ISSN 2064-9231

Spline függvények története és faipari alkalmazásuk

I. rész

POLGÁR Rudolf[1], PÁSZTORY Zoltán[1]

[1] Nyugat-magyarországi Egyetem Simonyi Károly Kar, Innovációs Központ

Kivonat

Tanulmányunkkal szeretnénk bepillantást adni a spline függvény felfedezésének történetétől a jelenleg alkalmazott módszerekig. Első cikkünk foglalkozik a spline függvények feltalálásával és az elmúlt évszázadokban történt fejlődésükkel. A látszólag száraz matematikai képletekben megjelenő függvények nagyon gyakorlatias megoldások, éppen ezért a mai terméktervezés egyik fő eszközei. A különböző spline típusokat mutatjuk be, mint a Bézier-spline, az interpolációs spline, a B- és a T-spline, valamint a NURBS felületképzési módszerek. Az elmúlt évtizedekben fokozódó ipari verseny és az informatikai technológiák fejlődése kedvező környezetet biztosított a spline függvények fejlődéséhez és széleskörű alkalmazásához. Jelen cikk megadja a spline függvények matematikai formuláit a hasznosítás számára, a következő cikk pedig az ipari alkalmazásba, kiemelten a faipari alkalmazásokba ad betekintést.

Kulcsszavak: spline, Bézier-görbék, approximáció, interpolációs spline

History of Spline Functions and Application in Wood Industry

Part 1

Abstract

In our studies we try to give an insight into the development of the spline functions and their applications from the invention of this tool. This first paper explains the invention and development of the spline functions during the past centuries. The seemingly abstract functions appearing in the form of mathematical formulae are very practical solutions and are the main tool in today's product design. The different types of spline are shown such as the Bezier, the interpolations, the B-spline, the T-spline and NURBS solutions for defining surfaces. The increasing industrial competition and development of information technology provided a favourable environment for development and wide utilization of spline functions in the last decades. This article gives the mathematical forms of splines for utilization and the next article will show the industrial utilization, especially the utilization in wood industry of spline functions.

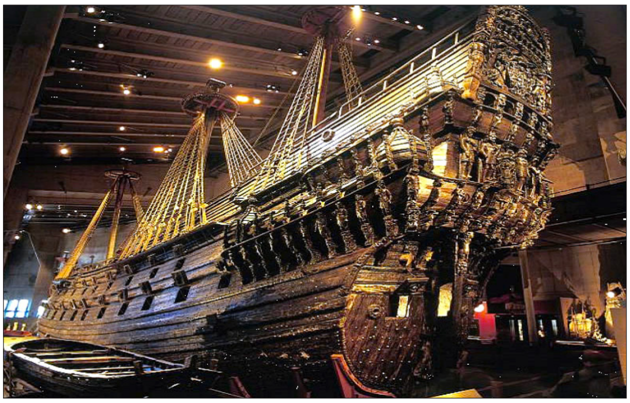
Keywords: spline, Bézier spline, approximation, interpolation spline

Bevezetés

A tudomány szerepe az emberi társadalomban az ismeretek megszerzése és bővítése, tágabb értelemben pedig ezen ismeretek alkalmazásának lehetővé tétele, annak érdekében, hogy egészséges, élhető és fenntartható környezet alakulhasson ki. A tudomány egyik hajtóereje – az emberi kíváncsiságon felül – a gazdasági fejlődés és manapság egyre inkább a környezet megóvása. Ezen célok megvalósításához járulnak hozzá a tudományágak a természeti törvényszerűségek felismerésével, azok leírásával és alkalmazásával.

ISSN 2064-9231

A spline függvény felismerése több évszázada nagyon gyakorlatias céllal történt, és hosszú ideig csak csekély mértékben foglalkoztak vele, mondhatni alig alkalmazták. Az ipari igények növekedésével került újra felszínre és a spline függvények alkalmazásának különféle fajtáit dolgozták ki és ma is folyamatos fejlődés jellemzi. A számítástechnikai háttérrel támogatott közelítő eljárásoknak ma elengedhetetlen kelléke. A spline függvények segítségével adott pontokon átmenő vagy azokat a legjobban megközelítő görbéket lehet rajzolni. Ezek a görbék valamilyen cél szerint ideális görbének nevezhetőek vagy igyekeznek azt a lehető legjobban megközelíteni. A spline használata a hajótervezésben és -építésben kezdődött, még akkor, amikor a csónakok, hajók és hadihajók fából készültek.



