvény:

A (8) egyenletrendszerből az átviteli függvényt CRAMER--szabály segitségével határozzuk meg:

$$\alpha(s) = \frac{D_\alpha}{D_1}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} s + a_{m_z}^{\omega_z} & a_{m_z}^{\alpha} \\ -1 & s - a_y^{\alpha} \end{vmatrix} = s^2 + s\, a_{m_z}^{\omega_z} - s\, a_y^{\alpha} - a_{m_z}^{\omega_z} a_y^{\alpha} + a_{m_z}^{\alpha} =$$

$$= s^2 + s\left(a_{m_z}^{\omega_z} - a_y^{\alpha}\right) + \left(a_{m_z}^{\alpha} - a_{m_z}^{\omega_z} a_y^{\alpha}\right) = a_o\, s^2 + a_1\, s + a_2;$$

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} s + a_{m_z}^{\omega_z} & a_{m_z}^{\delta_{vv}} \delta_{vv}(s) \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = a_{m_z}^{\delta_{vv}} \delta_{vv}(s).$$

Tehát:

$$\alpha(s) = \frac{D_\alpha}{D_1} = \frac{a_{m_z}^{\delta_{vv}} \delta_{vv}(s)}{a_o s^2 + a_1 s + a_2}$$

A keresett átviteli függvény:

$$Y_\alpha^{vv}(s) = \frac{\alpha(s)}{-\delta_{vv}(s)} = \frac{-a_{m_z}^{\delta_{vv}}}{a_o s^2 + a_1 s + a_2} \qquad (9)$$

Az átviteli függvényt az alábbi alakra hozzuk:

$$Y_\alpha^{vv}(s) = \frac{K_\alpha^{vv} \omega_\alpha^2}{s^2 + 2\xi_\alpha \omega_\alpha s + \omega_\alpha^2} \qquad (10)$$

Összehasonlítva a keresett átviteli függvény két alakját:

$$\omega_\alpha^2 = a_2 = a_{m_z}^{\alpha} - a_{m_z}^{\omega_z} a_y^{\alpha} ; \qquad 2\xi_\alpha \omega_\alpha = a_1 = a_{m_z}^{\omega_z} - a_y^{\alpha} ;$$

$$\xi_\alpha = \frac{a_1}{2\omega_\alpha} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_o}} ; \qquad K_\alpha^{vv} = \frac{-a_{m_z}^{\delta_{vv}}}{\omega_\alpha^2}$$

A repülőgép tehát arányos lengő tagnak tekinthető.

b./ A repülőgép ω_z szerinti átviteli függvénye

A keresett átviteli függvény:

$$Y^{vv}_{\omega_z}(s) = \frac{\omega_z(s)}{-\delta_{vv}(s)} - ?$$

Az átviteli függvényt a (8) egyenletrendszerből a CRAMER-szabály segítségével határozzuk meg:

$$\omega_z = \frac{D_{\omega_z}}{D_1}$$

$$D_{\omega_z} = \begin{vmatrix} a_{m_z}^{\delta_{vv}} \delta_{vv}(s) & a_{m_z}^{\alpha} \\ 0 & s-a_y^{\alpha} \end{vmatrix} = \left(s-a_y^{\alpha}\right) a_{m_z}^{\delta_{vv}} \delta_{vv}(s)$$

Tehát:

$$\omega_z = \frac{D_{\omega_z}}{D_1} = \frac{\left(s-a_y^{\alpha}\right) a_{m_z}^{\delta_{vv}} \delta_{vv}(s)}{a_o s^2 + a_1 s + a_2}$$

A keresett átviteli függvény:

$$Y^{vv}_{\omega_z}(s) = \frac{\omega_z(s)}{-\delta_{vv}(s)} = \frac{-a^{\delta_{vv}}_{m_z}\left(s-a^{\alpha}_{y}\right)}{a_o s^2 + a_1 s + a_2} \qquad (11)$$

A keresett átviteli függvényt a következő alakra hozzuk:

$$Y^{vv}_{\omega_z}(s) = \frac{\omega_z(s)}{-\delta_{vv}(s)} = \frac{K^{vv}_{\omega_z}\ \omega^2_{\alpha}\ (T_{\theta}s + 1}{s^2+2\zeta_{\alpha}\ \omega_{\alpha}\ s + \omega^2_{\alpha}}$$

Hasonlitsuk össze a (11) és a (12) átviteli függvényeket.

$$T_{\theta} = -\frac{1}{a^{\alpha}_{y}} \ ; \qquad K^{vv}_{\omega_z} = \frac{K^{vv}_{\alpha}}{T_{\theta}}$$

melyek segitségével megállapitható, hogy a repülőgép arányos, differenciáló, lengő tagnak tekinthető.

Az ismertetett eljárással olyan differenciál egyenletek nyerhetők, melyek a műszaki gyakorlat számára kellően pontosak, ugyanakkor alkalmazásuk is viszonylag egyszerű. A leirtakkal analóg módon linearizálhatók az oldalirányú mozgások egyenletei is.

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. Dr. Rácz Elemér: Repülőgépek
Tankönyvkiadó, Budapest 1985.

2. Dr. Csáki Frigyes: Korszerű szabályozáselmélet
Akadémiai Kiadó, Budapest 1970.

3. E. Aslanjan: Repülőszerkezetek automatikus vezérlő rendszerei
Repülőmérnöki Egyetem, Kijev 1984.