

É R T E S I T Ő

AZ ERDÉLYI MÚZEUM-EGYLET

ORVOS-TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAKOSZTÁLYÁBÓL.

II. TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAK.

XIX. kötet.

1897.

II—III. füzet.

Az általános és négy különös Pascal-hatszög configurációja.

Dr. Klug Lipót kolozsvári tud.-egyetemi magántanártól.

Előszó.

E sorok czélja teljes és könnyen áttekinthető képet nyújtani a PASCAL-hatszöggel kapcsolatos configurációkról és így annak tanulmányozását előmozdítani, újabb kutatásokra serkenteni.

Tudomásom szerint az utolsó nagy értekezés tárgyunkról VERONESE-től származik e czímen: »Nuovi teoremi sull' hexagrammum mysticum«, Reale Accademia dei Lincei, anno CCXXIV. (1876—1877). Értekezése felöleli a különböző folyóiratokban, akadémiái értekezésekben és tankönyvekben e tárgyra vonatkozó tananyagot, de legnagyobb része egészen új vizsgálatokat tartalmaz. Azonban a tőle használt jelölés nem elég áttekinthető, úgy hogy művének tanulmányozása nem kis fáradsággal jár.

Jelen értekezésemben a syntheticus geometria kárára korán elhunyt SCHRÖTER tanárnak a »Theorie der Kegelschnitte« czímű művében használt jelölést alkalmaztam, de a kis-betűket nagy-betűkkel cseréltem fel.

Ez a jelölés a configurációt áttekinthetőbbé és azt is lehetővé teszi, hogy az itt előforduló nagyszámú pontot és egyenest tetszésünk szerint kezelhessük.

Értekezésem azonban új dolgokat is tartalmaz, melyek VERONESE értekezésében nincsenek meg.

Először is a VERONESE-től Y-nal jelölt négyoldalakat, de különösen az y-nal jelölt négyszögeket vizsgáltam meg részletesen különös helyzetükre nézve.

Egészen újaknak tekintendők azok az $i[Vv]$ configurációk, melyek a VERONESE $[Vv]_i$ configurációival (ő $[Zz]_i$ -vel jelölte) bizonyos tekintetben *dualisan* állíthatók szembe.

Újak egyszersmind a tizenöt D háromszögről szóló vizsgálatok, mely D háromszögek a VERONESE Δ háromszögeinek dualisan felelnek meg.

Az általános PASCAL-hatszög képezte konfigurációnak tárgyalását még kiegészítettem négy *különös* PASCAL-hatszög helyzeti viszonyának megvizsgálásával. E hatszögeknél egyszer négy, kétszer négy, háromszor négy és egyszer három, végre háromszor négy és egyszer hat PASCAL-egyenes és ugyanannyi KIRKMAN pont egy-egy egyenessé, illetve ponttá egyesül.

Úgy tudom, hogy e különös hatszögek felismerése és reájuk vonatkozó vizsgálataim is egészen újak.

Kolozsvárt, 1897 júl. 27-én.

A SZERZŐ.

TARTALOMJEGYZÉK.

| Előszó. | Lap. |
|--|------|
| I. Az általános Pascal-hatszögről. Bevezetés | 103 |
| 1. PASCAL tétele | 107 |
| 2. A STEINER-ellenpontokról | 109 |
| 3. A KIRKMAN-pontokról | 116 |
| 4. A PASCAL-egyenesekből és KIRKMAN-pontokból álló DESARGUES- configurációk | 117 |
| 5. A CAYLEY-egyenesekről | 120 |
| 6. A STEINER-egyenesekről | 125 |
| 7. A SALMON-pontokról | 130 |
| 8. A DESARGUES- és HESSE-configurációk kölcsönös helyzete | 134 |
| 9. A VERONESE-pontok és két DESARGUES-configuratio kölcsönös helyzete | 137 |
| 10. Az Y-négyszögekről | 144 |
| 11. Az y-négyszögekről | 152 |
| 12. A v_1 VERONESE-egyenesekről | 165 |
| 13. A PASCAL-egyenések nincsenek correlációs vonatkozásban a KIRKMAN- és V_1 -pontokkal és nincsenek collinearitás vonatkozásban a v_1 - egyeneseikkel | 169 |
| 14. A $oV, {}_1V$ pontokról és a $oV, {}_1V$ egyenesekről | 174 |
| 15. A v_i VERONESE-egyenesekről és a V_i VERONESE-pontokról | 191 |
| 16. A iV pontokról és a iV egyenesekről | 203 |
| 17. Általános tételek a PASCAL-hatszöggel kapcsolatos konfigurációról | 206 |
| 18. Nehány, a konfigurációval kapcsolatos involutiós helyzetű pontokról és sugárról | 210 |

| | |
|--|-----|
| II. Négy különös Pascal-hatszögről..... | 214 |
| 1. Oly PASCAL-hatszögről, melynek szögpontjai involutiót képeznek | 214 |
| 2. Oly PASCAL-hatszögről, melynek szögpontjai kétféleképp képeznek involutiót..... | 217 |
| 3. Oly PASCAL-hatszögről, melynek szögpontjai háromféleképp képeznek involutiót..... | 221 |
| 4. Oly PASCAL-hatszögről, melynek szögpontjai négyféleképp képeznek involutiót..... | 224 |

I. AZ ÁLTALÁNOS PASCAL-HATSZÖGRŐL.

Bevezetés.

A PASCAL-hatszöggel kapcsolatos configurációkkal számos kiváló geometer foglalkozott e században. STEINER¹ volt az első, a ki ama hatvan PASCAL-*egyenes* helyzetét megvizsgálta, a melyeket a teljes PASCAL-hatszögből származó hatvan egyszerű PASCAL-hatszög nyújt, és azt találta, hogy: a teljes PASCAL-hatszög hatvan PASCAL-egyenes egymást harmasával husz pontban, az úgynevezett husz STEINER-pontban metszi.

PLÜCKER² kimutatta, hogy a husz STEINER-pont négyesével tizenöt egyenesen, úgynevezett STEINER-*egyenesen* fekszik.

A husz STEINER-pont és tizenöt STEINER-egyenes HESSE³ szerint egy (15₄, 20₈) configuratio, vagyis olyan configuratio, a melyet három, páronként ugyanegy középpontra perspectivás helyzetű háromszög a szögpontokat vetítő három sugárral és a három collineation tengelyvel együtt képez.

HESSE,⁴ GROSMAN⁵, STAUDT⁶ és BAUER⁷ különböző úton bebi-

¹ Annales de Gergonne, T. XVIII, 1828. és »Systematische Entwicklung etc.« 311. lap.

² »Ueber ein neues Princip der Geometrie«. CRELLE's Journal, Bd. V. P. 275.

³ »Eine Bemerkung zum PASCAL'schen Theorem«. CRELLE's Journal, Bd. XLI. P. 269.

⁴ »Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid«. CRELLE's Journal, Bd. XXIV, p. 40.

⁵ »Ueber eine neue Eigenschaft der STEINER'schen Gegenpunkte«. CRELLE's Journal, Bd. LVIII, p. 174.

⁶ »Ueber die STEINER'schen Gegenpunkte etc.« CRELLE's Journal, Bd. LXII, p. 142.

⁷ »Ueber das PASCAL'sche Theorem«. Abhandl. der k. bayer. Akad. d. W. Bd. XI, 3. Abth. 1874.

zonyították, hogy a húsz STEINER-pont tíz pár *kapcsolt polus* arra a kúpszeletre vonatkozólag, a mely a PASCAL-hatszög körül írható. E tíz pontpárt HESSE elnevezte STEINER-ellenpontok-nak.

Az eddigelé említett német geometerek vizsgálatait KIRKMAN, CAYLEY és SALMON angol tudósok újabb tételekkel egészítették ki, melyek olyanoknak tünnek fel, mintha az előbbiekből a *dualitás elve* szerint következnének. KIRKMAN ugyanis azt találta, hogy a hatvan PASCAL-egyenes egymást a húsz STEINER-ponton kívül még hatvan pontban, úgynevezett KIRKMAN-pontban, metszi. CAYLEY¹ kimutatta, hogy e hatvan KIRKMAN-pont hármásával húsz egyenesen, a húsz CAYLEY-egyenesen, lekszik; s végre SALMON² bebizonyította, hogy a húsz CAYLEY-egyenes négyesével tizenöt ponton megy keresztül, melyeket jelenleg SALMON-pontoknak neveznek. A húsz CAYLEY-egyenes és a tizenöt SALMON-pont egy $(20_3, 15_4)$ configuratio, mely dualis alakzata a $(15_4, 20_3)$ configuratiónak, s melyet három, páronként ugyanarra a collineatio-tengelyre perspectivás háromszög képez.

Ámde a KIRKMAN-pontok, CAYLEY-egyenesek és SALMON-pontok nem polaris-reciprocus alakzatai a PASCAL-egyeneseknek, STEINER-pontoknak és STEINER-egyeneseknek a PASCAL-hatszög körül irt kúpszeletre vonatkozólag, sem egy más kúpszeletre vonatkozólag, a mint azt HESSE³ gondolta. Sőt kimutatható, hogy a KIRKMAN-pontok és PASCAL-egyenesek még az általános reciprocus vonatkozás, a correlatio esetében sem lehetnek egymásnak megfelelők, mint SCHRÖTER⁴ gyanítá; mert kimutatható, hogy négy, egymást egy pontban (PASCAL-pontban) metsző PASCAL-egyeneshez oly négy KIRKMAN-pont tartozik, a mely nem fekszik ugyanegy egyenesben.

A teljes PASCAL-hatszögnek eddig említett tulajdonságai még mindig nem nyújtanak áttekinthető képet a PASCAL-egyenesek és KIRKMAN-pontok kölcsönös helyzetéről, mert a configuratiónak csak igen kis részéről szerzünk tudomást, ha azt látjuk, hogy három

¹ »Sur quelques théorèmes de la geometrie de position«. CRELLE's Journal, Bd. XXXI. und XXXIV.

² SALMON-FIEDLER, Analytische Geometrie der Ebene.

³ »Ueber die Reciprocität der PASCAL-STEINER'schen und KIRKMAN-CAYLEY-SALMON'schen Sätze etc.« CRELLE's Journal, Bd. LXVIII, p. 193.

⁴ Theorie der Kegelschnitte. 1876. 218. lap.

PASCAL-egyenes egy STEINER-ponton megy keresztül, és három KIRKMAN-pont egy CAYLEY-egyenesen fekszik. Ámde BAUER¹ kimutatta, hogy »tíz PASCAL-egyenes és tíz hozzájuk tartozó KIRKMAN-pont egy DESARGUES-*configuratiót* ($10_3, 10_3$) képez, és hogy a hatvan PASCAL-egyenes és hatvan KIRKMAN-pont hat ily DESARGUES-*configurációra* bomlik«. E hat DESARGUES-*configuratio* pedig következő módon csatlakozik a STEINER-pontokból és egyenesekből, valamint a CAYLEY-egyenesekből és SALMON-pontokból képezett HESSE-*configurációkhoz*, a $H = (15_4, 20_3)$ és $H' = (20_3, 15_4)$ -hez: »A H *configuratio* felbomlik hat teljes ötoldalra, melynek oldalai és szögpontjai STEINER-egyenesek és STEINER-pontok; hasonlóképp a H' *configuratio* felbomlik hat teljes ötszögre, melynek szögpontjai és oldalai SALMON-pontok és CAYLEY-egyenesek. A PASCAL-egyenesekből és KIRKMAN-pontokból álló hat DESARGUES-*configuratio* mindenike amaz ötoldalak egyike körül és amaz ötszögek egyikébe van beírva«.

VERONESE² végtelen sok oly *configuratiót* $[Vv]_i$ talált, mint a PASCAL-egyenesekből és KIRKMAN-pontokból álló, melyeknek mindenike hatvan v_i egyenest és hatvan V_i pontot tartalmaz. Mindezen *configurációkban* a V_i -pontok hármásával a CAYLEY-egyeneseken fekszenek, és a v_i -egyenesek hármásával a STEINER-pontokon mennek keresztül, s végre mindenike e $[Vv]_i$ -*configurációknak* hat DESARGUES-*configurációra* bomlik.

A $[Vv]_i$ -*configurációk* azonban abban különböznek a PASCAL-egyenesek és KIRKMAN-pontok képezte *configurációtól*, hogy az utóbbiakban a hatvan PASCAL-egyenes egymást négyesével negyvenöt pontban (G-vel jelölendő PASCAL-pontokban) metszik, holott a $[Vv]_i$ -*configurációk* v_i -egyenesei ezt nem teszik.

A végtelen sok $[Vv]_i$ -*configuráció*n kívül van azonban még más végtelen sok, melyeket ${}_i[Vv]$ -vel jelölök és melyeket tudtommal még eddig nem vizsgáltak. A ${}_i[Vv]$ -*configurációk* szintén hatvan ${}_iV$ pontból és hatvan ${}_iV$ egyenesből állanak, melyek hármásával a CAYLEY-egyeneseken fekszenek, illetve a STEINER-pontokon mennek keresztül, és ugyancsak mind hat DESARGUES-*configurációra* bomlanak.

¹ Lásd a 103. old. 7. jegyzetét.

² Nuovi teoremi sull' Hexagrammum mysticum. Reale Accademia dei Lincei, vol. CCLXXIV. (1876—77.)

E konfigurációk elsejének, t. i. ${}_0[Vv]$ -nek az a tulajdonsága, hogy a PASCAL-egyenesekből és KIRKMAN-pontokból álló konfigurációval bizonyos tekintetben dualisan szemben állítható. Ugyanis a hatvan ${}_0V$ -pont itt négyesével negyvenöt egyenesen, ${}_0g$ egyenesen, fekszik úgy, a mint a hatvan PASCAL-egyenes egymást négyesével a negyvenöt G pontban metszi.

A negyvenöt ${}_0g$ egyenes tizenöt D háromszögnek oldala, melyeknek csak tizenöt szögpontjuk van úgy, a mint a negyvenöt G pont tizenöt Δ háromszögnek szögpontja, a melyeknek csak tizenöt oldaluk van; az utóbbiak egyszersmind a teljes PASCAL-hatszögnek tizenöt oldala.

A tizenöt D háromszög a tizenöt Δ háromszöggel a SALMON-pontokra és a STEINER-egyenesekre, mint collineatio-középpontra és tengelyre, perspectivás; a megfelelő oldalpárok egymást negyvenöt Y pontban metszik, és a megfelelő szögpontpárok összekötő egyenesi negyvenöt y egyenest adnak.

Már VERONESE észrevette, hogy a mondott Y pontok és y egyenesek a $[Vv]_j$ -konfigurációkkal szorosan összefüggnek, a mennyiben mindenik Y -ponton két egyenes megy keresztül, a melyen két V_{2i} és két V_{2i+1} fekszik, és mindenik y egyenesen két oly pont van, a melyekben két v_{2i+1} és két v_{2i+2} egyenes egymást metszi.

Ugyanez mondható egyszersmind a ${}_j[Vv]$ -konfigurációk pontjairól és egyenseiről is, t. i.: két ${}_{2i+1}V$ és két ${}_{2i+2}V$ pont mindig ugyanegy egyenesben fekszik egy Y ponttal, és két ${}_{2i}v$, valamint két ${}_{2i+1}v$ egyenes egy y egyenesen találkozik.

A következőkben szándékunk a PASCAL-hatszöggel kapcsolatos konfigurációnak itt tömören előadott tulajdonságait kimutatni és a nyert tételeket négy nevezetes *különös PASCAL-hatszögre* alkalmazni.

Az. utóbbi hatszögek szögpontjai a kúpszeleten egy-, két-, három- vagy négyfélekep képeznek involutiót. Látni fogjuk, hogy ezekhez az involutiókhoz tartozó involutio-tengelyek és középpontok mindig többszörös PASCAL-egyenesek és KIRKMAN-pontok; továbbá, hogy azok a $[Vv]_j$, ${}_j[Vv]$ konfigurációkban is többszörös egyenesek és pontok lesznek.

1. Pascal tétele.

1. PASCAL műveiben¹ olvasható a következő tétel:

»Ha két, egy kör síkjában fekvő pontból M és S-ből szelőket húzunk a körhez, melyek azt a K, P, illetve a Q, V pontokban metszik, és ha az MV, SK egyeneseknek második metszéspontjai a körrel az O, N pontok, akkor a PQ, NO, MS egyenesek ugyanegy ponton mennek keresztül. A tétel akkor is igaz marad, ha a kört egy kúpszelettel helyettesítjük«. (5. ábra.)

PASCAL-nak e híres tételét jelenleg a következőképp szokás kifejezni:

Egy kúpszeletbe írt hatszög szemben fekvő oldalai egymást három, ugyanegy egyenesen fekvő pontban metszik.

A kúpszeletbe írt hatszöget PASCAL-hatszögnek, azt az egyenest, a melyben a hatszög szemben fekvő oldalai egymást metszik, PASCAL-egyenesnek nevezik. Azokat a pontokat, melyben a kúpszeletbe írt hatszög szemben fekvő oldalai egymást metszik, VERONESEVEL PASCAL-pontok-nak fogjuk nevezni.

A tételt, melynek bizonyítása PASCAL műveiben nem található, STEINER szerint legegyszerűbben bizonyíthatjuk be, ha a kúpszeletet két általános helyzetű projectiós sugársor képződményének tekintjük. Ha a kúpszeletbe írt hatszög szögpontjait ABCDEF betűkkel (2. ábra), az AB, DE; BC, EF; CD, FA; ED, AF; CD, EF egyenes-párok metszéspontjait L, M, N, I, K₁-gyel jelöljük, akkor

$$\begin{aligned} C(EFDB) \cap A(EFDB)\text{-ből} \\ (EFK_1 M) \cap (EIDL). \end{aligned}$$

Mint hogy az EF, ED egyeneseken fekvő projectiós pontsorok

$$EFK_1 M \dots, EIDL \dots$$

perspectivás helyzetűek, mert E-ben megfelelőleg közös pontjuk van, az FI, K₁D, ML egyenesek, vagy a mi ugyanazt fejezi ki, az FA, CD, ML egyenesek egymást egy pontban metszik. Mint hogy azonban FA, CD a hatszögnek két szembe fekvő oldala, az M, L pontok pedig a BC, EF; AB, DE szemben fekvő oldalaknak metszéspontjai,

¹ Essai sur les coniques. — Oeuvres complètes. (1640.)

következik, hogy az ABCDEF hatszögnek szemben fekvő oldalai egymást egy egyenesen fekvő pontokban metszik.