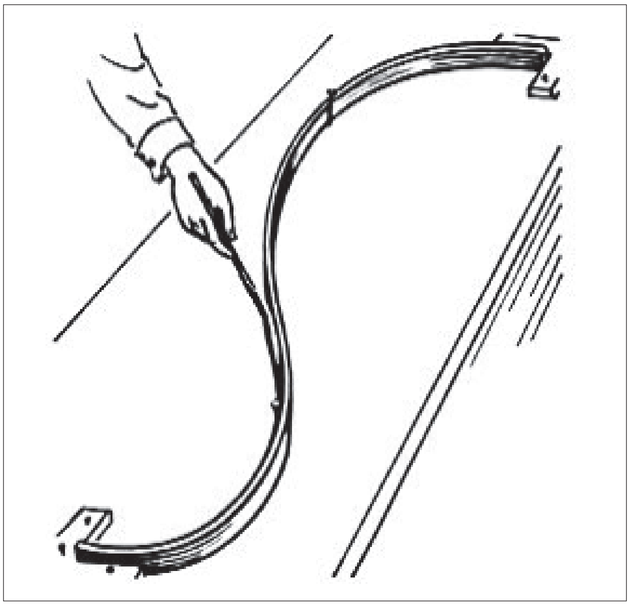
1. ábra A rekonstruált Vasa hadihajó (Stockholm, Vasa Múzeum)
Figure 1 The reconstructed Vasa warship (Vasa Museum, Stockholm)

Története egy balsikernek köszönhető, az ún. „svéd Titanic”-nak. A „Vasa” hadihajó, II. Gusztáv svéd király megbízásából készült el, melyet a Balti-tengeri erődemonstráció miatt készíttetett, az akkori klasszikus hajóépítési szokásoknak megfelelően. Akkoriban ugyanis a hadi igényekhez igazították a hajók tulajdonságait, mint például a raktér nagysága, és a tervek alapján munkálták meg az elkészítésre szánt fát is. A kapacitás növelésével a hajók lomhasága is megnőtt, így hiába bírt el több fegyverzetet, ha nem tudta megfelelően a pályáját korrigálni, esetleg billegett a nagy súlytól a fedélközben vagy a fedélzeten. A „Vasa” (1. ábra) – korának legnagyobb fegyverarzenállal rendelkező hajója volt – méreteihez képest túl nehéz és instabil lett. 1628. augusztus 10-én futott ki a tengerre, de 1300 méterre a partoktól elsüllyedt (w1). A kudarc okán a király elrendelte egy modern hajóépítési eljárás kidolgozását.

Az új technológia és eljárás segítségével méretükhöz képest fordulékony, gyors, nagy raktárkapacitású, és legfőképp stabil hajókat hoztak létre. A technológia alapötlete egyszerű és zseniális: ne a hajó terve készüljön el először és készítsük el fából, hanem először vizsgáljuk meg, hogy mit tud maga az építőanyag – jelen esetben a fa –, és ehhez igazítsuk a terveket. Így találták fel a spline-t, a hajótervezési vonalzót. Ennek segítségével tervezték meg az íves részeket. Az eszköz kitalálói nem is sejthették, hogy találmányukat több mint 300 év múlva a járműipar fogja ismét felfedezni, újragondolni. A XX. század közepén a matematika és fizika igazolta, hogy az eszköz több szempontból is ideális.

Spline vonalzó

A spline az a segédeszköz, ami rugalmas fából, illetve az 1960-as évektől kezdve acélszálból készült (2. ábra). Két végén rögzített, közepén súlyokkal vagy kitámasztással terhelt. Ezt a vonalzót használták csónak- és hajóépítésben. A spline függvényeket akkoriban még nem tudták matematikailag leírni, de érzékelték, hogy az ívesre hajlított vonalzó a különböző görbületű íveket vagy görbét egyenessel, töréspont nélkül illeszti egymáshoz. A mai matematikai eszközök és ismeret már lehetővé teszi, hogy a spline függvényt egzaktul leírjuk és az informatika segítségével a számítástechnikával támogatott terméktervezésben alkalmazzuk. A számítógép már természetesen a függvény matematikai alkalmazásával rajzolja ki a görbét.



2. ábra A spline vonalzó (w2)
Figure 2 The spline ruler (w2)

A közegellenállás leküzdésében nagy szerepet játszanak a segítségével rajzolt görbék, ezért napjainkban a gépjárműgyártásban is széles körben alkalmazzák.