A tétel meg is fordítható, t. i.: Ha egy hatszög szemben fekvő oldalainak metszéspontjai egy egyenesben fekszenek, akkor annak szögpontjai egy kúpszeletnek (vagy egy egyenespárnak) pontjai, mert közülök négy szögpont a másik kettőből projectiós sugarakkal projectálható.

Ugyanis az előbbi jelölést megtartva, ha

$$(EFK_1 M) \sphericalangle (EIDL),$$

akkor egyszerismind

$$C(EFDB) \sphericalangle A(EFDB).$$

2. Ha az ABCDEF teljes PASCAL-hatszög alább felsorolt oldalainak metszéspontjait következőkép jelöljük:

$$\begin{aligned} (BC, ED) &= I_2, & (BC, AF) &= I_1, \\ (AB, FE) &= K_2, & (AB, CD) &= K, \end{aligned}$$

akkor látható, hogy az

$$II_1 I_2, KK_1 K_2$$

háromszögek perspectivásak, mert megfelelő oldalainak $II_1, KK_1; I_1 I_2, K_1 K_2; I_2 I, K_2 K$ metszéspontjai N, M, L, egy egyenesen fekszenek. Minthogy a meg nem felelő oldalnak metszéspontjai az ABCDEF pontok, mondhatjuk: Ha két háromszög akkép van egymásra vonatkoztatva, hogy az egyik háromszög oldalainak a másik háromszögnek bizonyos oldalai teelnek meg és ha a meg nem felelő oldalak metszéspontjai egy kúpszeleten fekszenek, akkor a háromszögek perspectivásak, és így a megfelelő oldalaknak metszéspontjai egy egyenesen lesznek és fordítva:

Ha két háromszög perspectivás, akkor a meg nem felelő oldalak metszéspontjai kúpszeleten fekszenek.

| | |
|--|--|
| | szögpontokat összekötő egyenesek egy kúpszeletnek érintői. |
|--|--|

3. Hat általános helyzetű pont egy síkban hat szögpontja egy teljes hatszögnek, mely hatvan egyszerű hatszögre osztható fel. Ha ezen egyszerű hatszögek közül egynek szemben fekvő oldalai egymást egy egyenes pontjaiban metszik, akkor ama hatszögnek szögpontjai

egy kúpszeleten fekszenek és így a többi 59 egyszerű hatszögnek szemben fekvő oldalai egymást szintén egy-egy egyenesen metszik.

STEINER volt az első, a ki *a teljes PASCAL-hatszögből származó hatvan egyszerű PASCAL-hatszög PASCAL-egyenesei helyzeti viszonyának megállapítását tűzte ki vizsgálatá tárgyául.*

2. A Steiner-ellenpontokról.

4. Jelöljük SCHRÖTER¹ szerint egy PASCAL-hatszögnek szögpontjait 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekkel (1. ábra). Az 1 2 3 4 5 6 egyszerű hatszögnek szemben fekvő oldalai

$$12, 45; 23, 56; 34, 61$$

egymást egy PASCAL-egyenesben metszik, melyet mi p^{II} -vel, vagy 1 2 3 4 5 6-tal (tehát

$$p^{\text{II}} = 123456$$

-tal) jelölünk.

Ama 1 2 3 4 5 6 hatszögnek egymásra nem következő oldalai 1 2, 3 4, 5 6; és 2 3, 4 5, 6 1; valamint főátlói 1 4, 2 5, 3 6, három háromszögnek oldalait képezik, melyek ugyanegy collineatio-középpontra perspectivásak.

Ugyanis az

$$\begin{array}{ccc} 12 & 34 & 56 \\ 45 & 61 & 23 \\ 36 & 25 & 14 \end{array}$$

háromszögek közül a két első perspectivás, minthogy megfelelő oldalainak metszéspontjai a $p^{\text{II}} = 123456$ PASCAL-egyenesen fekszenek, és a megfelelő szögpontoknak összekötő egyenesei

$$\pi^{\text{IV}} = (12, 34) (45, 61)$$

$$\pi^{\text{V}} = (12, 56) (45, 23)$$

$$\pi^{\text{VI}} = (34, 56) (61, 23)$$

egymást a II collineatio-középpontban metszik.

Ámde

az 1 6 3 4 5 2 PASCAL-hatszög miatt (5 2, 3 6) pont a π^{IV} egyenesen fekszik,

az 1 2 3 6 5 4 » » (3 6, 1 4) pont a π^{V} » »

az 1 4 3 2 5 6 » » (1 4, 2 5) pont a π^{VI} » »

¹ L. a 104. oldalon id. m. 133. oldalát.

és így a harmadik háromszög a két első iránt szintén perspectívás. A származó két új collineatio-tengely $p^{III} = 1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2$, $p^I = 1\ 6\ 3\ 2\ 5\ 4$, a p^{II} collineatio-tengelyt egy P pontban metszi.

Megjegyezhető még, hogy az

$$\begin{array}{ccc} 1\ 2 & 4\ 5 & 3\ 6 \\ 5\ 6 & 2\ 3 & 1\ 4 \\ 3\ 4 & 6\ 1 & 5\ 2 \end{array}$$

háromszögek szintén perspectívásak, még pedig a P collineatio-középpontra; a collineatio-tengelyek a π^{IV} , π^V , π^{VI} egyenesek, és a szögpontokat projiciáló sugarak a p^I , p^{II} , p^{III} egyenesek.

E szerint mondhatjuk:

»Ha egy PASCAL-hatszög szögpontjai 1, 2, 3, 4, 5, 6, akkor az

$$\begin{array}{cccccc} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2 \\ 1\ 6\ 3\ 2\ 5\ 4 \end{array}$$

és az

$$\begin{array}{cccccc} 1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4 \\ 1\ 6\ 3\ 4\ 5\ 2 \\ 1\ 4\ 3\ 2\ 5\ 6 \end{array}$$

egyszerű PASCAL-hatszögeknek PASCAL-egyenesei egy P, illetve egy II pontban metszik egymást«.

E két P és II pontot együttesen egy pár STEINER-ellenpontnak vagy egy STEINER-ellenpontpárnak, külön-külön pedig STEINER-pontnak nevezik.

Ha szemügyre vesszük az előbbi hat PASCAL-hatszöget, azt látjuk, hogy a páratlan helyen álló szögpontok 1, 3, 5, mind a hat hatszögnél ugyanazok; ellenben a páros helyen levő szögpontok 2, 4, 6, az első csoportnál előrehaladólag, a másodiknál visszafelé haladólag vannak cyclicusan felcserélve. Ugyancsak ezeket a hatszögeket nyerjük akkor is még, ha a páros helyen levő szögpontokat hagyjuk változatlanul, és a páratlan helyen levőket cseréljük fel előre- és visszafelé haladólag cyclicusan.

Mínthogy hat elemből három elemet húszféleképp lehet kiválasztani: egy teljes PASCAL-hatszögből tíz pár STEINER-ellenpont származtatható le, vagyis:

Egy teljes PASCAL-hatszög hatvan PASCAL-egyenesé egymást hármasával húsz STEINER-pontban metszi, mely tíz pár STEINER-ellenpontot képez.

5. *Egy pár STEINER-ellenpont kapcsolt poluspár arra a kúpszeletre vonatkozólag, mely a PASCAL-hatszög körül írható.*

E tételt HESSE¹ állította föl és egy stereometriai tétel segélyével bizonyította be.

Vegyünk fel három egyenest $g_1 g_3 g_5$ -öt, melyek közül egyik sem metszi a másik kettőt és legyen $h_2 h_4 h_6$ három egyenes, mely amazok mindenikét metszi. Jelöljük a g_i, h_j egyenesek metszéspontját $(g_i h_j)$ -vel, a g_i, h_j -n keresztül menő síkot $[g_i h_j]$ -vel.

A $(g_i h_j), (g_k h_l)$ pontok összekötő egyenesé és a $[g_i h_l], [g_k h_j]$ síkok metszővonala ugyanegy egyenes, vagyis

$$(g_i h_j) (g_k h_l) \equiv [g_i h_l] [g_k h_j]$$

és a

$$(g_i h_j) (g_k h_l) (g_m h_n), [g_i h_j] [g_k h_l] [g_m h_n]$$

sík és pont egymásnak polárisikja, illetőleg polus a $g_1 g_3 g_5 h_2 h_4 h_6$ egyeneseken keresztül menő φ másodrendű felületre nézve.

Ha

$$\begin{array}{ll} (g_1 h_4) (g_3 h_6) (g_5 h_2) = \rho' & [g_1 h_4] [g_3 h_6] [g_5 h_2] = R' \\ (g_1 h_6) (g_3 h_2) (g_5 h_4) = \rho'' & [g_1 h_6] [g_3 h_2] [g_5 h_4] = R'' \\ (g_1 h_2) (g_3 h_4) (g_5 h_6) = \rho''' & [g_1 h_2] [g_3 h_4] [g_5 h_6] = R''' \\ (g_1 h_6) (g_3 h_4) (g_5 h_2) = \sigma' & [g_1 h_6] [g_3 h_4] [g_5 h_2] = S' \\ (g_1 h_4) (g_3 h_2) (g_5 h_6) = \sigma'' & [g_1 h_4] [g_3 h_2] [g_5 h_6] = S'' \\ (g_1 h_2) (g_3 h_6) (g_5 h_4) = \sigma''' & [g_1 h_2] [g_3 h_6] [g_5 h_4] = S''' \end{array}$$

kimutatható, hogy az $R' R'' R'''$ pontok a $\sigma' \sigma'' \sigma'''$ síkok metszővonalában és hasonlóképp az $S' S'' S'''$ pontok a $\rho' \rho'' \rho'''$ síkok metszővonalában fekszenek, a miből mivel R', ρ' ; R'', ρ'' ; . . . polus és polussik következni fog, hogy az

$$s \equiv R' R'' R''' \equiv \sigma' \sigma'' \sigma''', r \equiv S' S'' S''' \equiv \rho' \rho'' \rho'''$$

egyenesek reciprocus-polárisok a φ felületre nézve.

¹ Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid. CRELLE'S Journal, Bd. XXIV, vagy SCHRÖTER: »Theorie der Oberflächen II. Ord.« 117. old.

Ugyanis

az R' pont a $[g_1 h_4] [g_3 h_6] = (g_1 h_6) (g_3 h_4)$ egyenesen,

az R'' » a $[g_3 h_2] [g_5 h_4] = (g_3 h_4) (g_5 h_2)$ »

az R''' » a $[g_5 h_6] [g_1 h_2] = (g_5 h_2) (g_1 h_6)$ »

fekszik, mely utóbbiakon és így az $R'R''R'''$ pontokon a σ' sík keresztül megy. Hasonló egyszerű úton kimutatható, hogy σ'' , σ''' sík is keresztül megy az $R'R''R'''$ pontokon és a $\rho'\rho''\rho'''$ sík az $S'S''S'''$ pontokon.

A $g_1 g_3 g_5 h_2 h_4 h_6$ sugarak a következő hat hatlapot határozzák meg:

$$\begin{array}{ll} g_1 h_2 g_3 h_4 g_5 h_6 & g_1 h_2 g_3 h_6 g_5 h_4 \\ g_1 h_4 g_3 h_6 g_5 h_2 & g_1 h_6 g_3 h_4 g_5 h_2 \\ g_1 h_6 g_3 h_2 g_5 h_4 & g_1 h_4 g_5 h_2 g_3 h_6 \end{array}$$

melyek közül az első háromnak és az utóbbi háromnak szemben fekvő lapjai (mint $[g_1 h_2]$, $[h_4 g_5]$) egymást megfelelőleg a $\rho'\rho''\rho'''$, illetve a $\sigma'\sigma''\sigma'''$ síkokban metszik.

Ezek után kimondhatjuk a következő *segéd-tételt*:

»Három egyenes, mely egymást páronként nem metszi, és három egyenes, mely az előbbieket metszi, hat rajtuk keresztül menő hatlapot határoz meg, melyek mindenkének az a tulajdonsága van, hogy a szemben fekvő lapjaik metszövonalai egy síkban fekszenek. E síkok közül bármelyik három és a másik három egymást egy-egy egyenesben metszi, a mely egyenesek reciprocos-polárisok a hat felvett egyenesen keresztül fektetett II. r. felületre nézve«.

Ha ezután a $g_1 g_3 g_5 h_2 h_4 h_6$ egyenesen keresztül menő φ II. r. felületet, ama hat egyenest és a tőlük meghatározott hat hatlapot egy ε síkkal metszük, akkor ε -nak metszése φ -vel egy k kúpszelet; a $g_1 g_3 \dots$ egyenesekkel az 135246 pont, mely k -n fekszik; a hat hatlap lapjaival, az

$$\begin{array}{ll} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 & 1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4 \\ 1\ 4\ 3\ 6\ 5\ 2 & 1\ 6\ 3\ 4\ 5\ 2 \\ 1\ 6\ 3\ 2\ 5\ 4 & 1\ 4\ 3\ 2\ 5\ 6 \end{array}$$

PASCAL-hatszögeknek oldala; azokkal a $\rho'\rho''\rho''' \sigma'\sigma''\sigma'''$ síkokkal, a melyekben a hatlapok szemben fekvő lapjai egymást metszik, ama PASCAL-hatszögeknek $r'r''r''s's''s'''$ PASCAL-egyenesé; végre azokkal

az r, s egyenesekkel, a melyekben a $\rho' \rho'' \rho'''$ és $\sigma' \sigma'' \sigma'''$ síkok egymást metszik, az $r' r'' r'''$ és $s' s'' s'''$ PASCAL-egyeneseknek R és S metszőpontja, melyek egy STEINER-ellenpontpár. Minthogy az r, s egyenesek reciprocus-polárisok a φ felületre nézve, az R, S STEINER-ellenpontpár kapcsolt poluspár lesz a k kúpszeletre vonatkozólag.

6. A tételnek egy másik beh bizonyítása STAUDT-tól¹ származik és a következő:

Ha két kúpszeletet collinearisan akarunk egymásra vonatkoztatni, akkor az egyik kúpszelet három pontjának megfelelő három pontot a másikon tetszés szerint vehetünk fel, s ez által az egyik kúpszelet minden pontjának egy határozott pont felel meg a másik kúpszeleten.²

Vonatkoztassuk az 123456 PASCAL-hatszög körül írt kúpszeletet önmagára az által, hogy az 135 pontjaihoz a 246 pontokat rendeljük. Tudvalevőleg megfelelő pontoknak érintői a collinearisan vonatkozásban szintén megfelelők, valamint megfelelő egyeneseknek metszőpontjai is. Ebből pedig az következik, hogy annak az x egyenesnek, melyben az 135 pontok érintői az 135 háromszög 35 51 13 oldalait metszik, az az y egyenes fog megfelelni, melyben a 246 pont érintői a 246 háromszög 46 62 24 oldalait metszik. Ennélfogva az x és y megfelelő egyeneseknek képzetes metszőpontjai X, X_1 , illetve Y, Y_1 szintén megfelelők.

Minthogy

$$135 \text{ } XX_1 \text{ } \wedge \text{ } 246 \text{ } YY_1,$$

azért az

$$(14, 23), (36, 45), (16, 25), (XY_1, X_1Y)$$

pontok ugyanegy egyenesen fekszenek.³ De az első három pont a $p^1 = 163254$ PASCAL-egyenesen van; ennélfogva a p^1 egyenes keresztül megy a

$$P = (XY_1, X_1Y)$$

ponton.

Ha ellenben a k kúpszelet pontjait akkép vonatkoztatjuk egymásra, hogy az 135 pontoknak egyszer a 462, másszor a 624

¹ Über die STEINER'schen Gegenpunkte. CRELLE 's Journal, Bd. LXII.

² STAUDT: Geometrie der Lage §. 20. 149. oldal.

³ KLUG: Projectiv geometria 102. oldal, 84. pont.

pontok felelnek meg, akkor az x, y egyenesek és az $X, X_1; Y, Y_1$ pontok változatlanok maradnak, tehát ismét

$$135 \ X X_1 \ \wedge \ 462 \ Y Y_1$$

$$135 \ X X_1 \ \wedge \ 624 \ Y Y_1$$

és a $p^{\text{II}} = 123456$, $p^{\text{III}} = 143652$ PASCAL-egyenesek szintén keresztül mennek a

$$P = (X Y_1, X_1 Y)$$

ponton.

Ha folytatólag a k kúpszelet pontjait akkép vonatkoztatjuk egymásra, hogy az 135 pontoknak a 264 vagy 642, végre a 426 pontok feleljenek meg, melyeknek sora a 246 pontokkal ellenkező értelműleg halad, akkor az x, y egyenesek még mindig megfelelők maradnak, de az X, X_1 pontoknak az Y_1, Y pontok felelnek meg.

Ennélfogva

$$135 \ X X_1 \ \wedge \ 264 \ Y_1 Y$$

$$135 \ X X_1 \ \wedge \ 642 \ Y_1 Y$$

$$135 \ X X_1 \ \wedge \ 426 \ Y_1 Y,$$

a miből, mint előbb, következik, hogy a

$$\pi^{\text{VI}} = 143256, \ \pi^{\text{V}} = 123654, \ \pi^{\text{IV}} = 163452$$

PASCAL-egyenesek a

$$\Pi = (X Y, X_1 Y_1)$$

ponton mennek keresztül.

Ámde a $p^{\text{I}} p^{\text{II}} p^{\text{III}}$ és $\pi^{\text{VI}} \pi^{\text{V}} \pi^{\text{IV}}$ PASCAL-egyenesek egymást a P, Π STEINER-ellenpontpárban metszik, mely mint a k kúpszeletbe írt XX_1YY_1 képzetes négyszögnek átlóspont-párja, k -ra vonatkozólag kapcsolt poluspár.

A tétel még a következő segéd-tétel alapján is bebizonyítható:

Ha az

$$X X_1, Y Y_1, Z Z_1, U U_1$$

pontpárok kapcsolt polusok egy kúpszeletre nézve, akkor a

$$V = (X Y, Z U), \quad V_1 = (X_1 U_1, Y_1 Z_1)$$

$$W = (X U, Y Z), \quad W_1 = (X_1 Y_1, Z_1 U_1)$$

pontpárok egyidejűleg vagy kapcsolt polusok, vagy nem kapcsolt polusok a kúpszeletre nézve.