ISSN 2064-9231

A matematikai számításokban és eljárásokban, az informatikai programokban, tervezőrendszerekben, mérnöki feladatok és problémák megoldásaiban a spline ugyanazt a szerepet tölti be, mint a hajókészítők esetében. Meghatározott feltételek mellett alkalmasan illeszkedő, „szépen simuló", csatlakozó görbesereget ad eredményül.

3. ábra Citroën DS 21 Pallas
Figure 3 Citroën DS 21 Pallas

4. ábra 1961-62 Renault 3
Figure 4 Renault 3 1961-62

Modern kor

A spline matematikai újbóli felfedezése Lobacsevszkij nevéhez fűződik, aki egy speciális esetet vizsgált a XIX. század második felében. Az első név szerinti említés Schoenberg munkásságában (Schoenberg, 1988) jelenik meg, aki statisztikai adatok simítására használta a speciális másodfokú és harmadfokú spline-jait. Ő vezette be a „perfect spline" fogalmát, azaz azon *m*-ed fokú spline-ok osztályát, amelyek *m*-ed rendű deriváltja a +1 vagy –1 a csomópontokon („knots") és előjelet vált minden csomópontnál. Napjainkban is használt eljárás szélsőérték feladatok megoldásaiban („extrenal problems") (Schoenberg 1971).

A spline népszerűsége bő évtized elteltével ugrott meg igazán, az autóiparban két egymástól függetlenül dolgozó tervezőnek köszönhetően. Paul de Casteljau (matematikus, fizikus) a Citroën fejlesztőjeként és Pierre Bézier (mérnök) a Renault vezetőmérnökeként dolgozott ki egy, a sok alapponthoz illeszkedő grafikus eljárást. 1959-ben de Casteljau grafikus spline eljárást készített, mely napjainkban is a nevével fémjelzett és használt algoritmus (3. és 4. ábra) (Casteljau 1959).

Bézier a függvényanalízis eszközeivel, a kontrollpontok konvex kombinációjával, kívánság szerinti m-ed rendű görbét hozott létre. Eljárását már 1960-ban alkalmazták a tervezőasztalon, de a titkosítások miatt csak két év múlva jelenhetett meg tudományos folyóiratban.

A spline a jelenleg használt formáját, bázisfüggvényeit Carl R. de Boor matematikusnak köszönheti. De Boor az 1960-as években a General Motors-nál dolgozott, ahol találkozott de Casteljau és Bézier munkásságával. Felfedezte a két eljárás közötti rokoni kapcsolatot, és megalkotta a neves B-spline-okat. 1965-ben Garrett Birkhoff matematikussal (Harvard) közös cikkükben a „Picewise polynomial interpolation and approximation" címmel jelent meg (Birghoff és Boor 1965) a B-spline alap polinomok és azok Bernstein polinommal való leírása. 1966-tól kezdve olvashatunk önálló fogalomként használva, „spline"-os cikkeket.

A spline-ok típusai

Spline alatt szakaszosan polinomokkal leírt görbesereget vagy függvényt értünk. Az *m*-ed fokú spline-ban legfeljebb *m*-ed fokú polinomok csatlakoznak egymáshoz. Az esetek többségében nemcsak a folytonosságot írjuk elő, hanem akár az (m–1)-szeri folytonos differenciálhatóságot is. Gyakran használt típusai a szakaszonként elsőfokú (lineáris) és harmadfokú (köbös vagy kubikus) spline-ok. Ritkábban használatosak a másodfokú (kvadratikus) és ötödfokú spline-ok.

Mozgások vizsgálata esetén a spline fizikai értelmezése megfelel annak, hogy ne csak a pálya legyen folytonos, hanem a sebesség és gyorsulás értékei is folyamatosan változzanak. Mechanikai, statikai vizsgálatok esetén ugyanez mondható el a feszültségvizsgálatra, mérnöki-grafikus tervezéseknél a görbületváltozásra.

A célfeladatok megoldásai mellett leggyakrabban a számítógéppel segített tervezésben (CAD rendszerek) és a számítógépes grafikában használják. Pontossága, stabilitása és könnyű algoritmizálhatósága miatt bonyolult formákat is jól lehet közelíteni vele.

ISSN 2064-9231

A spline-okat a grafikus ábrázolás mellett interpolációra, approximációra és robusztus becslésekre is alkalmazzák. A szakaszonként illesztett kisebb fokszámú polinom sereg rugalmasabb módosíthatóságot tesz lehetővé, a kapott görbék és felületek meglehetősen simák.

Feladattól függően választhatunk globális vagy lokális változást figyelembe vevő spline-okat. Lényeges elem a módszer használatakor a peremfeltételek megadása. Tudnunk kell, hogy zárt görbéről vagy esetleg periódusos problémáról van-e szó. Nem záródó görbék esetén a fokszám és a folytonossági igények függvényében megfelelő zárási feltételeket kell választanunk.

A továbbiakban röviden bemutatjuk a spline-ok három leggyakrabban használt típusát. Először a klasszikus Bézier-görbéket, amelyek elsőként kerültek alkalmazásba, mint görbeapproximációk. Másodjára az interpolációs spline-okat tárgyaljuk, majd pedig érinteni fogjuk a statisztikai módszerek és spline-ok összefonódását.

Bézier-görbék

A görbeapproximációk a számítógépes grafika nagy fejezetét jelentik. Az approximációk alapfeladata, hogy adott pontokhoz legjobban közelítő görbét találjunk. A görbének nem kell feltétlenül átmennie a megadott pontokon, vagy olyan igény is felmerülhet, hogy a függvény ne érintse a megadott pontokat vagy a lehető legkevesebben menjen át.

A függvény approximációknál egy valódi függvény közelítését keressük, melynek csupán néhány pontját ismerjük. Általában a függvény azon értékeit keressük, melyeket pont nem ismerünk, vagy ismert pontok mérési pontossága nem ismert, illetve akár mindkét szempont figyelembe vétele is lehetséges. Minél több pontot ismerünk a függvényből, nyilvánvalóan annál pontosabb lesz az approximáció.

Az approximáció Bézier-görbékkel történő megvalósításánál feltételezzük, hogy ismert a P_0, P_1, …, P_n közelíteni kívánt $n+1$ darab pont és legyen $t \in [0,1]$. A kontrollpontokhoz közelítő görbét ekkor az

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_i^n(t) \qquad [1]$$

összefüggés adja meg, ahol a $B_i^n(t)$ függvények a Bernstein-polinomok:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \qquad [2]$$

A Bézier-görbe fő tulajdonságai:

- globálisan változtatható görbe. Ha lokálisan változtathatóvá kívánjuk tenni, akkor több csoportba kell bontanunk a kontrollpontokat és a csatlakozási feltételek ismeretében kisebb fokszámú görbékkel közelíthetünk. Ekkor a csoporton belül globálisan viselkedik egy kontrollpont megváltoztatása, de az összes pontra nézve lokális lesz a módosulás.
- $(n-1)$-szer differenciálható;
- a görbének $\overline{r}\,(0)$ a kezdő- és $\overline{r}\,(1)$ a végpontjában megadott érintői, melyek darabolás esetén a kapcsolódás miatt szükségesek

  $$\overline{r}\,(0) = n\overrightarrow{P_1P_0} \qquad \overline{r}\,(1) = n\overrightarrow{P_{n-1}P_n} \qquad [3]$$
- lineáris precizitással bír;
- affin invariáns, azaz a kontrollpontok affin transzformációja ugyanazt a görbét eredményezi, mint a görbe pontonkénti affin transzformációja;
- nem hagyja el a konvex burkát.

A Bézier-görbékkel kapcsolatban két fő probléma merül fel:

1. a pontok növelésével nő a fokszám, nő a számítási igény;
2. egyenes és „parabolaív" modellezhető vele, de nem tudunk kört vagy ellipszist rajzolni.

Egy lehetséges megoldás erre a racionális (súlyozott) Bézier-görbe használata.

A racionális Bézier-görbék további súlyokat adnak a függvényekhez abból a célból, hogy pontosabban közelítsék a kívánt alakot. A számláló súlyozott Bernstein formájú Bézier-görbe, a nevező pedig Bernstein-polinomok súlyozott összege. A racionális Bézier-görbék többek között kúpszelet szakaszok pontos megjelenítésére használhatók.

ISSN 2064-9231

A w súlyok megválasztásával van lehetőség szabályozni a görbének a kontrollpontoktól való távolságát vagy közelségét. Definíciója szerint:

$$\bar{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i P_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j B_j^n(t)} \quad [4]$$

A számításokban pozitív súlyokat szokás használni, elkerülve ezáltal a szingularitásokat.