Ennek kimutatása pedig következőképp történik:

Ha $x y z u v w$ egyenesek az $X Y Z U V W$ pontoknak polárisai, akkor az $x y v$ és a $z u v$ egyenesek egy-egy pontban találkoznak, mivel az $X Y V$ és $Z U V$ pontok egy-egy egyenesen fekszenek.

De az $x y z u$ egyenesek az $X Y Z U$ pontokhoz kapcsolt polusokon $X_1 Y_1 Z_1 U_1$ -en mennek keresztül és a szerint, a mint V_1 , V kapcsolt poluspár, vagy nem az: a V_1 pont a v egyenesen fekszik, vagy nem fekszik rajta.

Az első esetben az

$$\begin{array}{l} x y \mid X_1 Y_1 \mid \\ u z \mid U_1 Z_1 \mid \end{array}$$

háromszögek a V_1 collineatio-középpontra vonatkozólag perspektívák, tehát a

$$W_1 = (X_1 Y_1, U_1 Z_1)$$

pont az

$$\mid (x u), (y z) \mid$$

egyenesen van. Ez az egyenes azonban az $\mid X U \mid$, $\mid Y Z \mid$ egyenesek polusán megy keresztül s, mint ilyen, a

$$W = (X U, Y Z)$$

pontnak polárisa w ; ennél fogva ebben az esetben a w egyenes keresztül megy a W_1 -en, és így a W , W_1 pontok kapcsolt polusok lesznek.

Visszatérve az 1 2 3 4 5 6 PASCAL-hatszöghez, legyen

$$X = (1 4, 2 3), Y = (2 3, 5 6), Z = (4 5, 1 2), U = (3 6, 4 5)$$

$$X_1 = (1 2, 3 4), Y_1 = (3 6, 2 5), Z_1 = (2 5, 1 4), U_1 = (3 4, 5 6),$$

tehát

$$X Y = 2 3, X_1 U_1 = 3 4, X U = p^I, X_1 Y_1 = \pi^{IV}$$

$$U Z = 4 5, Y_1 Z_1 = 2 5, Y Z = p^{II}, Z_1 U_1 = \pi^{VI}.$$

Míntfogya

$$(X Y, U Z) = (2 3, 4 5), (X_1 U_1, Y_1 Z_1) = (3 4, 2 5)$$

kapcsolt poluspár, egyszersmind

$$(X U, Y Z) = (p^I p^{II}) = P, (X_1 Y_1, Z_1 U_1) = (\pi^{IV} \pi^{VI}) = II$$

kapcsolt poluspár lesz.

A következőkben a STEINER-ellenpontpárokat $P, II; A_1, A_1; A_2, A_2; A_3, A_3; B_1, B_1; B_2, B_2; B_3, B_3; C_1, C_1; C_2, C_2; C_3, C_3$ betűkkel fogjuk jelölni; továbbá azokat a PASCAL-egyeneseket, melyek egymást e STEINER-pontokban metszik, ugyanilyen kis-betűkkel jelöljük s megkülönböztetésül még ellátjuk felső mutatókkal. (Lásd az I. táblát).

3. A Kirkman-pontokról.

7. *A teljes PASCAL-hatszög hatvan PASCAL-egyenesre egymást hármasával a húsz STEINER-ponton kívül még hatvan úgynevezett KIRKMAN-pontban metszi.*

Egy teljes hatszög 1 2 3 4 5 6 oldalainak száma $\binom{6}{2} = 15$, t. i. 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

Ha ezek közül az oldalak közül SCHRÖTER¹ szerint kiválasztunk oly hatot, a melyek egy egyszerű PASCAL-hatszöget képeznek, akkor a megmaradt kilencz oldalból csak három oly egyszerű hatszöget alkothatunk, a melyek a teljes PASCAL-hatszögben előfordulnak; ez utóbbiaknak PASCAL-egyenesei egyinást egy Kirkman-pontban metszik.

Ha pl. a fentebbi tizenöt hatszögoldalból az

1 2 3 4 5 6

hatszög oldalait kiválasztjuk, akkor a megmaradt kilencz oldalból a következő hatszögek és csakis ezek, alkothatók:

1 3 5 2 6 4

3 5 1 4 2 6

5 1 3 6 4 2,

mint a teljes 1 2 3 4 5 6 hatszögnek egyszerű hatszögei.

Ha e hatszögek szemben fekvő oldalainak metszéspontjait következőkép jelöljük:

$(13, 26) = L_3, (35, 64) = M_3, (52, 41) = N_3$

$(35, 42) = L_2, (51, 26) = M_2, (14, 63) = N_2$

$(13, 42) = L_1, (51, 64) = M_1, (36, 52) = N_1$

akkor látható, hogy ama hatszögek PASCAL-egyenesei:

$L_3 M_3 N_3, L_2 M_2 N_2, L_1 M_1 N_1.$

¹ L. a 104. oldalon id. m. 217. oldalát.

Ámde az $M_1 M_2 M_3$, $N_1 N_2 N_3$ háromszögek oldalai közül

$$\begin{array}{l} M_1 M_2, N_1 N_2 \text{ egymást az } (5\ 1, 6\ 3) \text{ pontban,} \\ M_2 M_3, N_2 N_3 \quad \gg \quad \gg \quad (2\ 3, 1\ 4) \quad \gg \\ M_3 M_1, N_3 N_1 \quad \gg \quad \gg \quad (6\ 4, 5\ 2) \quad \gg \end{array}$$

metszik, melyek, az $1\ 5\ 2\ 3\ 6\ 4$ PASCAL-hatszög szemben fekvő oldalainak metszéspontjai lévén, egy egyenesen $b_2^I = 1\ 5\ 2\ 3\ 6\ 4$ -en fekszenek.

Az $M_1 M_2 M_3$, $N_1 N_2 N_3$ háromszögek tehát perspectivásak, s a megfelelő szögpontokat összekötő $M_3 N_3$, $M_2 N_2$, $M_1 N_1$ egyenesek, vagyis ama három PASCAL-hatszög PASCAL-egyenesei:

$$\begin{array}{l} \beta_3^{II} = 1\ 3\ 5\ 2\ 6\ 4 \\ \beta_2^{II} = 1\ 4\ 2\ 6\ 3\ 5 \\ \beta_1^I = 1\ 3\ 6\ 4\ 2\ 5 \end{array}$$

egymást egy KIRKMAN-pontban, $P^{II} = (\beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II})$ -ban metszik.

E KIRKMAN-pontról, melyben az $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$ hatszöggel közös oldalt egyet sem tartalmazó $1\ 3\ 5\ 2\ 6\ 4$, $3\ 5\ 1\ 4\ 2\ 6$, $5\ 1\ 3\ 6\ 4\ 2$ PASCAL-hatszögek PASCAL-egyenesei egymást metszik, azt mondjuk (SCHRÖTER szavait használva), hogy a $p^{II} = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$ PASCAL-egyeneshez van rendelve. Minthogy pedig ilyenformán minden PASCAL-egyeneshez van egy KIRKMAN-pont V rendelve: *a KIRKMAN-pontok száma hatvan.*

4. A Pascal-egyenesekből és Kirkman-pontokból álló Desargues-configurációk.

8. *Az egymást KIRKMAN-pontban metsző három PASCAL-egyeneshez rendelt KIRKMAN-pontok abban a PASCAL-egyenesben fekszenek, a melyhez az előbbi KIRKMAN-pont rendelve van.*

E tétel legegyszerűbben úgy bizonyítható be,¹ hogy előbb felírjuk azokat a PASCAL-egyeneseket, melyek egy PASCAL-egyeneshez rendelt KIRKMAN-ponton mennek keresztül és aztán azt a kilencz PASCAL-egyeneset, melyek egymást a három PASCAL-egyeneshez rendelt három KIRKMAN-pontban metszik, vagyis, hogy felírjuk a következő táblázatot:

¹ L. VERONESE-nek a 101. oldalon id. munkája 17. oldalát.

$$p^{\text{II}} = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \left\{ \begin{array}{l} \beta_3^{\text{II}} = 1\ 3\ 5\ 2\ 6\ 4 \left\{ \begin{array}{l} a_3^{\text{II}} = 1\ 5\ 6\ 3\ 4\ 2 \\ p^{\text{II}} = 5\ 6\ 1\ 2\ 3\ 4 \\ c_3^{\text{II}} = 6\ 1\ 5\ 4\ 2\ 3 \end{array} \right. \\ \\ \beta_2^{\text{II}} = 3\ 5\ 1\ 4\ 2\ 6 \left\{ \begin{array}{l} a_2^{\text{II}} = 3\ 1\ 2\ 5\ 6\ 4 \\ p^{\text{II}} = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ c_2^{\text{II}} = 2\ 3\ 1\ 6\ 4\ 5 \end{array} \right. \\ \\ \beta_1^{\text{II}} = 5\ 1\ 3\ 6\ 4\ 2 \left\{ \begin{array}{l} a_1^{\text{II}} = 5\ 3\ 4\ 1\ 2\ 6 \\ p^{\text{II}} = 3\ 4\ 5\ 6\ 1\ 2 \\ c_1^{\text{II}} = 4\ 5\ 3\ 2\ 6\ 1, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

hol

$$\begin{array}{llll} a \beta_3^{\text{II}} \beta_2^{\text{II}} \beta_1^{\text{II}} \text{ PASCAL-egyenesek a } p^{\text{II}}\text{-hez rendelt KIRKMAN-ponton } P^{\text{II-n}}, & & & \\ \text{az } a_3^{\text{II}} p^{\text{II}} c_3^{\text{II}} & \gg & \beta_3^{\text{II}} & \gg & \gg & B_3^{\text{II-n}}, \\ \text{az } a_2^{\text{II}} p^{\text{II}} c_2^{\text{II}} & \gg & \beta_2^{\text{II}} & \gg & \gg & B_2^{\text{II-n}}, \\ \text{az } a_1^{\text{II}} p^{\text{II}} c_1^{\text{II}} & \gg & \beta_1^{\text{II}} & \gg & \gg & B_1^{\text{II-n}} \end{array}$$

mennek keresztül.

Ebből látható, hogy a $\beta_1^{\text{II}} \beta_2^{\text{II}} \beta_3^{\text{II}}$ PASCAL-egyenesekhez rendelt $B_1^{\text{II}} B_2^{\text{II}} B_3^{\text{II}}$ KIRKMAN-pontok a p^{II} egyenesen fekszenek.¹

A fentebbi táblában tíz PASCAL-egyenes fordul elő, a melyet mind meghatároz a p^{II} egyenes. De ama tíz PASCAL-egyenes bármelyike ugyanazon módon, mint p^{II} , meghatározza a többi kilenczet, a mit a következő táblázatból láthatunk:

$$\beta_3^{\text{II}} = 1\ 3\ 5\ 2\ 6\ 4 \left\{ \begin{array}{l} a_3^{\text{II}} = 1\ 5\ 6\ 3\ 4\ 2 \left\{ \begin{array}{l} c_3^{\text{II}} = 1\ 6\ 4\ 5\ 2\ 3 \\ \beta_3^{\text{II}} = 6\ 4\ 1\ 3\ 5\ 2 \\ c_1^{\text{II}} = 4\ 1\ 6\ 2\ 3\ 5 \end{array} \right. \\ \\ p^{\text{II}} = 5\ 6\ 1\ 2\ 3\ 4 \left\{ \begin{array}{l} \beta_1^{\text{II}} = 5\ 1\ 3\ 6\ 4\ 2 \\ \beta_3^{\text{II}} = 1\ 3\ 5\ 2\ 6\ 4 \\ \beta_2^{\text{II}} = 3\ 5\ 1\ 4\ 2\ 6 \end{array} \right. \\ \\ c_3^{\text{II}} = 6\ 1\ 5\ 4\ 2\ 3 \left\{ \begin{array}{l} a_2^{\text{II}} = 6\ 5\ 2\ 1\ 3\ 4 \\ \beta_3^{\text{II}} = 5\ 2\ 6\ 4\ 1\ 3 \\ a_1^{\text{II}} = 2\ 6\ 5\ 3\ 4\ 1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

¹ HESSE úgy vélte, hogy azok a PASCAL-egyenesek, melyek a $\beta_1^{\text{II}} \beta_2^{\text{II}} \beta_3^{\text{II}}$ PASCAL-egyenesekhez rendelt KIRKMAN-pontokon mennek keresztül, egymástól

E szerint a

$$p'' \beta_1'' \beta_2'' \beta_3'' a_1'' a_2'' a_3'' c_1'' c_2'' c_3''$$

PASCAL-egyenesek mindegyikén három KIRKMAN-pont fekszik, és e KIRKMAN-pontok mindegyikén három PASCAL-egyenes megy keresztül. E tíz PASCAL-egyenes tehát egymást a következő tíz

$$P'' B_1'' B_2'' B_3'' A_1'' A_2'' A_3'' \Gamma_1'' \Gamma_2'' \Gamma_3''$$

KIRKMAN-pontban metszi s így egy DESARGUES-configurációt (10_3 , 10_3) képez, melynek minden egyenese PASCAL-egyenes és minden pontja KIRKMAN-pont.

9. Induljunk ki egy másik PASCAL-hatszögből, pl. az 1 6 3 2 5 4-ből, melynek p^I PASCAL-egyenes az előbbi tiztől különbözik, s mely tehát ismét még új kilencz PASCAL-egyeneset határoz meg. Ugyanígy lehet a $p^{III} \pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ PASCAL-egyenesekkel kapcsolatos kilencz-kilencz PASCAL-egyeneset is meghatározni, vagyis az összes PASCAL-egyeneseket tizesével hat csoportba osztani, mint azt az I. táblázat a 120-ik oldalon mutatja.

E táblázatban a PASCAL-egyenesek akkép vannak hat csoportba osztva, hogy, ha bármely csoport első PASCAL-egyenesét collineatio-tengelynek tekintjük, akkor a következő három PASCAL-egyenes vetítősugara ama perspectivás háromszögek szögpontjainak, a melyeknek oldalait a következő három-három PASCAL-egyenes képezi.

Kimondhatjuk tehát a következő tételt: *Egy teljes PASCAL-hatszögnek hatvan PASCAL-egyeneséből (v) és hatvan KIRKMAN-pontjából (V) álló $[Vv]$ -configuratio hat DESARGUES-configurációra (10_3 , ...) oszlik.*

10. *Minden STEINER-ellenpontpáron keresztül menő hat PASCAL-egyenes egy-egy DESARGUES-configurációhoz tartozik.*

Ez kitűnik a 121-ik oldalon következő II. táblázatból, melyet a 4. pont értelmében az I. táblázatból képeztünk.

különbözők (CRELLE 's Journal, Jahrg. 1868, p. 193), a miért is nem találhatta meg azt a hat DESARGUES-configurációt, a melyre a hatvan PASCAL-egyenes felbomlik.

5. A Cayley-egyenesekről.

11. Az előbbieket meggyőzhettek arról, hogy a hatvan PASCAL-egyenes hármásával a húsz STEINER-ponton és hatvan KIRKMAN-ponton megy keresztül, továbbá hogy a hatvan KIRKMAN-pont hármásával a hat-

| I. | II. | III. |
|--------------------------|-------------------------|---------------------------|
| $p^I = 163254$ | $p^{II} = 123456$ | $p^{III} = 143652$ |
| $\alpha_1^I = 126435$ | $\beta_1^{II} = 136425$ | $\gamma_1^{III} = 135426$ |
| $\alpha_2^I = 135642$ | $\beta_2^{II} = 142635$ | $\gamma_2^{III} = 132645$ |
| $\alpha_3^I = 134265$ | $\beta_3^{II} = 135264$ | $\gamma_3^{III} = 164235$ |
| $b_1^I = 142563$ | $c_1^{II} = 145326$ | $a_1^{III} = 156432$ |
| $b_2^I = 152634$ | $c_2^{II} = 164523$ | $a_2^{III} = 165342$ |
| $b_3^I = 125364$ | $c_3^{II} = 154236$ | $a_3^{III} = 126543$ |
| $c_1^I = 165423$ | $a_1^{II} = 126534$ | $b_1^{III} = 152364$ |
| $c_2^I = 154326$ | $a_2^{II} = 125643$ | $b_2^{III} = 142536$ |
| $c_3^I = 164532$ | $a_3^{II} = 156342$ | $b_3^{III} = 145263$ |
| IV. | V. | VI. |
| $\pi^{IV} = 163452$ | $\pi^V = 123654$ | $\pi^{VI} = 143256$ |
| $a_1^{IV} = 146235$ | $a_2^V = 135246$ | $a_3^{VI} = 136245$ |
| $b_1^{IV} = 132465$ | $b_2^V = 162435$ | $b_3^{VI} = 135462$ |
| $c_1^{IV} = 135624$ | $c_2^V = 134625$ | $c_3^{VI} = 124635$ |
| $\alpha_2^{IV} = 165243$ | $\alpha_3^V = 154362$ | $\alpha_1^{VI} = 146532$ |
| $\beta_2^{IV} = 162534$ | $\beta_3^V = 125463$ | $\beta_1^{VI} = 156324$ |
| $\gamma_2^{IV} = 152346$ | $\gamma_3^V = 124536$ | $\gamma_1^{VI} = 145623$ |
| $\alpha_3^{IV} = 124563$ | $\alpha_1^V = 156234$ | $\alpha_2^{VI} = 125346$ |
| $\beta_3^{IV} = 145362$ | $\beta_1^V = 146523$ | $\beta_2^{VI} = 152436$ |
| $\gamma_3^{IV} = 154632$ | $\gamma_1^V = 165324$ | $\gamma_2^{VI} = 162543$ |

(I. táblázat.)

van PASCAL-egyenesen fekszik. Vizsgáljuk most meg, vajjon a hatvan KIRKMAN-pont nem fekszik-e szintén hármásával még más húsz egyenesen?

A P STEINER-pontban egymást metsző p^I, p^{II}, p^{III} PASCAL-egyenesekhez rendelt P^I, P^{II}, P^{III} KIRKMAN-pontok metszőpontjai a következő PASCAL-egyeneseknek:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1^I = 1\ 2\ 6\ 4\ 3\ 5 & \beta_1^{II} = 1\ 3\ 6\ 4\ 2\ 5 & \gamma_1^{III} = 1\ 3\ 5\ 4\ 2\ 6 \\ \alpha_2^I = 1\ 3\ 5\ 6\ 4\ 2 & \beta_2^{II} = 1\ 4\ 2\ 6\ 3\ 5 & \gamma_2^{III} = 1\ 3\ 2\ 6\ 4\ 5 \\ \alpha_3^I = 1\ 3\ 4\ 2\ 6\ 5 & \beta_3^{II} = 1\ 3\ 5\ 2\ 6\ 4 & \gamma_3^{III} = 1\ 6\ 4\ 2\ 3\ 5. \end{array}$$

| STEINER-pontok, | a rajtuk keresztül menő PASCAL-egyenesek | STEINER-pontok, | a rajtuk keresztül menő PASCAL-egyenesek |
|-----------------|--|-----------------|--|
| P | p^I, p^{II}, p^{III} | II | $\pi^{IV}, \pi^V, \pi^{VI}$ |
| A_1 | $a_1^{IV}, a_1^{II}, a_1^{III}$ | A_1 | $\alpha_1^I, \alpha_1^V, \alpha_1^{VI}$ |
| B_1 | $b_1^{IV}, b_1^{III}, b_1^I$ | B_1 | $\beta_1^{II}, \beta_1^V, \beta_1^{VI}$ |
| C_1 | $c_1^{IV}, c_1^I, c_1^{II}$ | Γ_1 | $\gamma_1^{III}, \gamma_1^V, \gamma_1^{VI}$ |
| A_2 | $a_2^V, a_2^{II}, a_2^{III}$ | A_2 | $\alpha_2^I, \alpha_2^{VI}, \alpha_2^{IV}$ |
| B_2 | b_2^V, b_2^{III}, b_2^I | B_2 | $\beta_2^{II}, \beta_2^{VI}, \beta_2^{IV}$ |
| C_2 | c_2^V, c_2^I, c_2^{II} | Γ_2 | $\gamma_2^{III}, \gamma_2^{VI}, \gamma_2^{IV}$ |
| A_3 | $a_3^{VI}, a_3^{II}, a_3^{III}$ | A_3 | $\alpha_3^I, \alpha_3^{IV}, \alpha_3^V$ |
| B_3 | $b_3^{VI}, b_3^{III}, b_3^I$ | B_3 | $\beta_3^{II}, \beta_3^{IV}, \beta_3^V$ |
| C_3 | $c_3^{VI}, c_3^I, c_3^{II}$ | Γ_3 | $\gamma_3^{III}, \gamma_3^{IV}, \gamma_3^V$ |

(II. táblázat.)

De az

$$\alpha_1^I \beta_1^{II} \gamma_1^{III}, \alpha_2^I \beta_2^{II} \gamma_2^{III}, \alpha_3^I \beta_3^{II} \gamma_3^{III}$$

háromszögekről bebizonyíthatjuk, hogy azok páronként perspektívusak.

Ugyanis

$$\begin{array}{llll} \text{az } (\alpha_1^I \beta_1^{II}) & (\alpha_2^I \beta_2^{II}) & \text{szögpontokat összekötő egyenes a } C_3^{VI} & \text{PASCAL-egyenes} \\ \text{a } (\beta_1^{II} \gamma_1^{III}) & (\beta_2^{II} \gamma_2^{III}) & \text{» » »} & a_3^{VI} \text{ »} \\ \text{a } (\gamma_1^{III} \alpha_1^I) & (\gamma_2^{III} \alpha_2^I) & \text{» » »} & b_3^{VI} \text{ »} \end{array}$$

mert ezek az egyenesek a megfelelő (5 1, 6 4), (3 5, 4 2), illetőleg (1 3, 4 2), (5 1, 2 6) és (3 5, 2 6), (1 3, 6 4) PASCAL-pontokon mennek keresztül.

Mintthogy az utóbbi PASCAL-egyenesek egymást abban a II^{VI} KIRKMAN-pontban metszik, mely a π^{VI} PASCAL-egyeneshez van rendelve: az $\alpha_1^I \beta_1^{II} \gamma_1^{III}, \alpha_2^I \beta_2^{II} \gamma_2^{III}$ háromszögek megfelelő oldalainak metszőpontjai, azaz a

$$P^I = (\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I), \quad P^{II} = (\beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{III}), \quad P^{III} = (\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III})$$

KIRKMAN-pontok ugyanegy p egyenesen fekszenek.

Ebből folyólag a következő tételhez jutunk:

*Egy STEINER-ponton keresztül menő három PASCAL-egyeneshez rendelt három KIRKMAN-pont egy egyenesen fekszik, melyet a STEINER-ponthoz rendelt CAYLEY-egyenesnek neveznek.*¹

Mint hogy a teljes PASCAL-szög húsz STEINER-pontot határoz meg, a CAYLEY-egyenesek száma szintén húsz. E szerint:

A hatvan KIRKMAN-pont hármásával a húsz CAYLEY-egyenesen fekszik.

Jegyzet. Mi a következőkben a CAYLEY-egyeneseket ugyanazon, de kis betűkkel jelöljük, mint a STEINER-pontokat, a melyekhez rendelve vannak, és azokat a CAYLEY-egyeneseket, melyek egy-egy STEINER-ellenpontpárhoz rendelvük, CAYLEY-ellenegyenesek-nek nevezzük.

12. Az előbbiekből következik, hogy az $\alpha_1^I \beta_1^{II} \gamma_1^{III}$, $\alpha_2^I \beta_2^{II} \gamma_2^{III}$, $\alpha_3^I \beta_3^{II} \gamma_3^{III}$ háromszögek páronként a

$$p = (P^I P^{II} P^{III})$$

CAYLEY-egyenesre, mint collineatio-tengelyre vonatkozólag páronként perspectivásak; a vetítő sugarak az $a_1^{IV} b_1^{IV} c_1^{IV}$, $a_2^V b_2^V c_2^V$, $a_3^{VI} b_3^{VI} c_3^{VI}$ PASCAL-egyenesek; a három collineatio-középpont a π CAYLEY-egyenesen fekvő

$$\Pi^{IV} = (a_1^{IV} b_1^{IV} c_1^{IV}), \quad \Pi^V = (a_2^V b_2^V c_2^V), \quad \Pi^{VI} = (a_3^{VI} b_3^{VI} c_3^{VI})$$

KIRKMAN-pont.

Ennélfogva:

Ama kilencz PASCAL-egyenes, mely egy CAYLEY-egyenesen fekvő három KIRKMAN-ponton megy keresztül, három páronként perspectivás háromszögnek oldalait szolgáltatja. E háromszögek szögpontjait vetítő kilencz sugár PASCAL-egyenes; a három collineatio-középpont KIRKMAN-pont; a rajtuk keresztül menő egyenes az a CAYLEY-egyenes, mely a felvett CAYLEY-egyenessel együtt egy ellenegyenespárt képez.

E configuratio egy CAYLEY-ellenegyenespárból, hat KIRKMAN-pontból és tizennyolcz PASCAL-egyenesből áll. A teljes PASCAL-hatszög tíz ilyen configuratióra oszlik; minden PASCAL-egyenes három ilyen

¹ CRELLE 's Journal, XLI.

configurációban fordul elő; ellenben két ily konfigurációnak négy közös PASCAL-egyeneses van. (Lásd a III. táblázatot.)

13. Minden CAYLEY-egyenes keresztül megy azon a STEINER-ponton, mely a CAYLEY-egyeneshez rendelt STEINER-pontnak STEINER-ellenpontja.

| CAYLEY-egyenesek | a rajtuk fekvő KIRKMAN-pontok | | |
|------------------|---|---|--|
| p | $P^I = (\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I)$ | $P^{II} = (\beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II})$ | $P^{III} = (\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III})$ |
| a ₁ | $A_1^{IV} = (\alpha_2^{IV} \alpha_3^{IV} \pi^{IV})$ | $A_1^{II} = (c_2^{II} c_3^{II} \beta_1^{II})$ | $A_1^{III} = (b_2^{III} b_3^{III} \gamma_1^{III})$ |
| a ₂ | $A_2^V = (\alpha_3^V \alpha_1^V \pi^V)$ | $A_2^{II} = (c_3^{II} c_1^{II} \beta_2^{II})$ | $A_2^{III} = (b_3^{III} b_1^{III} \gamma_2^{III})$ |
| a ₃ | $A_3^{VI} = (\alpha_1^{VI} \alpha_2^{VI} \pi^{VI})$ | $A_3^{II} = (c_1^{II} c_2^{II} \beta_3^{II})$ | $A_3^{III} = (b_1^{III} b_2^{III} \gamma_3^{III})$ |
| b ₁ | $B_1^{IV} = (\beta_2^{IV} \beta_3^{IV} \pi^{IV})$ | $B_1^{III} = (a_2^{III} a_3^{III} \gamma_1^{III})$ | $B_1^I = (c_2^I c_3^I \alpha_1^I)$ |
| b ₂ | $B_2^V = (\beta_3^V \beta_1^V \pi^V)$ | $B_2^{III} = (a_3^{III} a_1^{III} \gamma_2^{III})$ | $B_2^I = (c_3^I c_1^I \alpha_2^I)$ |
| b ₃ | $B_3^{VI} = (\beta_1^{VI} \beta_2^{VI} \pi^{VI})$ | $B_3^{III} = (a_1^{III} a_2^{III} c_3^{III})$ | $B_3^I = (c_1^I c_2^I \alpha_3^I)$ |
| c ₁ | $C_1^{IV} = (\gamma_2^{IV} \gamma_3^{IV} \pi^{IV})$ | $C_1^I = (b_2^I b_3^I \alpha_1^I)$ | $C_1^{II} = (a_2^{II} a_3^{II} \beta_1^{II})$ |
| c ₂ | $C_2^V = (\gamma_3^V \gamma_1^V \pi^V)$ | $C_2^I = (b_3^I b_1^I \alpha_2^I)$ | $C_2^{II} = (a_3^{II} a_1^{II} \beta_2^{II})$ |
| c ₃ | $C_3^{VI} = (\gamma_1^{VI} \gamma_2^{VI} \pi^{VI})$ | $C_3^I = (b_1^I b_2^I \alpha_3^I)$ | $C_3^{II} = (a_1^{II} a_2^{II} \beta_3^{II})$ |
| π | $\Pi^{IV} = (a_1^{IV} b_1^{IV} c_1^{IV})$ | $\Pi^V = (a_2^V b_2^V c_2^V)$ | $\Pi^{VI} = (a_3^{VI} b_3^{VI} c_3^{VI})$ |
| α_1 | $A_1^I = (b_1^I c_1^I p^I)$ | $A_1^V = (\beta_3^V \gamma_3^V a_1^V)$ | $A_1^{VI} = (\beta_2^{VI} \gamma_2^{VI} a_3^{VI})$ |
| α_2 | $A_2^I = (b_2^I c_2^I p^I)$ | $A_2^{VI} = (\beta_1^{VI} \gamma_1^{VI} a_3^{VI})$ | $A_2^{IV} = (\beta_3^{IV} \gamma_3^{IV} a_1^{IV})$ |
| α_3 | $A_3^I = (b_3^I c_3^I p^I)$ | $A_3^{IV} = (\beta_2^{IV} \gamma_2^{IV} a_1^{IV})$ | $A_3^V = (\beta_1^V \gamma_1^V a_2^V)$ |
| β_1 | $B_1^{II} = (c_1^{II} a_1^{II} p^{II})$ | $B_1^V = (\gamma_3^V \alpha_3^V b_2^V)$ | $B_1^{VI} = (\gamma_2^{VI} \alpha_2^{VI} b_3^{VI})$ |
| β_2 | $B_2^{II} = (c_2^{II} a_2^{II} p^{II})$ | $B_2^{VI} = (\gamma_1^{VI} \alpha_1^{VI} b_3^{VI})$ | $B_2^{IV} = (\gamma_3^{IV} \alpha_3^{IV} b_1^{IV})$ |
| β_3 | $B_3^{II} = (c_3^{II} a_3^{II} p^{II})$ | $B_3^{IV} = (\gamma_2^{IV} \alpha_2^{IV} b_1^{IV})$ | $B_3^V = (\gamma_1^V \alpha_1^V b_2^V)$ |
| γ_1 | $\Gamma_1^{III} = (a_1^{III} b_1^{III} p^{III})$ | $\Gamma_1^V = (\alpha_3^V \beta_3^V c_2^V)$ | $\Gamma_1^{VI} = (\alpha_2^{VI} \beta_2^{VI} c_3^{VI})$ |
| γ_2 | $\Gamma_2^{III} = (a_2^{III} b_2^{III} p^{III})$ | $\Gamma_2^{VI} = (\alpha_1^{VI} \beta_1^{VI} c_3^{VI})$ | $\Gamma_2^{IV} = (\alpha_3^{IV} \beta_3^{IV} c_1^{IV})$ |
| γ_3 | $\Gamma_3^{III} = (a_3^{III} b_3^{III} p^{III})$ | $\Gamma_3^{IV} = (\alpha_2^{IV} \beta_2^{IV} c_1^{IV})$ | $\Gamma_3^V = (\alpha_1^V \beta_1^V c_2^V)$ |

(III. táblázat.)

Vagy, a mi ugyanaz:

A CAYLEY-ellenegyenespárok váltakozva keresztül mennek a hozzájuk rendelt STEINER-ellenpontpárokon.

Ugyanis az

$$\alpha_1^I \beta_1^{II} \pi^{IV}, \quad \alpha_2^I \beta_2^{II} \pi^V$$

háromszögek perspectivás helyzetűek, mert

$$\begin{aligned} (\alpha_1^I \beta_1^{II}) (\alpha_2^{II} \beta_2^{III}) &= c_3^{IV} = 1\ 2\ 4\ 6\ 3\ 5 \\ (\beta_1^{II} \pi^{IV}) (\beta_2^{II} \pi^V) &= (3\ 6, 5\ 2) (1\ 4, 3\ 6) = 3\ 6 \\ (\pi^{IV} \alpha_1^I) (\pi^V \alpha_2^I) &= (3\ 4, 1\ 2) (5\ 6, 1\ 2) = 1\ 2; \end{aligned}$$

a megfelelő oldalak metszéspontjai tehát egy egyenesben fekszenek. Ennélfogva a $\Pi = (\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI})$ STEINER-pont a $P^I = (\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I)$ és $P^{II} = (\beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II})$ KIRKMAN-pontokat összekötő CAYLEY-egyenesen p-n fekszik.

Ebből még az is kitűnik, hogy a 12. pontban leírt konfigurációk bármelyike valamennyi STEINER-ellenpontpárt magában foglalja, t. i. egy STEINER-ellenpontpár a CAYLEY-ellenegyenespáron, a többi kilencz pár pedig a konfigurációban szereplő tizennyolcz PASCAL-egyenesen fekszik.

14. Vizsgáljuk már most meg, hogy egy P STEINER-pont és a hozzá rendelt p CAYLEY-egyenes nem polus és polaris-e a PASCAL-hatszög körül írt kúpszeletre nézve?

Ha kimutatható, hogy van egy a P-hez kapcsolt polus, mely a p egyenesen kívül fekszik, akkor a p egyenes nem lehet polarisa a P pontnak, mert a p polarisa az összes P-hez kapcsolt polusokat tartalmazza.

A P ponton keresztül menő $p^{II} = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$ PASCAL-egyenesnek polusa (m, n) metszéspontja a p^{II} -őn fekvő (1 2, 4 5), (2 3, 5 6) pontok polarisainak, m-nek és n-nek, mely (m, n) pont a P-hez kapcsolt polus. Az m, n polarisok azonban az 1 2 4 5, 2 3 5 6 négyszögek révén az (1 5, 2 4), (1 4, 2 5), illetve (2 5, 3 6), (3 5, 2 6) pontokon mennek keresztül.

Ha az (m, n) pont a p egyenesen feküdnék, akkor az

$$\begin{aligned} (1\ 4, 2\ 5), (2\ 5, 3\ 6), & P^{II} = (\beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{III}) \\ (1\ 5, 2\ 4), (3\ 5, 2\ 6), & P^{III} = (\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III}) \end{aligned}$$

szögpontú háromszögek perspectivásak volnának, mert az első, második és harmadik oszlopban felírt pontok az m, n, p egyeneseken vannak.

Ámde e háromszögek megfelelő oldalainak,

- a 25 és $b_1^V = 153426$ metszéspontja a $(25, b_1^V)$
 a $\beta_3^{II} = 135264$ és $\gamma_3^{III} = 164235$ „ a $(35, 64)$
 a $\beta_1^{II} = 136425$ és $\gamma_1^{III} = 135426$ „ a $(13, 42)$.

E pontok közül a két utolsó az $a_1^V = 135246$ egyenesen, ellenben az első az a_1^V egyenesen kívül fekszik, mert b_1^V a $(25, 16)$ ponton nem megy keresztül.

Ama két háromszög tehát nem perspectivás, és a P ponthoz kapcsolt polus (m, n) nem fekszik a p egyenesen. *A p egyenes tehát nem polarisa a P pontnak, s ugyanazon oknál fogva a π egyenes nem polarisa a Π pontnak.*

Vizsgáljuk még meg, hogy a p, π CAYLEY-egyenesek nem kapcsolt polarisok-e a PASCAL-hatszög körül írt kúpszeletre vonatkozólag?

Ha p, π kapcsolt polarispár volna, akkor a p -nek polusa P' , mely az előbbieket szerint a P ponttal nem esik egybe, a π egyenesen feküdnék. Ekkor azonban, minthogy Π, P' és Π, P (5. és 6. pont) kapcsolt polus, a Π pont polarisa a $PP' = \pi$ egyenes volna, a mi az előbbi tétellel ellenkezik. E szerint

A CAYLEY-ellenegyenespárok nem kapcsolt polarisok a PASCAL-hatszög körül írt kúpszeletre vonatkozólag.¹

6. A Steiner-egyenesekről.

15. A 4. pontban kimutattuk, hogy az

| | | |
|----|----|----|
| 12 | 34 | 56 |
| 45 | 61 | 23 |
| 36 | 25 | 14 |

oldalú háromszögek a Π collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivásak; a vetítő sugarak és a collineatio-tengelyek a $\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$, illetve $p^I p^{II} p^{III}$ PASCAL-egyenesek, mely utóbbiak egymást a P STEINER-pontban metszik.

Ugyanígy kimutathattuk volna, a mi különben az előbbinek következménye, hogy az

| | | |
|----|----|----|
| 12 | 45 | 36 |
| 34 | 61 | 25 |
| 56 | 23 | 14 |

¹ V. ö. VERONESE-nek a 101. oldalon id. m. 27. old.

oldalú háromszögek a P collineatio-középpontra perspectivásak; a $p^I p^{II} p^{III}$, $\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ PASCAL-egyenesek közül az első három vetítősugár, a többi collineatio-tengely, mely egymást a II pontban metszi.