Érdemes néhány gondolat erejéig megállni az n-ed fokú Bernstein-polinomok tulajdonságainál, mivel általa könnyebben megérthetjük a de Casteljau-algoritmust, ami a Bézier-görbe szerkesztésének lépéseit írja le a rajzasztalon.

A Bernstein-polinomok fő tulajdonságai:

- $B_i^n(t)$ egy n-ed fokú polinom;
- n-ed fokú polinomtér bázisát alkotják, sőt normál bázis, azaz

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) \equiv 1 \quad [5]$$

- minden $B_i^n(t)$ polinomnak van egy maximuma a $t = \frac{i}{n}$ helyen;
- n-ed fokú tag rekurzívan előállítható az *(n-1)*-ed fokú tagok komplex kombinációjával (5. ábra) (ez a legfontosabb a de Casteljau-algoritmus és a Bézier-görbék értelmezése között), azaz

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \quad [6]$$

A de Casteljau-féle szerkesztési eljárás rekurzív rajzolóalgoritmusát a

$$P_i^k(t) = (1-t)P_i^{k-1}(t) + tP_{i+1}^{k-1}(t) \quad [7]$$

összefüggés adja, ahol $t \in [0,1]$ mellett

- k a rekurzió lépésszámát mutatja (a k 1-től n-ig megy);
- a k rekurziós lépésben $i=1, \ldots, n-k$, valamint
- $P_j^0(t) = P_j$, minden $j=0,1, \ldots, n$ esetén.

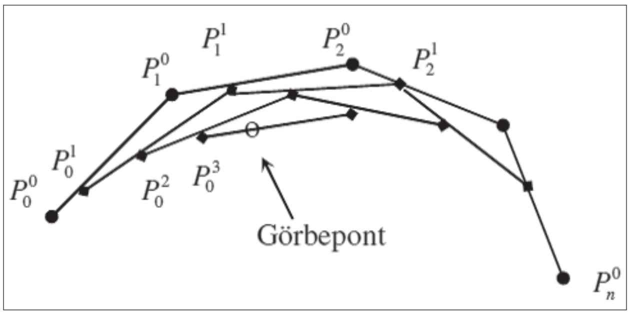
Interpolációs spline-ok

Az interpoláció egy olyan matematikai módszer, amely egy függvény nem ismert értékeire az ismert értékek alapján ad közelítést, vagy más néven becslést. Követelmény, hogy az ismert pontokra illeszkedjen az interpolációs görbe.

Legismertebb interpolációs eljárások a Lagrange-féle, a Newton-féle és a Hermite-féle interpoláció. A legnagyobb probléma velük, hogy csak kevés pontra és legfőképp alkalmasan megválasztott pontok esetén adnak elfogadható megoldást. Ha a függvényről $n+1$ adat ismert, amik lehetnek függvény értékek és adott pontbeli derivált értékek is, akkor egy legfeljebb n-ed fokú polinomot adnak megoldásul.

Az alapfeladat kívánalmait teljesítik a megoldások, de sok probléma adódik velük. Túl nagy a kilengésük már alacsony fokszám esetén is, a módszerek numerikusan instabilak, kis változtatás esetén már nagy eltérést mutat a két megoldás (6. ábra), rosszul kondicionáltak.

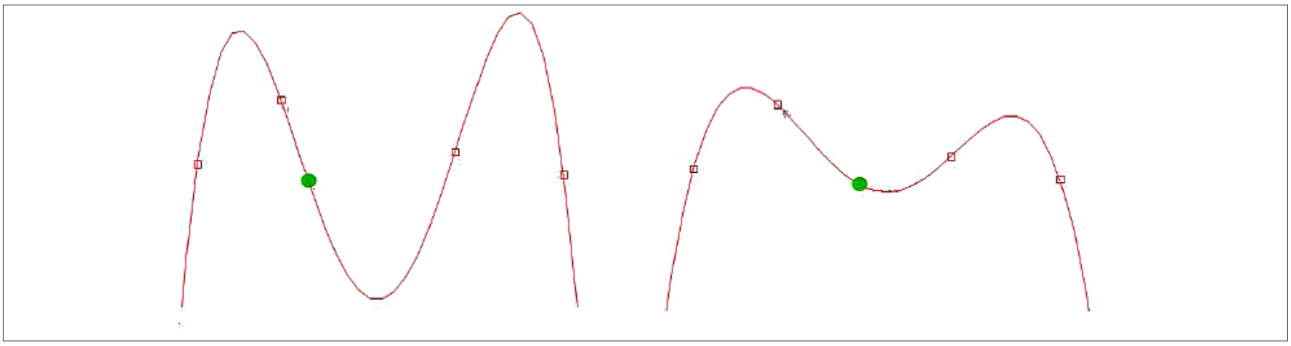
Egy lehetséges módszer a szakaszonkénti polinomiális interpoláció használata. Itt viszont gondot jelent a csatlakozási feltételek teljesítése. Gondot jelenthet akár magasabb fokszám választása esetén is a függvény első deriváltjának szakadása, azaz a görbén töréspontok keletkezhetnek. Ha fontos a számításban vagy tervezésben a folytonos differenciálhatóság, akkor általában a spline interpoláció használata válik szükségessé.