Ha akár az egyik, akár a másik csoport háromszögeit tekintjük, azt látjuk, hogy

| | | | | | |
|------------------|----------------|---------|--------------|------|--------|
| az 1 2, 6 1, 1 4 | meg nem felelő | oldalak | metszőpontja | az 1 | pont, |
| az 1 2, 2 3, 2 5 | » | » | » | » | a 2 » |
| a 3 4, 2 3, 3 6 | » | » | » | » | a 3 » |
| a 3 4, 4 5, 1 4 | » | » | » | » | a 4 » |
| az 5 6, 4 5, 2 5 | » | » | » | » | az 5 » |
| az 5 6, 6 1, 3 6 | » | » | » | » | a 6 » |

ellenben a megfelelő oldalak metszőpontjai a collineatio-tengelyeken fekszenek, melyek ugyanegy ponton mennek keresztül.

Ennélfogva mondhatjuk:

»Ha két háromszög akkép van egymásra vonatkoztatva, hogy az egyik háromszög minden oldalának a másik két háromszög egy-egy oldala felel meg, és a meg nem felelő oldalak metszőpontjai egy PASCAL-hatszögnek szögpontjai, akkor a háromszögek ugyanegy collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivásak, s így a megfelelő oldalak metszőpontjai három, ugyanegy ponton keresztül menő egyenesen fekszenek«.

szögpontjának a másik két háromszögnek egy-egy szögpontja felel meg, és a meg nem felelő szögpontok hat egyenesen fekszenek, melyek egy kúpszeletnek érintői (egy BRIANCHON-hatoldalt képeznek), akkor a háromszögek ugyanegy collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectivásak, s így a megfelelő szögpontok is hármassával oly egyeneseken fekszenek, melyek egymást hármassával egy egyenes három pontjában metszik«.

Ha ama két csoportban felírt háromszögeket tekintjük, azt látjuk, hogy az első, illetve második csoportban levő háromszögek oldalai az 1 3 5 pontok összekötő egyenesei a 2 4 6, 4 6 2, 6 2 4, illetve 2 6 4, 6 4 2, 4 2 6 pontokkal. Továbbá mindegyik háromszögnek oldalain rajta fekszenek a PASCAL-hatszögnek szögpontjai.

Kérdés: *Hány ily Δ háromszög található az egész configurációban, és hányféleképp lehet ezeket hármásával a fentebbi módon csoportosítani?*

16. Az 123456 pontnak tizenöt összekötő egyenese van. Minden ily egyenes, a négy másik pontot összekötő három egyenes-párral egy-egy háromszöget képez, a melynek oldalain rajta fekszik mind a hat pont. Ama tizenöt egyenesnek tehát bármelyike három Δ -háromszögnek oldala, s így ezeknek száma $15 \cdot 3 : 3 = 15$.

A 15 Δ -háromszögnek 45 szögpontja mind PASCAL-pont, a melyeknek mindegyikén négy PASCAL-egyeses megy keresztül. Így: az (12, 45) PASCAL-ponton keresztül mennek a

$$p^{II} = 123456, \quad a_3^{III} = 126543, \quad b_3^{VI} = 126453, \quad c_3^I = 123546$$

PASCAL-egyesesek, tehát: *a teljes PASCAL-hatszög hatvan PASCAL-egyesese egymást négyesével a tizenöt Δ -háromszög negyvenöt szögpontjában metszi; mindenik PASCAL-egyesesen három ily szögpont (PASCAL-pont) fekszik. ($4 \cdot 45 = 3 \cdot 60$).*

A mi pedig ama csoportok számát illeti, a melyekre a tizenöt Δ -háromszög hármásával osztható oly módon, hogy minden csoport háromszögei páronként perspectivásak legyenek: az 123456 pont közül kiválasztunk hármát és ezeket a megmaradt hárommal, valamint ezeknek, cyclicus felcserélésük által nyert, complexióival összekötjük; a nyert összekötő egyenesek az ily háromszög-csoportoknak oldalai. Ennélfogva:

A tizenöt Δ -háromszög hármásával húsz oly csoportba osztható, hogy mindegyik csoport háromszögei ugyanegy collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivásak; a húsz collineatio-középpont, valamint a collineatio-tengelyek húsz metszőpontja a húsz STEINER-pont.

17. Mindenik Δ -háromszög négy csoportban fordul elő; pl. az 123456 oldalú Δ -háromszög, melyet [123456]-tal akarunk jelölni, fellép a következő csoportokban:

$$\begin{array}{cccc} [12\ 34\ 56] & [12\ 34\ 65] & [12\ 34\ 56] & [12\ 43\ 65] \\ [45\ 61\ 32] & [64\ 15\ 32] & [53\ 16\ 42] & [45\ 62\ 13] \\ [36\ 52\ 14] & [35\ 62\ 14] & [46\ 52\ 13] & [63\ 15\ 42]. \end{array}$$

E perspectivás háromszögekhez tartozó collineatio-tengelyek

$$\begin{aligned} p^{\text{II}} &= 123456 & a_1^{\text{III}} &= 123465 & a_2^{\text{III}} &= 124356 & a_3^{\text{III}} &= 126543 \\ p^{\text{III}} &= 143652 & a_1^{\text{II}} &= 143562 & a_2^{\text{II}} &= 134652 & a_3^{\text{II}} &= 156342 \\ p^{\text{I}} &= 163254 & a_1^{\text{IV}} &= 153264 & a_2^{\text{V}} &= 164253 & a_2^{\text{VI}} &= 136245, \end{aligned}$$

melyek egymást a $PA_1A_3A_3$ betűkkel jelölt STEINER-pontokban metszik.

E perspectivás háromszögekhez tartozó vetítősugarak:

$$\begin{aligned} \pi^{\text{IV}} &= 163452 & \alpha_1^{\text{I}} &= 126435 & \alpha_2^{\text{VI}} &= 125346 & \alpha_3^{\text{V}} &= 154362 \\ \pi^{\text{V}} &= 123654 & \alpha_1^{\text{VI}} &= 146532 & \alpha_2^{\text{I}} &= 135642 & \alpha_3^{\text{IV}} &= 124563 \\ \pi^{\text{VI}} &= 143256 & \alpha_2^{\text{V}} &= 156234 & \alpha_2^{\text{IV}} &= 165243 & \alpha_3^{\text{I}} &= 134265. \end{aligned}$$

Egymást a $\Pi A_1 A_2 A_3$ STEINER-pontokban metszik, melyek az előbbieknél megfelelő STEINER-ellenpontjai. A $\Delta = [123456]$ háromszögnek ez utóbbi tulajdonságát a következőképp fejezhetjük ki: »A $\Delta = [123456]$ szögpontjaiból kisugárzó tizenkét PASCAL-egyenes egymást a $\Pi A_1 A_2 A_3$ STEINER-pontban metszi«. (9. ábra.)

Ámde a tizenkét PASCAL-egyenes egymást hármasával még négy KIRKMAN-pontban:

$$\begin{aligned} P^{\text{I}} &= (\alpha_1^{\text{I}} \alpha_2^{\text{I}} \alpha_3^{\text{I}}), & A_1^{\text{IV}} &= (a_2^{\text{IV}} \alpha_3^{\text{IV}} \pi^{\text{IV}}), & A_2^{\text{V}} &= (\alpha_3^{\text{V}} \alpha_1^{\text{V}} \pi^{\text{V}}), \\ & & A_3^{\text{VI}} &= (\alpha_1^{\text{VI}} \alpha_2^{\text{I}} \pi^{\text{VI}}) \end{aligned}$$

metszi, melyek a $p^{\text{I}}, a_1^{\text{IV}}, a_2^{\text{V}}, a_3^{\text{VI}}$ PASCAL-egyenesekhez vannak rendelve. Ennélfogva:

Minden Δ -háromszög szögpontjaiból kisugárzó tizenkét PASCAL-egyenes egymást hármasával négy STEINER- és négy KIRKMAN-pontban metszi.

18. Vegyük most az

$$\begin{array}{ccc} 56 & 34 & 12 \\ a_1^{\text{II}} = 143562 & a_2^{\text{II}} = 134652 & a_3^{\text{III}} = 156342 \\ a_1^{\text{III}} = 123465 & a_2^{\text{III}} = 124356 & a_3^{\text{III}} = 126543 \end{array}$$

oldalú háromszögeket tekintetbe.

Ezeknek elseje a második és harmadik háromszöggel perspectivás, mert a megfelelő oldalak metszéspontjai a $p^{\text{III}} = 143652$, illetve $p^{\text{II}} = 123456$ PASCAL-egyenesben fekszenek. Ennélfogva az első és második, valamint az első és harmadik háromszög meg nem felelő oldalainak metszéspontjai (2.) egy-egy PASCAL-hatszögnek szögpontjai. Ámde e szögpontok mindkét esetben ugyanazok, mert

| | |
|--|---------------|
| $a_2^{\text{II}}, a_3^{\text{III}}$ és 5 6 metszéspontja | (5 6, 1 3) |
| $a_3^{\text{II}}, a_1^{\text{III}}$ és 3 4 | » (3 4, 1 5) |
| $a_1^{\text{II}}, a_2^{\text{III}}$ és 1 2 | » (1 2, 5 3) |
| $a_3^{\text{II}}, a_2^{\text{III}}$ és 5 6 | » (5 6, 2 4) |
| $a_2^{\text{II}}, a_1^{\text{III}}$ és 1 2 | » (1 2, 6 4) |
| $a_1^{\text{II}}, a_3^{\text{III}}$ és 3 4 | » (3 4, 2 6); |

tehát a második és harmadik háromszög meg nem felelő oldalainak metszéspontjai egy PASCAL-hatszögnek szögpontjai, s így e két utóbbi háromszög egy P_1^1 collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivás, vagyis a megfelelő

$$a_2^{\text{II}}, a_1^{\text{III}}; a_2^{\text{II}}, a_2^{\text{III}}; a_3^{\text{II}}, a_3^{\text{III}}$$

oldalok metszéspontjai egy egyenesen fekszenek. (8. ábra.)

De ha három háromszög meg nem felelő oldalainak metszéspontjai, egy PASCAL-hatszögnek szögpontjai, akkor (15.) a háromszögek ugyanegy collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivásak és a collineatio-tengelyek egymást ugyanegy pontban metszik. Ebből pedig az következik, hogy a

$$p^{\text{II}} p^{\text{III}}, a_1^{\text{II}} a^{\text{III}}, a_2^{\text{II}} a_2^{\text{III}}, a_3^{\text{II}} a_3^{\text{III}}$$

PASCAL-egyeneseknek metszéspontjai, azaz a P, A_1, A_2, A_3 STEINER-pontok ugyanegy egyenesben fekszenek. Oly egyenest, a melyen négy STEINER-pont fekszik: STEINER-*egyenesnek* neveznek.

Miután a teljes PASCAL-hatszög tizenöt Δ háromszöget határoz meg és e háromszögek mindegyike, mint láttuk, egy STEINER-egyeneshez vezet, a STEINER-*egyenesek száma tizenöt*. Ennél fogva:

*A húsz STEINER-pont négyesével tizenöt STEINER-egyenesen fekszik; minden STEINER-ponton három STEINER-egyenes megy keresztül (15.4 = 20.3).*¹

A tizenöt STEINER-egyenesből és húsz STEINER-pontból álló (15₄, 20₃) configuratio, három, páronként ugyanegy collineatio-középpontra perspectivás háromszögből származtatható le; e háromszögek oldalai, a collineatio-tengelyek és vetítősugarak, a configuratio egyenesei.

¹ PLÜCKER: »Ueber ein neues Princip der Geometrie«; CRELLE's Journal, V. kötet; vagy SCHRÖTER: »Theorie der Kegelschnitte« 28. §.

Ezt a konfiguratiót *HESSE-configurációnak* nevezzük és H-val jelöljük, mert HESSE ismerte fel a STEINER-pontok és egyeneseknek a tételben kifejezett helyzetét.¹

Jegyzet: 1. Azt a két II. és III. DESARGUES-configuratiót, melyeknek egyeneseit felhasználtuk annak a tételnek bebizonyításánál, hogy a $PA_1A_2A_3$ STEINER-pontok egy STEINER-egyenesen fekszenek, továbbá a $\Delta = [12\ 34\ 56]$ háromszöget a $|PA_1A_2A_3|$ STEINER-egyeneshez »rendelt«-nek nevezzük.

2. A STEINER-egyeneseket általában σ -val, a $|PA_1A_2A_3|$ STEINER-egyeneset $\sigma^{II, III}$ -mal, az $[12\ 34\ 56]$ háromszöget $\Delta^{II, III}$ -mal jelöljük, a mely jelölésben a mutatók a hozzárendelt DESARGUES-configurációnak mutatói.

3. A 17. pontban kimutattuk, hogy a $\sigma^{II, III} = |PA_1A_2A_3|$ STEINER-egyeneshez rendelt $\Delta^{II, III}$ háromszög szögpontjaiból kisugárzó tizenkét PASCAL-egyenes egymást hármásával a $PA_1A_2A_3$ STEINER-pontok $\Pi A_1A_2A_3$ ellenpontjaiban és a $P^I A_1^IV A_2^V A_3^VI$ KIRKMAN-pontokban metszi. A $\Pi A_1A_2A_3$, valamint a $P^I A_1^IV A_2^V A_3^VI$ négyszöget és a $p^I a_2^IV a_2^V a_3^VI$ négyoldal a $\sigma^{II, III}$ STEINER-egyeneshez rendeltnek nevezzük és rövidség kedvéért $S^{II, III}$ $V^{II, III}$, illetve $v^{II, III}$ betűkkel jelöljük. Az egész konfigurációban tizenöt ily S és V négyszög, valamint v négyoldal van, melyek az egyes σ STEINER-egyenesekhez vannak rendelve.

7. A Salmon-pontokról.

19. A $\sigma^{II, III}$ STEINER-egyenesen fekvő $PA_1A_2A_3$ STEINER-pontokhoz a $pa_1a_2a_3$ CAYLEY-egyenesek vannak rendelve, melyekről kimutatható, hogy egymást egy $\Sigma^{II, III}$ pontban, úgynevezett SALMON-pontban metszik. Azokat a $\sigma^{II, III}$ STEINER-egyeneshez »rendelt«-nek nevezzük.

Ugyanis az

$$\begin{array}{lll} a_1^{IV} = 153264 & b^{III} = 152364 & c_1^{II} = 162354 \\ a_2^V = 135246 & b_2^{III} = 142536 & c_2^{II} = 132546 \\ a_3^{VI} = 136245 & b_3^{III} = 145263 & c_3^{II} = 154236 \end{array}$$

PASCAL-egyenesek közül az 1-ső, 2-dik és 3-dik sorban felírtak egymást a (23, 14), (25, 16), (54, 36) pontokban metszik, melyek a $p^I = 163254$ PASCAL egyenesen fekszenek.

¹ CRELLE's Journal; XLI. kötet.

Ebből pedig következik, hogy az

$$a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}, \quad b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III}, \quad c_1^{II} c_2^{II} c_3^{III}$$

háromszögek a p^I collenatio-tengelyre vonatkozólag páronként perspektívák és így e perspektívák háromszögekhez tartozó collineatio-középpontok egy egyenesben fekszenek.

Ámde az 1-ső és 2-dik, 1-ső és 3-dik, 2-dik és 3-dik háromszöghöz tartozó projiciálósugarak

$$\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III}, \quad \beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II}, \quad a_1 a_2 a_3.$$

mert

| | | | | | |
|--------------------|----------------------|-------------------------------------|----------------------|----------------------------------|---------|
| a γ_1^{III} | egyenes összeköti az | $A_1^{III} = (b_2^{III} b_3^{III})$ | KIRKMAN-pontot és az | $(13, 42) = (a_2^V a_3^{VI})$ | pontot, |
| a γ_2^{III} | » | $A_2^{III} = (b_3^{III} b_1^{III})$ | » | $(15, 26) = (a_3^{VI} a_1^{IV})$ | » |
| a γ_3^{III} | » | $A_3^{III} = (b_1^{III} b_2^{III})$ | » | $(35, 64) = (a_1^{IV} a_2^V)$ | » |
| a β_1^{II} | » | $A_1^{II} = (c_2^{II} c_3^{II})$ | » | $(13, 42) = (a_2^V a_3^{VI})$ | » |
| a β_2^{II} | » | $A_2^{II} = (c_3^{II} c_1^{II})$ | » | $(15, 26) = (a_3^{VI} a_1^{IV})$ | » |
| a β_3^{II} | » | $A_3^{II} = (c_1^{II} c_2^{II})$ | » | $(35, 64) = (a_1^{IV} a_2^V)$ | » |
| az a_1 | » | A_1^{II} és A_1^{III} | » | | |
| az a_2 | » | A_2^{II} és A_2^{III} | » | | |
| az a_3 | » | A_3^{II} és A_3^{III} | » | | |

Ennélfogva az $a_1 a_2 a_3$ CAYLEY-egyenesek egymást a $P^{III} = (\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III})$, $P^{II} = (\beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II})$ KIRKMAN-pontok összekötő egyenesén, vagyis a p CAYLEY-egyenesen metszik.

E szerint: *Egy STEINER-egyenesen fekvő négy STEINER-ponthoz rendelt négy CAYLEY-egyenes egymást egy SALMON-pontban metszi; minden CAYLEY-egyenesen három SALMON-pont fekszik.*

A húsz CAYLEY-egyenes és tizenöt SALMON-pont egy $H' = (20_3, 15_4)$ konfigurációt képez, mely reciproca alakzata az előbbi $H = (15_4, 20_3)$ konfigurációnak, s három, páronként ugyanarra a collineatio-tengelyre perspektívák háromszögnek oldalaiból, a közös collineatio-tengelyből és a collineatio-középpontokat tartó egyenesből áll.

20. Más úton is kimutatható, hogy a $p a_1 a_2 a_3$ CAYLEY-egyenesek egymást egy pontban metszik. Ugyanis az

$$\begin{array}{c} A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI} \\ (34, 12) \quad (12, 56) \quad (56, 34) \\ A_1 A_2 A_3 \end{array}$$

háromszögek (9. ábra) közül az első kettő perspectivás, mert az oszlopokban fekvő szögpontok a $\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI}$ egyeneseken vannak. Ennélfogva a meg nem felelő szögpontok összekötő egyenesei $\alpha_1^V \alpha_1^{VI} \alpha_2^{VI} \alpha_2^{IV} \alpha_3^{IV} \alpha_3^V$ egy kúpszeletet burkolnak be (2.). De ez utóbbi egyenesek a harmadik háromszögnek szögpontjain is keresztül mennek; miért is (15) a harmadik háromszög az előbbi kettővel perspectivás és a collineatio-középpontok egy egyenesben fekszenek. Ámde az 1-ső és 3-ik, valamint a 2-ik és 3-ik háromszög megfelelő szögpontjai az $a_1 a_2 a_3$ CAYLEY-egyenesen, illetve az $\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I$ PASCAL-egyenesen vannak, minek következtében az $a_1 a_2 a_3$ egyenesek egymást a $P^I = (\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I)$ KIRKMAN pontnak és Π STEINER-pontnak összekötő egyenesén, a $p = (\Pi P^I P^{II} P^{III})$ CAYLEY-egyenesen metszik.

21. Az imént leírt configurációban előfordul négy CAYLEY-egyenes $p a_1 a_2 a_3$, melyek egymást egy $\Sigma^{II, III}$ SALMON-pontban metszik;

| | | | | | |
|----------|----------------------------|-------|-------------------|------------|---------------|
| a p | CAYLEY-egyenesen fekszik a | Π | STEINER-pont és a | P^I | KIRKMAN-pont, |
| az a_1 | » | A_1 | » | A_1^{IV} | » |
| az a_2 | » | A_2 | » | A_2^V | » |
| az a_3 | » | A_3 | » | A_3^{VI} | » |

mely utóbbiak az $S^{II, III} = \Pi A_1 A_2 A_3$, $V^{II, III} = P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}$ négyszögeknek szögpontjai. E négyszögek a $\Delta^{II, III} = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6]$ háromszöggel perspectivás háromszögekre bonthatók; a collineatio-középpontok a $V^{II, III}$ és $S^{II, III}$ négyszögek szögpontjai. Ennélfogva:

Egy Σ SALMON-ponton keresztül menő négy CAYLEY-egyenesen egy-egy STEINER-pont fekszik, melyek egy S -négyszögnek szögpontjai. E négyszög négy háromszögre bomlik, melyek ugyanegy Δ -háromszöggel perspectivásak; a collineatio-középpontok ama CAYLEY-egyeneseken fekvő oly KIRKMAN-pontok, a melyek egy V négyszögnek szögpontjai; a projiciáló sugarak e KIRKMAN-pontokból kisugárzó PASCAL-egyenesek.

Jegyzet. A IV. táblázat első oszlopában a STEINER-egyeneseken σ -n fekvő STEINER-pontok; a 2-ikben egy SALMON-pontban Σ -ban egymást metsző CAYLEY-egyenesek; a 3-, 4- és 5-ikben az ezekhez rendelt V , v és Δ négyszögek, négyszögek és háromszögek szögpontjai, illetve oldalai; végre a 6-ikben az ezekhez rendelt DESARGUES-configurációk jelző számai találhatók.

| A hozzájuk rendelt | | | | | |
|---|--|--|--|---------------------|--|
| STEINER-egyenesek c | A SALMON-pontok Σ | V négyzögek szögpontjai | v négyoldalú oldalai | Δ háromszög oldalai | DESARGUES-féle configurációk jelző száma |
| PA ₁ A ₂ A ₃ | (p a ₁ a ₂ a ₃) | P ^I A ₁ ^{IV} A ₂ ^V A ₃ ^{VI} | p ^I a ^{IV} ₁ a ^V ₂ a ^{VI} ₃ | [12 34 56] | II, III |
| PB ₁ B ₂ B ₃ | (p b ₁ b ₂ b ₃) | P ^{II} B ₁ ^{IV} B ₂ ^V B ₃ ^{VI} | p ^{II} b ^{IV} ₁ b ^V ₂ b ^{VI} ₃ | [14 36 52] | III, I |
| PC ₁ C ₂ C ₃ | (p c ₁ c ₂ c ₃) | P ^{III} C ₁ ^{IV} C ₂ ^V C ₃ ^{VI} | p ^{III} c ^{IV} ₁ c ^V ₂ c ^{VI} ₃ | [16 32 54] | I, II |
| II A ₁ B ₂ Γ ₃ | (π α ₁ β ₁ γ ₁) | II ^{IV} A ₁ ^I B ₂ ^{II} Γ ₃ ^{III} | π ^{IV} α ^I ₁ β ^{II} ₂ γ ^{III} ₃ | [14 32 56] | V, VI |
| II A ₂ B ₂ Γ ₂ | (π α ₂ β ₂ γ ₂) | II ^V A ₂ ^I B ₂ ^{II} Γ ₂ ^{III} | π ^V α ^I ₂ β ^{II} ₂ γ ^{III} ₂ | [16 34 52] | VI, IV |
| II A ₃ B ₃ Γ ₃ | (π α ₃ β ₃ γ ₃) | II ^{VI} A ₃ ^I B ₃ ^{II} Γ ₃ ^{III} | π ^{VI} α ^I ₃ β ^{II} ₃ γ ^{III} ₃ | [12 36 54] | IV, V |
| B ₁ C ₁ A ₂ A ₃ | (b ₁ c ₁ α ₂ α ₃) | B ₁ ^{III} C ₁ ^{II} A ₂ ^{VI} A ₃ ^V | b ₁ ^{III} c ₁ ^{II} α ₂ ^{VI} α ₃ ^V | [13 24 56] | I, IV |
| C ₁ A ₁ B ₂ B ₃ | (c ₁ a ₁ β ₂ β ₃) | C ₁ ^I A ₁ ^{III} B ₂ ^{VI} B ₃ ^V | c ₁ ^I a ₁ ^{III} β ₂ ^{VI} β ₃ ^V | [14 35 26] | II, IV |
| A ₁ B ₁ Γ ₂ Γ ₃ | (a ₁ b ₁ γ ₂ γ ₃) | A ₁ ^{II} B ₁ ^I Γ ₂ ^{VI} Γ ₃ ^V | a ₁ ^{II} b ₁ ^I γ ₂ ^{VI} γ ₃ ^V | [15 46 23] | III, IV |
| B ₂ C ₂ A ₃ A ₁ | (b ₂ c ₂ α ₃ α ₁) | B ₂ ^{III} C ₂ ^{II} A ₃ ^{IV} A ₁ ^{VI} | b ₂ ^{III} c ₂ ^{II} α ₃ ^{IV} α ₁ ^{VI} | [15 26 34] | I, V |
| C ₂ A ₂ B ₃ B ₁ | (c ₂ a ₂ β ₃ β ₁) | C ₂ ^I A ₂ ^{III} B ₃ ^{IV} B ₁ ^{VI} | c ₂ ^I a ₂ ^{III} β ₃ ^{IV} β ₁ ^{VI} | [13 25 46] | II, V |
| A ₂ B ₂ Γ ₃ Γ ₁ | (a ₂ b ₂ γ ₃ γ ₁) | A ₂ ^{II} B ₂ ^I Γ ₃ ^{IV} Γ ₁ ^{VI} | a ₂ ^{II} b ₂ ^I γ ₃ ^{IV} γ ₁ ^{VI} | [16 24 35] | III, V |
| B ₃ C ₃ A ₁ A ₂ | (b ₃ c ₃ α ₁ α ₂) | B ₃ ^{III} C ₃ ^{II} A ₁ ^V A ₂ ^{IV} | b ₃ ^{III} c ₃ ^{II} α ₁ ^V α ₂ ^{IV} | [12 35 64] | I, VI |
| C ₃ A ₃ B ₁ B ₂ | (c ₃ a ₃ β ₁ β ₂) | C ₃ ^I A ₃ ^{III} B ₁ ^{VI} B ₂ ^{IV} | c ₃ ^I a ₃ ^{III} β ₁ ^{VI} β ₂ ^{IV} | [15 24 63] | II, VI |
| A ₃ B ₃ Γ ₁ Γ ₂ | (a ₃ b ₃ γ ₁ γ ₂) | A ₃ ^{II} B ₃ ^I Γ ₁ ^V Γ ₂ ^{IV} | a ₃ ^{II} b ₃ ^I γ ₁ ^V γ ₂ ^{IV} | [13 45 62] | III, VI |

(IV. táblázat.)

8. A Desargues- és Hesse-configurációk kölcsönös helyzete.

22. Kimutattuk a 13. pontban, hogy minden CAYLEY-egyenes a hozzárendelt STEINER-pontnak ellenpontján megy keresztül. Ebből pedig az következik, hogy a $H=(15_4, 20_3)$ és $H'=(20_3, 15_4)$ HESSE-konfigurációk összefüggnek egymással, még pedig:

A STEINER-egyenesek és pontok képezte $H=(15_4, 30_3)$, és a CAYLEY-egyenesek és SALMON pontok képezte $H'=(20_3, 15_4)$ HESSE-configurációk együtt egy $(35_4, 35_4)$ konfigurációt alkotnak. Ennek 35 egyenese és 35 pontja a 15 STEINER- és 20 CAYLEY-egyenes, illetve a 20 STEINER- és 15 SALMON-pont. Mindegyik STEINER-egyenesen négy STEINER-pont, mindegyik CAYLEY-egyenesen három SALMON- és egy STEINER-pont fekszik; mindegyik STEINER-ponton három STEINER- és egy CAYLEY-egyenes, mindegyik SALMON-ponton négy CAYLEY-egyenes megy keresztül.

E configuratio nem egyéb, mint három, páronként ugyanegy collineatio-középpontra perspectivás tetraéder éleinek és szögpontjainak, továbbá a megfelelő lapok- és élek metszővonalainak és pontjainak, végül a projiciáló sugaraknak és a collineatio-síkok közös metszővonalának központi vagy parallel projectiója egy síkra.

A $(35_4, 35_4)$ configuratio a következő módon szerkeszthető meg: a sík egy P pontján keresztül négy egyenest: $PA_1A_2A_3$, $PB_1B_2B_3$, $PC_1C_2C_3$ és π -t húzunk. Ezután három négyszöget rajzolunk, melyeknek szögpontjai amaz egyeneseken fekszenek, oldalai: A_iB_i , B_iC_i , C_iA_i , α_i , β_i , γ_i . Az $(\alpha_i \beta_i \gamma_i)$ szögpont a π egyenesen fekszik és $i=1, 2, 3$. E három négyszöget négy, a P pontra páronként perspectivás háromszögre bonthatjuk, melyeknek oldalai: A_iB_i , B_iC_i , C_iA_i ; A_iB_i , α_i , β_i ; B_iC_i , β_i , γ_i ; C_iA_i , γ_i , α_i ($i=1, 2, 3$). A collineatio-tengelyek $|A_iB_i\Gamma_i|$, a_i, b_i, c_i ($i=1, 2, 3$), melyek egymást a p egyenesen fekvő II, $(a_1a_2a_3)$, $(b_1b_2b_3)$, $(c_1c_2c_3)$ collineatio-középpontokban metszik.

23. Vizsgáljuk most meg, hogy mily helyzetű egy $(10_3, 10_3)$ DESARGUES-konfiguratio a két H, H' HESSE-konfiguratio irányában.

A II. DESARGUES-konfiguratio tíz egyenese közül

| | | | |
|-----------------------------------|----------------|---------------------|----------------|
| $p'' a_1'' a_2'' a_3''$ | megfelelőleg a | $PA_1 A_2 A_3$ | STEINER-ponton |
| $p'' c_1'' c_2'' c_3''$ | » | $a PC_1 C_2 C_3$ | » |
| $c_1'' a_1'' \beta_2'' \beta_3''$ | » | $a C_1 A_1 B_2 B_3$ | » |
| $c_2'' a_2'' \beta_3'' \beta_1''$ | » | $a C_2 A_2 B_3 B_1$ | » |
| $c_3'' a_3'' \beta_1'' \beta_2''$ | » | $a C_3 A_3 B_1 B_2$ | » |

megy keresztül; e STEINER-pontok pedig egy-egy olyan egyenesen fekszenek, melyek egy teljes ötoldal képeznek. (6. ábra.)

Mint hogy a DESARGUES-configurációnak tíz egyenese ennek a teljes ötoldalnak tíz szögpontján megy keresztül, a DESARGUES-configuratio az ötoldal körül van írva.

Amaz ötoldal és a DESARGUES-configuratio együttvéve egy (15₄, 20₃) configurációt képez; a három perspectivás háromszög pl. $a_1'' a_2'' a_3''$, $c_1'' c_2'' c_3''$, $B_1 B_2 B_3$; a projiciáló sugarak: $\beta_1'' \beta_2'' \beta_3''$; a collineatio-tengelyek: p'' , σ'' , $\sigma'' = |PA_1 A_2 A_3|$, $\sigma'' = |PC_1 C_2 C_3|$.

A II. DESARGUES-configurációnak tíz KIRKMAN-pontja közül

| | | | |
|---------------------------|----------------|-----------------------------|------------------|
| $P'' A_1'' A_2'' A_3''$ | megfelelőleg a | $pa_1 a_2 a_3$ | CAYLEY-egyenesen |
| $P'' C_1'' C_2'' C_3''$ | » | $pc_1 c_2 c_3$ | » |
| $C_1'' A_1'' B_2'' B_3''$ | » | $a c_1 a_1 \beta_2 \beta_3$ | » |
| $C_2'' A_2'' B_3'' B_1''$ | » | $a c_2 a_2 \beta_3 \beta_1$ | » |
| $C_3'' A_3'' B_1'' B_2''$ | » | $a c_3 a_3 \beta_1 \beta_2$ | » |

fekszik; ezek egy-egy SALMON-ponton mennek keresztül és egy teljes ötszögnek szögpontjai. (7. ábra.)

Mint hogy a DESARGUES-configurációnak tíz KIRKMAN-pontja a teljes ötszögnek tíz oldalán fekszik, a DESARGUES-configuratio az ötszögbe be van írva.

Amaz ötszög és a DESARGUES-configuratio együttvéve egy (20₃, 15₄) configurációt képez; a perspectivás háromszögek pl. $a_1'' a_2'' a_3''$, $c_1'' c_2'' c_3''$, $\beta_1 \beta_2 \beta_3$; a collineatio-tengely p'' ; a collineatio-középpontok: $P'' = (\beta_1'' \beta_2'' \beta_3'')$, $\Sigma'' = (pa_1 a_2 a_3)$, $\Sigma'' = (pc_1 c_2 c_3)$.

A nyert eredményeket ezek után a következőleg fejezhetjük ki:

A STEINER-egyenesekből és pontokból álló $H = (15_4, 20_3)$ configuratio és a CAYLEY-egyenesekből és SALMON-pontokból álló $H' = (20_3, 15_4)$ configuratio hat teljes ötoldalra, illetve hat teljes ötszögre bontható. A PASCAL-egyenesekből és KIRKMAN-pontokból álló hat (10₃, 10₃) DESARGUES-configuratio min-

degyike egy ily ötoldal körül, illetve ötszögbe be van írva. Ugyanegy DESARGUES-configurációba írt, illetve körül írt ötoldal és ötszög oldalai és szögpontjai, valamint szögpontjai és oldalai egymáshoz rendelt STEINER-egyenesek és SALMON-pontok, illetve STEINER-pontok és CAYLEY-egyenesek.

Igy pl. a II. DESARGUES-configuratio a $\sigma^I, II, III, IV, V, VI$ ötoldalba be van írva és a $\Sigma^I, II, III, IV, V, VI$ ötszög körül van írva.

24. A P^{II} KIRKMAN-ponton keresztül menő $\beta_1^{II}, \beta_2^{II}, \beta_3^{II}$ PASCAL-egyeneseken a 23. pontban tekintetbe vett KIRKMAN- és STEINER-pontokon kívül még három-három PASCAL-pont fekszik, t. i.:

β_1^{II} -en fekszenek az $A_1^{II} C_1^{II} B_1$ (15, 46), (13, 24), (25, 36) pontok
 β_2^{II} -en » az $A_2^{II} C_2^{II} B_2$ (24, 35), (15, 26), (14, 36) »
 β_3^{II} -en » az $A_3^{II} C_3^{II} B_3$ (13, 26), (35, 46), (14, 25) »

melyek a P^{II} középpontra perspectivás: $A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II} = c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II}$, $C_1^{II} C_2^{II} C_3^{II} = a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II}$, $B_1 B_2 B_3$, $c_1^{IV} c_2^V c_3^{VI}$, $a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}$, $\Delta^I, III = [14\ 25\ 36]$ háromszögeknek szögpontjai.

E háromszögek közül:

$$\left. \begin{array}{l} c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II} \\ a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{perspec-} \\ \text{tivás a} \end{array} \left. \begin{array}{l} a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI} \\ c_1^{IV} c_2^V c_3^{VI} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{perspec-} \\ \text{tivás a} \end{array} \quad p^{II} = |B_1^{II} B_2^{II} B_3^{II}|; \quad \pi = |\Pi^{IV} \Pi^V \Pi^{VI}|$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI} \\ a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II} \\ B_1 B_2 B_3 \end{array} \right\} \gg |PA_1 A_2 A_3|; \quad \left. \begin{array}{l} c_1^{IV} c_2^V c_3^{VI} \\ c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II} \\ B_1 B_2 B_3 \end{array} \right\} \gg |PC_1 C_2 C_3|$$

$$\left. \begin{array}{l} c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II} \\ a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI} \\ [14\ 25\ 36] \end{array} \right\} \gg p^I = 163254; \quad \left. \begin{array}{l} a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II} \\ c_1^{IV} c_2^V c_3^{VI} \\ [14\ 25\ 36] \end{array} \right\} \gg p^{III} = 143652$$

collineatio-tengelyre, melyek egymást a P STEINER-pontban metszik.

A KIRKMAN-pontok számának megfelelőleg hatvan ily configuratio van, melyek azonban egymást részben elfödik.