5. ábra Bézier-görbe szerkesztése de Casteljau-algoritmussal t=1/3 esetén

Figure 5 Construction of Bezier curve by using Casteljau method in case of t=1/3

ISSN 2064-9231



6. ábra Egyetlen pont megváltoztatásának hatása az interpolációs polinomra

Figure 6 The effect of changing one point on the interpolation polinom

A spline interpoláció alapja az, hogy az egész intervallumot részintervallumokra osztjuk, a részintervallumokban pedig alacsony fokszámú polinomokat használunk. A megfelelő eredmény érdekében még annak is teljesülnie kell, hogy az intervallumhatároknál a polinomok illesztése folyamatos legyen. Így több alacsony fokszámú polinomból összerakott függvényt keresünk úgy, hogy az adott pontokon való áthaladás megkövetelése mellett a polinomok a szomszédos intervallumok csatlakozási pontjaiban előírt differenciálhatósági feltételnek is eleget tegyenek.

A spline interpoláció további bemutatásához tételezzük fel, hogy a vizsgált és keresett *f(x)* függvényről adott [a, b] intervallum ismertek az

$$a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b \qquad [8]$$

felosztás mellett a $P_i = P(x_i, y_i)$ értékek, minden *i=0,1, …, n* esetén. Feltételezzük egyben azt is, hogy minden *i* esetén fennáll $y_i = f(x_i)$ összefüggés. A spline függvény legyen *S(x)*, ami az összes] részintervallumon értelmezett függvény darabokból áll, amelyeket $S_i(x)$-vel jelölünk. A spline függvényeknél szokásjog alapján illik megjelölni a fokszámot, ekkor az $S^m(x) \equiv S(x)$, ahol *m* jelöli a fokszámot. Értelemszerűen használt az $S_i^m(x) \equiv S_i(x)$ jelölés is.

Néhány speciális esetben (pl. nagy tűréshatár mellett) használjuk a lineáris spline-okat, ami tulajdonképpen a megadott pontokat adott sorrendben törött vonallal köti össze. A bázisfüggvényei (az ún. kalapfüggvények) nagyon egyszerűen felírhatók:

$$u_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} x_0, \quad u_n(x) = \frac{x - x_n}{x_n - x_{n-1}} x_{n-1} \qquad [9]$$

$$u_i(x) = \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}} x_{i-1} + \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} x_i \qquad [10]$$

minden *i=1, …, n-1* esetén,

Ekkor a lineáris spline függvény („dongafüggvény”)

$$S^1(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, u_i(x) \qquad [11]$$

alakban írható fel.

Leggyakrabban a köbös spline-okat használják. A görbék simán, szépen illeszkednek.

Kívánalmak a köbös spline-nal szemben:

- *S(x)* haladjon át a megadott pontokon, azaz $S(x_i) = y_i$. Ezzel egyidejűleg teljesül a folytonosság feltétele is, azaz $S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i)$
- törésmentes legyen, azaz folytonosan differenciálható, tehát
  $$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i) \qquad [12]$$
- folytonos legyen a görbülete, vagyis $S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i)$;
- nem utolsó sorban eleget tesz a
  $$\int_{x_0}^{x_n} (g''(x))^2 dx \to min \qquad [13]$$

ISSN 2064-9231

variációs feladatnak, ami jó közelítéssel az összgörbület minimumának keresésével egyenértékű, vagyis a legsimább görbét adja. A variációs feladatban *g(x)* függvény jelöli az *f(x)* függvény interpolációs függvényeit, a variációs feladat pedig ezen függvények közül a minimum keresésre vonatkozó legjobb *g(x)* függvény keresésével foglalkozik, ami esetünkben az $S^3(x)$ spline-t adja (természetes peremfeltétel esetén).

Az egyértelmű megoldáshoz szükség van még két egyenletre, amiket a peremfeltételek valamelyikéből kaphatunk meg. Ezek közül a nevesebbek:

– természetes: $S''_1(a) = S''_n(b) = 0$ [14]

– Hermite (*clamped*): $S'_1(a) = f'(a)$ és $S'_n(b) = f'(b)$ [15]

– periodikus: $S'_1(a) = S'_n(b)$ és $S''_1(a) = S''_n(b)$ [16]

B-spline-ok, NURBS, T-spline

Az előzőekben már említést nyert a racionális Bézier-görbe, ami képes megoldani kúpszeletek approximációját. Az informatika fejlődésével minél gyorsabban szeretnénk eredményeket kapni és produkálni. Lényegessé vált a gyorsaság mellett, hogy könnyen algoritmizálható, jól kondicionált, stabil módszerek kerüljenek kidolgozásra.

Az első nagy lépést Cox és de Boor matematikusokról elnevezett módszer adta. De Boor javasolt egy algoritmust arra, hogy B-spline görbe pontot állítsunk elő rekurzívan, lineáris műveletek segítségével, ezzel kikerülve a rosszul kondicionáltságot. Alapját a de Casteljau elve adja, de a Bernstein-polinomok helyett a normalizált B-spline alapfüggvényeket használják. A *k*-ad fokú B-spline görbe definíciója

$$\bar{r}(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i\, N_i^k(u) \qquad [17]$$

alakra módosul, ahol P_i -k továbbra is a kontrollpontokat jelentik. A B-spline függvények felírásához meg kell választanunk a spline rendjét az $1 \le k \le n$ feltétel mellett, ami *(k-1)*-ed fokú közelítést jelent, illetve meg kell adnunk az $\mathrm{u}_0 \le \mathrm{u}_1 \le \cdots \le \mathrm{u}_n = \mathrm{u}_{n+1} = \cdots = \mathrm{u}_{n+k+1}$ csomóértékeket (*knots value*). A normalizált B-spline alapfüggvények definíció szerint

$$N_i^1(u) = \begin{cases} 1, & \text{ha } u_i\ u < u_{i+1} \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$N_i^j(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+j-1}-u_i} N_i^{j-1}(u) + \frac{u_{i+j}-u}{u_{i+j}-u_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(u) \qquad [18]$$

ahol:

j=2, … k,

alakúak (0-val történő osztás esetén 0-nak kell venni az érintett tagot).

A B-spline görbe tulajdonságai:

– lokálisan változtatható, azaz a P_i kontrollpontnak csak az $[\mathrm{u}_i, \mathrm{u}_{i+k}]$ részintervallumra van hatása;
– a B-spline görbe (szemben a Bézier-görbével) tartalmazhat egyenes szakaszt akkor is, ha nem minden kontrollpontja kollineáris;
– egy *(k-1)*-ed fokú B-spline görbe bármely pontja a görbe legfeljebb *k* darab kontrollpontjának konvex burkában van. Ez a konvex burok tulajdonság jóval szigorúbb, mint a Bézier-görbe esetén, mivel itt a görbe a konvex burkok uniójában halad;
– affin variáns;
– a görbe legalább annyiszor metsz egy hipersíkot (2D-ben egyenest), mint a hipersík a kontrollpoligont (variation-diminishing property).

A jelenlegi tervezési rendszerekben a nem uniform racionális B-spline görbék, amelynek szokásos rövidítése NURBS (nonuniform rational B-spline), biztosítják a legtöbb szabadságot, és a legtöbb alakváltoztatási lehetőséget a tervezők számára. A fent említettek alapján teljesen analóg módon megadhatjuk a racionális Bézier-görbéhez hasonlóan a racionális B-spline görbét is, melynek alakja

$$\bar{r}(u) = s(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i P_i N_i^k(u)}{\sum_{j=0}^{n} w_j\, N_j^k(u)} \qquad [19]$$