A p CAYLEY-egyenesen a P^{II} KIRKMAN-ponton kívül még a P^I , P^{III} KIRKMAN-pontok fekszenek; az ezekből levezetett configuratiok az előbbit még a következőkkel egészítik ki: 1. a P^I , P^{III} pontokból kisugárzó $\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I$, $\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III}$ PASCAL-egyenesekkel; 2. a $P^I p^I$ és $P^{III} p^{III}$ collineatio-középpontra és tengelyre perspectivás $b_1^I b_2^I b_3^I$,

$c_1^I c_2^I c_3^I$; $a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III}$, $b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III}$ háromszögekkel; 3. a $b_1^{IV} b_2^V b_3^{VI}$ háromszöggel, mely a $c_1^{IV} c_2^V c_3^{VI}$ és $a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}$ háromszöggel a P^I , π és P^{III} , π -re vonatkozólag perspectivás; 4. a $\Delta^{I, III} = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6]$, $\Delta^{I, II} = [1\ 6\ 3\ 2\ 5\ 4]$ háromszögekkel, melyek egymás között és a $\Delta^{I, III}$ háromszöggel a Π pontra és a $p^I p^{II} p^{III}$ collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspectivásak; végre 5. az $A_1 A_2 A_3$, $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ háromszögekkel, melyek egymás között és a $B_1 B_2 B_3$ háromszögekkel a Π pontra és a $| P A_1 A_2 A_3 |$, $| P B_1 B_2 B_3 |$, $| P C_1 C_2 C_3 |$ tengelyekre vonatkozólag perspectivásak.

E configuratio (új egyenesek hozzáadása nélkül is) magába foglalja már valamennyi STEINER-pontot és egyenest, 39 PASCAL-egyenest és 33 KIRKMAN-pontot, 3 Δ -háromszöget és a π , p CAYLEY-egyeneseket.

9. A V_1 Veronese-pontok és két Desargues-configuratio kölcsönös helyzete.

25. Ama tétel bebizonyításánál, hogy négy STEINER-pont egy egyenesen fekszik (18.) az $[5\ 6\ 3\ 4\ 1\ 2]$, $a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II}$, $a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III}$ háromszögekből indultunk ki, melyek páronként a P_1^I collineatio-középpontra és a p^{III} , p^{II} , $\sigma^{II, III} = | P A_1 A_2 A_3 |$ collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectivásak. De ép így kiindulhattunk volna (8. ábra) az

$$\begin{array}{ccc} [5\ 6\ 1\ 2\ 3\ 4] & [3\ 4\ 5\ 6\ 1\ 2] & [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6] \\ p^{II} a_2^{II} a_3^{II} & p^{II} a_3^{II} a_1^{II} & p^{II} a_1^{II} a_2^{II} \\ p^{III} a_2^{III} a_3^{III} & p^{III} a_3^{III} a_1^{III} & p^{III} a_1^{III} a_2^{III} \end{array}$$

háromszögekből is, melyek az

$$\begin{array}{ccc} A_{11}^{IV} \text{ collineatio-középpont} & \text{és } a_1^{III}, a_1^{II}, \sigma^{II, III} \text{ collineatio-tengelyekre} & \\ A_{21}^V & \text{» } a_2^{III}, a_2^{II}, \sigma^{II, III} & \text{»} \\ A_{31}^{VI} & \text{» } a_3^{III}, a_3^{II}, \sigma^{II, III} & \text{»} \end{array}$$

vonatkozólag perspectivásak.

A négy collineatio-középpont megannyi szögpontja egy

$$V_1^{II, III} = [P_1^I A_{11}^{IV} A_{21}^V A_{31}^{VI}] = [P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}]_1$$

négyszögnek, melynek átlósháromszöge $\Delta^{II, III} = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6]$.

E négyszög mindegyik oldalán két KIRKMAN-pont és a $\Delta^{II, III}$ háromszögnek egy-egy szögpontja fekszik, még pedig:

| | | | | | | |
|---|--|-------|---|---|--------|-----------|
| a | P ^I A ₁ ^{IV} ₁ | oldal | a | C ₁ ^{II} , B ₁ ^{III} , (3 4, 1 2) | pontok | feksznek, |
| a | P ^I A ₂ ^V ₁ | > | a | C ₂ ^{II} , B ₂ ^{III} , (1 2, 5 6) | > | > |
| a | P ^I A ₃ ^{VI} ₁ | > | a | C ₃ ^{II} , B ₃ ^{III} , (5 6, 3 4) | > | > |
| a | A ₂ ^V A ₃ ^{VI} ₁ | > | a | B ₁ ^{II} , Γ ₁ ^{III} , (3 4, 1 2) | > | > |
| a | A ₃ ^{VI} A ₁ ^{IV} ₁ | > | a | B ₂ ^{II} , Γ ₂ ^{III} , (1 2, 5 6) | > | > |
| a | A ₁ ^{IV} A ₂ ^V ₁ | > | a | B ₃ ^{II} , Γ ₃ ^{III} , (5 6, 3 4) | > | > |

Minthogy a teljes PASCAL-hatszög tizenöt STEINER-egyenes szolgáltatót, a V₁-négyeszőgek száma is ugyanannyi. A V₁-négyeszőgeket az illető STEINER-egyenesekhez rendeljük és hatvan szögpontjukat V₁-VERONESE-pontoknak, vagy röviden V₁-pontoknak nevezzük.

A mi a hatvan V₁-pont különös jelölését illeti, megjegyzendő a következő: Egy STEINER-egyenes négy STEINER-pontjából 1. egy v-negyoldal négy oldala, mint négy PASCAL-egyenes és 2. még négy pár PASCAL-egyenes sugárzik ki. Az utóbbi PASCAL-egyenespárok közül három-három két, a STEINER-egyenesre, mint collineatio-tengelyre, és egy V₁ pontra, mint collineatio-középpontra, vonatkozólag perspektívás négyszöget képez. Ezt a V₁ pontot, mint a v négyszög egyik oldalához, ahhoz a PASCAL-egyeneshez rendeljük, mely a negyedik STEINER-ponton megy keresztül, és a PASCAL-egyeneshez rendelt KIRKMAN-pont jelző-betűjével látjuk el, melyhez megkülönböztetésül még egy »1« mutatót függesztünk. Ugyanahhoz a PASCAL-egyeneshez rendelt KIRKMAN- és V₁-pontot egymáshoz rendeltnek fogunk nevezni.

26. A V₁-pontról VERONESE¹ kimutatta, hogy:

Egy STEINER-ponton keresztül menő három PASCAL-egyeneshez oly három V₁-pont van rendelve, mely a STEINER-ponthez rendelt CAYLEY-egyenesen fekszik.

Ugyanis az

$$a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II} = C_1^{II} C_2^{II} C_3^{II}, \quad a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III} = B_1^{III} B_2^{III} B_3^{III}, \\ b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III} = A_1^{III} A_2^{III} A_3^{III}, \quad c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II} = A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II}$$

háromszögek közül az 1-ső és 2-ik, a 2-ik és 3-ik, a 3-ik és 4-ik, a 4-ik és 1-ső perspektívás; a collineatio-középpontok és tengelyek:

$$P_1^I, \quad | A_1 A_2 A_3 |; \quad P^{III} = (\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III}), \quad p^{III}; \quad \Sigma^{II, III} = (a_1 a_2 a_3), \quad p^I; \\ P^{II} = (\beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II}), \quad p^{II};$$

¹ VERONESE: id. m. 36. old.

és, mert a collineatio-tengelyek egymást a P STEINER-pontban metszik, a négy collineatio-középpont ugyanegy egyenesen fekszik.¹ Ámde a három utolsó pont a p CAYLEY-egyenesen fekszik, minek következtében a p egyenes a P₁^I ponton megy keresztül.

Ugyanígy kimutatható, hogy a p egyenes a P₁^{II} és P₁^{III} ponton is keresztül megy, vagyis hogy a P STEINER-pontból kisugárzó p^Ip^{II}p^{III} PASCAL-egyenesekhez rendelt V₁ pontok a P-hez rendelt p CAYLEY-egyenesen fekszenek.

A tételből még az is következik, hogy a $\sigma^{II, III} = |PA_1A_2A_3|$ STEINER-egyeneshez rendelt V₁^{II, III} = [P^IA₁^{IV}A₂^VA₃^{VI}]₁ négyszög szög-pontjai a p a₁a₂a₃ CAYLEY-egyenesekben fekszenek, mely utóbbiak

¹ »Ha a $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$ háromszögek közül $\Delta_1 \Delta_2, \Delta_2 \Delta_3, \Delta_3 \Delta_4, \Delta_4 \Delta_1$ a t₁₂, O₁₂; t₂₃, O₂₃; t₃₄, O₃₄; t₄₁, O₄₁ collineatio-tengelyre es középpontra vonatkozólag perspectivás és a négy collineatio-tengely egymást egy T pontban metszi, akkor a négy collineatio-középpont egy o egyenesen fekszik.«

Bizonyítás :

Ha azt a háromszöget, mely a $\Delta_1 \Delta_2$ háromszögekkel a t₁₂ tengelyre, a $\Delta_3 \Delta_4$ háromszögekkel a t₃₄ tengelyre vonatkozólag perspectivás, Δ_5 -tel jelöljük; továbbá azt a háromszöget, mely a $\Delta_1 \Delta_4$ háromszögekkel, a t₄₁, a $\Delta_2 \Delta_3$ háromszögekkel a t₂₃ tengelyre perspectivás, Δ_6 -tal jelöljük, akkor

| | | | |
|--|-----------------------------|------|---|
| a $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_5$ háromszögek | a t ₁₂ tengelyre | és | O ₁₂ O ₂₅ O ₁₅ középpontokra |
| a $\Delta_3 \Delta_4 \Delta_5$ | » a t ₃₄ | » és | O ₃₄ O ₄₅ O ₃₄ » |
| a $\Delta_1 \Delta_4 \Delta_6$ | » a t ₄₁ | » és | O ₄₁ O ₄₆ O ₁₆ » |
| a $\Delta_2 \Delta_3 \Delta_6$ | » a t ₂₃ | » és | O ₂₃ O ₃₆ O ₂₆ » |

vonatkozólag perspectivások, miért is az egyes sorokban levő középpontok egy egyenesen fekszenek.

Miután a $\Delta_1 \Delta_4 \Delta_5$ háromszögek a t₄₁, O₄₁; t₁₂, O₁₅; t₃₄, O₄₅ collineatio-tengelyekre és középpontokra vonatkozólag perspectivások, és a feltétel szerint a t₄₁t₁₂t₃₄ egyenesek egymást a T pontban metszik, az O₄₁O₁₅O₄₅ pontok egybeesnek, még pedig az O₄₁ pontban.

Ugyanígy kimutatható, hogy az O₂₅O₃₅O₂₃, valamint az O₂₆O₁₂O₁₆ és az O₃₄O₃₆O₄₆ pontok az O₂₃, O₁₂, illetőleg O₃₄ ponttal egyesülnek. Ennélfogva

$$|O_{12} O_{25} O_{15}| \equiv |O_{12} O_{23} O_{41}|, \quad |O_{34} O_{45} O_{35}| \equiv |O_{34} O_{41} O_{23}|,$$

$$|O_{41} O_{46} O_{16}| \equiv |O_{41} O_{34} O_{24}|, \quad |O_{23} O_{36} O_{25}| \equiv |O_{23} O_{34} O_{12}|,$$

a miből már következtetni lehet, hogy az O₁₂O₂₃O₃₄O₄₁ pontok egy egyenesben fekszenek.

egymást a $\sigma^{\text{II}}, \text{III}$ STEINER egyeneshez rendelt $\Sigma^{\text{II}}, \text{III}$ SALMON-pontban metszik. Ennélfogva:

Egy STEINER-egyeneshez rendelt V_1 négyszög szögpontjai azokon a CAYLEY-egyeneseken fekszenek, melyek egymást a STEINER-egyeneshez rendelt SALMON-pontban metszik.

27. Két DESARGUES-configurációnak kölcsönös helyzete ezeket követve állapítható meg.

A $\sigma^{\text{II}}, \text{III} = |P A_1 A_2 A_3|$ STEINER-egyeneshez a $\Sigma^{\text{II}}, \text{III} = (p a_1 a_2 a_3)$ SALMON-pont, a $v^{\text{II}}, \text{III} = p^I a_1^{\text{IV}} a_2^{\text{V}} a_3^{\text{VI}}$ négyoldal, a $V_1^{\text{II}}, \text{III} = [P^I A_1^{\text{IV}} A_2^{\text{V}} A_3^{\text{VI}}]_1$ négyszög és a II. és III. DESARGUES-configuratio van rendelve.

E DESARGUES-configurációkat egy-egy négyszögre és négyoldalra bonthatjuk:

$$\begin{aligned} p^{\text{II}} a_1^{\text{II}} a_2^{\text{II}} a_3^{\text{II}} &= C_1^{\text{II}} C_2^{\text{II}} C_3^{\text{III}} B_1^{\text{II}} B_2^{\text{II}} B_3^{\text{II}}, \\ P^{\text{II}} A_1^{\text{II}} A_2^{\text{II}} A_3^{\text{II}} &= c_1^{\text{II}} c_2^{\text{II}} c_3^{\text{II}} \beta_1^{\text{II}} \beta_2^{\text{II}} \beta_3^{\text{II}}, \\ p^{\text{III}} a_1^{\text{III}} a_2^{\text{III}} a_3^{\text{III}} &= B_1^{\text{III}} B_2^{\text{III}} B_3^{\text{III}} \Gamma_1^{\text{III}} \Gamma_2^{\text{III}} \Gamma_3^{\text{III}}, \\ P^{\text{III}} A_1^{\text{III}} A_2^{\text{III}} A_3^{\text{III}} &= b_1^{\text{III}} b_2^{\text{III}} b_3^{\text{III}} \gamma_1^{\text{III}} \gamma_2^{\text{III}} \gamma_3^{\text{III}}. \end{aligned}$$

A négyoldaloknak

$$p^{\text{II}}, p^{\text{III}}; a_1^{\text{II}}, a_1^{\text{III}}; a_2^{\text{II}}, a_2^{\text{III}}; a_3^{\text{II}}, a_3^{\text{III}}$$

oldalain rajta fekszenek a P, A_1, A_2, A_3 STEINER-pontok, és a négyszögeknek

$$P^{\text{II}}, P^{\text{III}}; A_1^{\text{II}} A_1^{\text{III}}; A_2^{\text{II}}, A_2^{\text{III}}; A_3^{\text{II}}, A_3^{\text{III}}$$

pontjain a p, a_1, a_2, a_3 CAYLEY-egyenesek mennek keresztül.

A négyszögek

$$a_1^{\text{II}}, b_1^{\text{III}}; c_2^{\text{II}}, b_2^{\text{III}}; c_3^{\text{II}}, b_3^{\text{III}}; \beta_1^{\text{II}}, \gamma_1^{\text{III}}; \gamma_2^{\text{II}}, \gamma_2^{\text{III}}; \beta_3^{\text{II}}, \gamma_3^{\text{III}}$$

oldalai egymást a $v^{\text{II}}, \text{III} = p^I a_1^{\text{IV}} a_2^{\text{V}} a_3^{\text{VI}}$ négyoldal szögpontjaiban metszik, miért is ama négyszögeket négy pár a $v^{\text{II}}, \text{III}$ négyoldal oldalaira, mint collineatio-tengelyre, perspectivás háromszögre bonthatjuk; ellenben a négyoldalak

$$C_1^{\text{II}}, B_1^{\text{III}}; C_2^{\text{II}}, B_2^{\text{III}}; C_3^{\text{II}}, B_3^{\text{III}}; B_1^{\text{II}}, \Gamma_1^{\text{III}}; B_2^{\text{II}}, \Gamma_2^{\text{III}}; B_3^{\text{II}}, \Gamma_3^{\text{III}}$$

szögpontjai páronként a $V_1^{\text{II}}, \text{III} = [P^I A_1^{\text{IV}} A_2^{\text{V}} A_3^{\text{VI}}]_1$ négyszög oldalain fekszenek (25.), és e négyoldalak szintén négy pár a $V^{\text{II}}, \text{III}$ négyszög szögpontjaira vonatkozó perspectivás háromszögre bonthatók.

Továbbá az

$$\begin{array}{cccc} a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II} & p^{II} a_2^{II} a_3^{II} & p^{II} a_3^{II} a_1^{II} & p^{II} a_1^{II} a_2^{II} \\ a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III} & p^{III} a_2^{III} a_3^{III} & p^{III} a_3^{III} a_1^{III} & p^{III} a_1^{III} a_2^{III} \end{array}$$

háromszögek, melyekre a $p^{II} a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II}$, $p^{III} a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III}$ négyoldalak bonthatók, perspectivásak a

$$[A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}]_I, [P^I A_2^V A_3^{VI}]_I, [P^I A_3^{VI} A_1^{IV}]_I, [P^I A_1^{IV} A_2^V]_I,$$

háromszögekkel, melyekre a $V_1^{II, III}$ négyszög oszlik; a kimaradt oldalak és szögpontok

$$p^{II}, p^{III}, P_1^{III}; a_1^{II}, a_1^{III}, A_1^{IV}; a_2^{II}, a_2^{III}, A_2^I; a_3^{II}, a_3^{III}, A_3^{VI}$$

a collineatio-tengelyek és középpontok.

Ugyanekképen az

$$\begin{array}{cccc} A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II} & p^{II} A_2^{II} A_3^{II} & p^{II} A_3^{II} A_1^{II} & p^{II} A_1^{II} A_2^{II} \\ A_1^{III} A_2^{III} A_3^{III} & p^{III} A_2^{III} A_3^{III} & p^{III} A_3^{III} A_1^{III} & p^{III} A_1^{III} A_2^{III} \end{array}$$

háromszögek, melyekre a $P^{II} A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II}$, $P^{III} A_1^{III} A_2^{III} A_3^{III}$ négyszögek bonthatók, perspectivásak a $v^{II, III} = p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}$ négyoldalból leszármaztatható

$$a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI} \quad p^I a_2^V a_3^{VI} \quad p^I a_3^{VI} a_1^{IV} \quad p^I a_1^{IV} a_2^V$$

háromszögekkel; a kimaradt

$$P^{II}, P^{III}, p^I; A_1^{II}, A_1^{III}, a_1^{IV}; A_2^{II}, A_2^{III}, a_2^V; A_3^{II}, A_3^{III}, a_3^{VI}$$

szögpontok és oldalak a collineatio-középpontok és tengelyek. Ennélfogva:

Minden STEINER-egyeneshez két DESARGUES configuratio van rendelve, melyek egy-egy négyoldalra és négyszögre bonthatók.