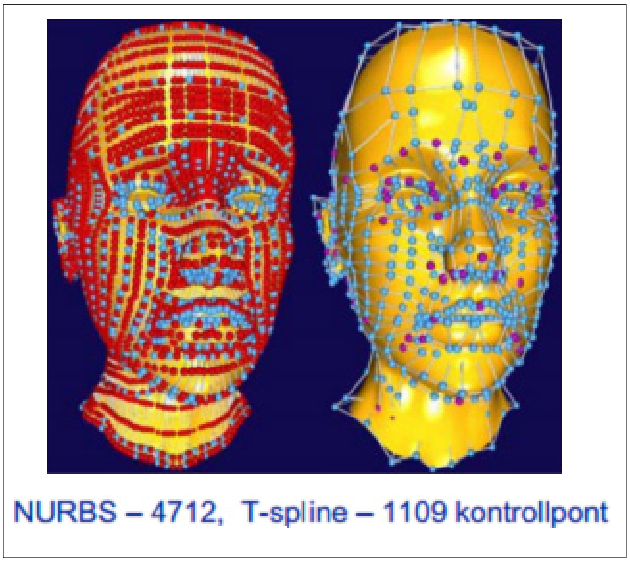
ISSN 2064-9231

A w_i súlyokat a szingularitások elkerülése végett pozitívnak szokták választani, mivel ebben az esetben nem csak a nem racionális B-spline görbék kedvező tulajdonságait tartja meg (lokalitás, konvex burok, folytonosan differenciálhatóság), hanem még újabb alakváltoztatási lehetőséghez is jutunk. A racionális Bézier-görbéhez hasonlóan a w_i súlyokat alakparamétereknek nevezzük.

Kétdimenziós feladatok (felületek meghatározása) esetén feltételezzük, hogy adott koordinátarendszerben a vizsgált téglalap rácson ismertek a P_{ij} kontrollpontok, illetve az u és v koordináták szerinti csomóérték. Ekkor a B-spline felületet, vagy más néven tenzor szorzattal előállított B-spline felületet a

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{ij} N_i^{k_1}(u) N_j^{k_2}(v) \qquad [20]$$

képlet adja. Természetesen itt is értelmezzük a racionális esetet, illetve a NURBS felületeket.



7. ábra NURBS és T-spline kontrollpontjainak összehasonlítása (David et al 2004)

Figure 7 Comparison of T-spline and NURBS control points (David et al 2004)

A legújabb irány a spline-ok történetében a T-spline. A NURBS felületekhez képest ez annyi változást jelent, hogy optimalizálva van a rácspontok száma. A T-spline nem más, mint hiányos rács struktúrán lefuttatott NURBS-nak megfelelő algoritmus, melyen T-elágazások keletkeznek.

Összefoglalás

A kezdetleges spline vonalzó ötletéből kiindulva napjainkra külön tudományos részterületté nőtt a matematikán belül a spline-ok elmélete. Könnyű algoritmizálhatósága ellenére sokáig nem tudták alkalmazni, mivel nagy mennyiségű számítást igényel. A számítástechnika utóbbi évtizedekben történő robbanásszerű fejlődésével lehetőség nyílt a Bézier-görbék programozásától eljutni a jelenlegi legmodernebb eljárások (NURBS, T-spline) programozásáig, amelyek a hardverek fejlődésének köszönhetően gyors számítást eredményeznek. Megjósolhatatlan, hogy holnap hol találkozunk egy újabb variációval, mivel a spline-ok a tudomány egy nagyon dinamikus területét jelentik.

Köszönetnyilvánítás

Ez a tanulmány a Környezettudatos energia hatékony épület című TÁMOP-4.2.2.A–11/1/KONV-2012-0068 számú projekt keretében, az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Irodalomjegyzék

Birkhoff G., Boor C. (1965) Piecewise polynomial interpolation and approximation. In: H. Garabedian szerk. Approximation of Functions. Elsevier, New York, 164–190. old.

Schoenberg I. J. (1988) Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part A: On the problem of smoothing of graduation, a first class of analytic approximation formulae, Quart Appl. Math. 4., 45-99.

Schoenberg I. J. (1971) The perfect B-splines and a time optimal control problem, Israel J. Math.10., 261-274.

David L. Cardon D. L., Finnigan G. T., North N. S., Sederberg T. W. (2004) T-spline Simplification and Local Refinement, Brigham Young University, BYU ScholarsArchive, pp. 2., http://dx.doi.org/10.1145/1015706.1015715

Casteljau de P. (1959) Courbes à pôles, (Pole görbék) INPI

(w1) http://vilagutazo.blog.hu/2011/08/14/a_vasa_sved_kiralyi_hadihajo_tortenete

(w2) http://grafit.netpositive.hu/?p=2520