A két négyoldal, melynek oldalai a STEINER-egyenesen fekvő STEINER-pontokon mennek keresztül, négy perspectivás háromszögre oszlik; a collineatio-tengelyek a STEINER-egyenesben fekszenek, a collineatio-középpontok pedig a STEINER-egyeneshez ren-

A két négyszög, melyeknek szögpontjai a STEINER-egyeneshez rendelt SALMON-ponton keresztülmenő CAYLEY-egyeneseken fekszenek, négy perspectivás háromszögre oszlik; a collineatio középpontok a SALMON-pontban egyesülnek, ellenben a collineatio-

delt V_1 négyszögnek szög-pontjai.

E háromszögek még azokkal a háromszögekkel is perspektívásak, a melyekre a V_1 oszlik; a négyoldalnak és a négyszögnek kimaradt oldalai és szögpontjai a collineatio-tengelyek és középpontok.

tengelyek a STEINER-egyeneshez rendelt v négyoldalnak oldalai.

E háromszögek még azokkal a háromszögekkel is perspektívásak, a melyekre a v négyoldal oszlik; a négyszögeknek és a négyoldalnak kimaradt szögpotjai és oldalai a collineatio-középpontok és tengelyek.

28. A 25. pontban kimutattuk, hogy a

$$B_1^{II} \Gamma_1^{III}, B_2^{II} \Gamma_2^{III}, B_3^{II} \Gamma_3^{III}, B_1^{III} C_1^{II}, B_2^{III} C_2^{II}, B_3^{III} C_3^{II}$$

KIRKMAN-pontok a $V_1^{II, III}$ négyoldalnak

$$| A_2^V A_3^{VI} |_1, | A_3^{VI} A_1^{IV} |_1, | P^I A_1^{IV} |_1, | P^I A_2^V |_1, | P^I A_3^{VI} |_1$$

oldalain fekszenek. Amaz egyenesek azonban a következő hat V négyszögnek

$$V^{V, IV} = \Pi^{VI} A_1^I B_1^{II} \Gamma_1^{III}, V^{VI, IV} = \Pi^V A_2^I B_2^{II} \Gamma_2^{III}, \\ V^{IV, V} = \Pi^{VI} A_3^I B_3^{II} \Gamma_3^{III},$$

$$V^{I, IV} = B_1^{III} C_1^{II} A_2^V A_3^V, V^{I, V} = B_2^{III} C_2^{II} A_3^{IV} A_1^{VI}, \\ V^{I, VI} = B_3^{III} C_3^{II} A_1^V A_2^{IV}$$

egy-egy oldalát képezik, valamint fordítva is a $V^{II, III} = P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}$ négyszögnek oldalai egyszersmind a $V_1^{V, VI}, V_1^{VI, IV}, V_1^{I, IV}, V_1^{I, V}, V_1^{I, VI}$ négyszögeknek egy-egy oldalával egyesülnek, úgy hogy a tizenöt V_1 négyszögnek 90 oldala a tizenöt V négyszögnek 90 oldalával egybeesik.

Az V . táblázatban a tizenöt V_1 négyszög, valamint az azoknak oldalain fekvő KIRKMAN-pontok vannak felírva. Ezeket az oldalakat vagy egyeneseket általában g_{01} -gyel jelöljük, két oly egyenest pedig, melyeken egymáshoz rendelt KIRKMAN- és V_1 -pontok fekszenek g_{01}, g'_{01} -gyel.

29. Mielőtt vizsgálatainkat folytatnók, még az ugyanegy STEINER-egyeneshez rendelt Δ háromszög és v négyoldal közötti összefüggést akarjuk bemutatni. Legyenek azok:

$$\Delta^{II, III} = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6] \text{ és } v^{II, III} = p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}.$$

A $p^I = 163542$ PASCAL-egyenesen fekvő

| A t ü s z n e k | | |
|---------------------|--|--|
| $V^I \Gamma_1^{II}$ | $'P_1^I A_{21}^V B_2^{III} C_2^{II}$ | $'P_1^I A_{31}^{VI} B_3^{III} C_3^{II}$ |
| $V^I A_1^{III}$ | $'P_1^{II} B_{21}^V C_2^I A_2^{III}$ | $'P_1^{II} B_{31}^{VI} C_3^I A_3^{III}$ |
| $V^{II} B_1^I$ | $'P_1^{III} C_{21}^V A_2^{II} B_2^I$ | $'P_1^{III} C_{31}^{VI} A_3^{II} B_3^I$ |
| $V^I A_3^V$ | $'\Pi_1^{IV} B_{11}^{II} B_2^{VI} B_3^V$ | $'\Pi_1^{IV} \Gamma_{11}^{III} \Gamma_2^{VI} \Gamma_3^V$ |
| $V A_1^{VI}$ | $'\Pi_1^V B_{21}^{II} B_3^{IV} B_1^{VI}$ | $'\Pi_1^V \Gamma_{21}^{III} \Gamma_3^{IV} \Gamma_1^{VI}$ |
| $V A_2^{IV}$ | $'\Pi_1^{VI} B_{31}^{II} B_1^V B_2^{IV}$ | $'\Pi_1^{VI} \Gamma_{31}^{III} \Gamma_1^V \Gamma_2^{IV}$ |
| $V \Gamma_3^{IV}$ | $'C_{11}^{II} A_{21}^{VI} C_3^I B_2^{IV}$ | $'C_{11}^{II} A_{31}^V C_2^I B_3^{IV}$ |
| $V A_3^{IV}$ | $'A_{11}^{III} B_{21}^{VI} A_3^{II} \Gamma_2^{IV}$ | $'A_{11}^{III} B_{31}^V A_2^{II} \Gamma_3^{IV}$ |
| $V^I B_3^{IV}$ | $'B_{11}^I \Gamma_{21}^{VI} B_3^{III} A_2^{IV}$ | $'B_{11}^I \Gamma_{31}^V B_2^{III} A_3^{IV}$ |
| $V^I \Gamma_1^V$ | $'C_{21}^{II} A_{11}^{IV} C_1^I B_3^V$ | $'C_{21}^{II} A_{11}^{VI} C_3^I B_1^V$ |
| $V A_1^V$ | $'A_{21}^{III} B_{31}^{IV} A_1^{II} \Gamma_3^V$ | $'A_{21}^{III} B_{11}^{VI} A_3^{II} \Gamma_1^V$ |
| $V^{II} B_1^V$ | $'B_{21}^I \Gamma_{31}^{IV} B_1^{III} A_3^V$ | $'B_{21}^I \Gamma_{11}^{VI} B_3^{III} A_1^V$ |
| $V^I \Gamma_2^{VI}$ | $'C_{31}^{II} A_{11}^V C_2^I B_1^{VI}$ | $'C_{31}^{II} A_{21}^{IV} C_1^I B_2^{VI}$ |
| $V A_2^{VI}$ | $'A_{31}^{III} B_{11}^V A_2^{II} \Gamma_1^{VI}$ | $'A_{31}^{III} B_{21}^{IV} A_1^{II} \Gamma_2^{VI}$ |
| $V^{II} B_2^{VI}$ | $'B_{31}^I \Gamma_{11}^V B_2^{III} A_1^{VI}$ | $'B_{31}^I \Gamma_{21}^{IV} B_1^{III} A_2^{VI}$ |

Az alábbi négyszög oldalain
 g_{01} , g'_{01} -en

a következő pontok fekszenek

$V_1^{II, III} = [P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}]_1$
 $V_1^{III, I} = [P^{II} B_1^{IV} B_2^V B_3^{VI}]_1$
 $V_1^{I, II} = [P^{III} C_1^{IV} C_2^V C_3^{VI}]_1$
 $V_1^{V, VI} = [II^V A_1^I B_1^{II} \Gamma_1^{III}]_1$
 $V_1^{VI, IV} = [II^V A_2^I B_2^{II} \Gamma_2^{III}]_1$
 $V_1^{IV, V} = [II^{VI} A_3^I B_3^{II} \Gamma_3^{III}]_1$
 $V_1^{I, IV} = [B_1^{III} C_1^{II} A_2^{VI} A_3^V]_1$
 $V_1^{II, IV} = [C_1^I A_1^{III} B_2^{VI} B_3^V]_1$
 $V_1^{III, IV} = [A_1^{II} B_1^I \Gamma_2^{VI} \Gamma_3^V]_1$
 $V_1^{I, V} = [B_2^{III} C_2^{II} A_3^{IV} A_1^{VI}]_1$
 $V_1^{II, V} = [C_2^I A_2^{III} B_3^{IV} B_1^{VI}]_1$
 $V_1^{III, V} = [A_2^{II} B_2^I \Gamma_3^{IV} \Gamma_1^{VI}]_1$
 $V_1^{I, VI} = [B_3^{III} C_3^{II} A_1^V A_2^{VI}]_1$
 $V_1^{II, VI} = [C_3^I A_3^{III} B_1^V B_2^{IV}]_1$
 $V_1^{III, VI} = [A_3^{II} B_3^I \Gamma_1^V \Gamma_2^{IV}]_1$

$A_{21}^V A_{31}^{VI} B_1^{II} \Gamma_1^{III}$
 $B_{21}^V B_{31}^{VI} \Gamma_1^{III} A_1^I$
 $C_{21}^V C_{31}^{VI} A_1^I B_1^{II}$
 $A_{21}^I B_{11}^{II} C_2^V C_3^{VI}$
 $A_{21}^I B_{21}^{II} C_3^{VI} C_1^{IV}$
 $A_{31}^I B_{31}^{II} C_1^{IV} C_2^V$
 $A_{21}^{VI} A_{31}^V A_1^I \Pi^{IV}$
 $B_{21}^{VI} B_{31}^V B_1^{II} \Pi^{IV}$
 $\Gamma_{21}^{VI} \Gamma_{31}^V \Gamma_1^{III} \Pi^{IV}$
 $A_{31}^{IV} A_{11}^{VI} A_2^I \Pi^V$
 $B_{31}^{IV} B_{11}^{VI} B_2^{II} \Pi^V$
 $\Gamma_{31}^{IV} \Gamma_1^{VI} \Gamma_2^{III} \Pi^V$
 $A_{11}^V A_{21}^{IV} A_3^I \Pi^{VI}$
 $B_{11}^V B_{21}^{IV} B_3^{II} \Pi^{VI}$
 $\Gamma_{11}^V \Gamma_{21}^{IV} \Gamma_3^{III} \Pi^{VI}$

$A_{21}^{VI} A_{11}^{IV} B_2^{II} \Gamma_2^{III}$
 $B_{31}^{VI} B_{11}^{IV} \Gamma_2^{III} A_2^I$
 $C_{31}^{VI} C_{11}^{IV} A_2^I B_2^{II}$
 $B_{11}^{II} \Gamma_1^{III} A_2^V A_3^{VI}$
 $B_{21}^{II} \Gamma_{21}^{III} A_3^{VI} A_1^{IV}$
 $B_{31}^{II} \Gamma_{31}^{III} A_1^{IV} A_2^V$
 $B_{11}^{III} C_{11}^{II} P^I A_1^{IV}$
 $C_{11}^I A_{11}^{III} P^{III} B_1^{IV}$
 $A_{11}^{II} B_{11}^I P^{III} C_1^{IV}$
 $B_{21}^{III} C_{21}^{II} P^I A_2^V$
 $C_{21}^I A_{21}^{III} P^{III} B_2^V$
 $A_{21}^{II} B_{21}^I P^{III} C_2^V$
 $B_{31}^{III} C_{31}^{II} P^I A_3^{VI}$
 $C_{31}^I A_{31}^{III} P^{III} B_3^{VI}$
 $A_{31}^{II} B_{31}^I P^{III} C_3^{VI}$

$A_{11}^{IV} A_{21}^V B_3^{II} \Gamma_3^{III}$
 $B_{11}^{IV} B_{21}^V \Gamma_3^{III} A_3^I$
 $C_{11}^{IV} C_{21}^V A_3^I B_3^{II}$
 $\Gamma_{11}^{III} A_{11}^I B_2^V B_3^{VI}$
 $\Gamma_{21}^{III} A_{21}^I B_3^{VI} B_1^{IV}$
 $\Gamma_{31}^{III} A_{31}^I B_1^{IV} B_2^V$
 $B_{11}^{III} A_{21}^{VI} B_3^I \Gamma_2^{IV}$
 $C_{11}^I B_{21}^{VI} C_3^{II} A_2^{IV}$
 $A_{11}^{II} \Gamma_{21}^{VI} A_3^{III} B_2^{IV}$
 $B_{21}^{III} A_{31}^{IV} B_1^I \Gamma_3^V$
 $C_{21}^I B_{31}^{IV} C_1^{II} A_3^V$
 $A_{21}^{II} \Gamma_{31}^{IV} A_1^{III} B_3^V$
 $B_{31}^{III} A_{11}^V B_2^I \Gamma_1^{VI}$
 $C_{31}^I B_{11}^V C_2^{II} A_1^{VI}$
 $A_{31}^{II} \Gamma_{11}^V A_2^{III} B_1^{VI}$

$P_1^I A_{11}^{IV} B_1^{III} \Gamma_1^{II}$
 $P_1^{II} B_{11}^{IV} C_{11}^I A_1^{III}$
 $P_1^{III} C_{11}^{IV} A_1^{II} B_1^I$
 $\Pi_1^{IV} A_{11}^I A_2^{VI} A_3^V$
 $\Pi_1^V A_{21}^I A_3^{IV} A_1^{VI}$
 $\Pi_1^{VI} A_{31}^I A_1^V A_2^{IV}$
 $B_{11}^{III} A_{21}^V B_2^I \Gamma_3^{IV}$
 $C_{11}^I B_{31}^V C_2^{II} A_3^{IV}$
 $A_{11}^{II} \Gamma_{31}^V A_2^{III} B_3^{IV}$
 $B_{21}^{III} A_{11}^{VI} B_3^I \Gamma_1^V$
 $C_{21}^I B_{11}^{VI} C_3^{II} A_1^V$
 $A_{21}^{II} \Gamma_1^{VI} A_3^{III} B_1^V$
 $B_{31}^{III} A_{21}^{IV} B_1^I \Gamma_2^{VI}$
 $C_{31}^I B_{21}^{IV} C_1^{II} A_2^{VI}$
 $A_{31}^{II} \Gamma_{21}^{IV} A_1^{III} B_2^{VI}$

$P_1^I A_{21}^V B_2^{III} C_2^{II}$
 $P_1^{II} B_{21}^V C_2^I A_2^{III}$
 $P_1^{III} C_{21}^V A_2^{II} B_2^I$
 $\Pi_1^{IV} B_{11}^{II} B_2^{VI} B_3^V$
 $\Pi_1^V B_{21}^{II} B_3^{IV} B_1^{VI}$
 $\Pi_1^{VI} B_{31}^{II} B_1^V B_2^{IV}$
 $C_{11}^{II} A_{21}^{VI} C_3^I B_2^{IV}$
 $A_{11}^{III} B_{21}^{VI} A_3^{II} \Gamma_2^{IV}$
 $B_{11}^I \Gamma_{21}^{VI} B_3^{III} A_2^{IV}$
 $C_{21}^{II} A_{11}^{IV} C_1^I B_3^V$
 $A_{21}^{III} B_{31}^{IV} A_1^{II} \Gamma_3^V$
 $B_{21}^I \Gamma_{31}^{IV} B_1^{III} A_3^V$
 $C_{31}^{II} A_{11}^V C_2^I B_1^{VI}$
 $A_{31}^{III} B_{11}^V A_2^{II} \Gamma_1^{VI}$
 $B_{31}^I \Gamma_{11}^V B_2^{III} A_1^{VI}$

$P_1^I A_{31}^{VI} B_3^{III} C_3^{II}$
 $P_1^{II} B_{31}^{VI} C_3^I A_3^{III}$
 $P_1^{III} C_{31}^{VI} A_3^{II} B_3^I$
 $\Pi_1^{IV} \Gamma_{11}^{III} \Gamma_2^{VI} \Gamma_3^V$
 $\Pi_1^V \Gamma_{21}^{III} \Gamma_3^{IV} \Gamma_1^{VI}$
 $\Pi_1^{VI} \Gamma_{31}^{III} \Gamma_1^V \Gamma_2^{IV}$
 $C_{11}^{II} A_{31}^V C_2^I B_3^{IV}$
 $A_{11}^{III} B_{31}^V A_2^{II} \Gamma_3^{IV}$
 $B_{11}^I \Gamma_{31}^V B_2^{III} A_3^{IV}$
 $C_{21}^{II} A_{11}^{VI} C_3^I B_1^V$
 $A_{21}^{III} B_{11}^{VI} A_3^{II} \Gamma_1^V$
 $B_{21}^I \Gamma_{11}^{VI} B_3^{III} A_1^V$
 $C_{31}^{II} A_{21}^{IV} C_1^I B_2^{VI}$
 $A_{31}^{III} B_{21}^{IV} A_1^{II} \Gamma_2^{VI}$
 $B_{31}^I \Gamma_{21}^{IV} B_1^{III} A_2^{VI}$

(V. táblázat.)

Jegyzet. A »'« jelek az egyes rovatokban azt jelentik, hogy ezek a g_{01} egyenesek »'« jellel vannak ellátva.

A $p^I = 163542$ PASCAL-egyenesen fekvő

$(32, 41)$ pont polarisa a $(34, 12)$ és $(13, 24) = (a_2^V a_3^{VI})$ összekötő egyenese.
 $(16, 25) \gg \gg (12, 56)$ és $(15, 26) = (a_3^{VI} a_1^{IV}) \gg \gg$
 $(63, 54) \gg \gg (56, 34)$ és $(35, 46) = (a_1^{IV} a_2^V) \gg \gg$

E polarisok metszéspontja, mely a p^I -nek polarisa, collineatio-középpontja az $[563412]$, $a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}$ háromszögeknek.

Ugyanígy kimutatható, hogy az a_1^{IV} , a_2^V , a_3^{VI} egyeneseknek polusai egyszersmind collineatio-középpontjai az

$$[563412], p^I a_3^{VI} a_2^V; [341256], p^I a_1^{IV} a_3^{VI}; \\ [125634], p^I a_2^V a_1^{IV}$$

perspectívás háromszögeknek.

Kitűnik továbbá, hogy az $[123456]$ háromszög $(34, 12)$ szögpontja az $(14, 23) = (p^I a_1^{IV})$, $(13, 24) = (a_2^V a_3^{VI})$ pontoknak összekötő egyenese. Ennélfogva a $(p^I a_1^{IV})$, $(a_2^V a_3^{VI})$ pontoknak polarisai, melyek a p^I , a_1^{IV} ; a_2^V , a_3^{VI} egyenesek polusainak összekötő egyenesei, egymást a $(34, 12)$ pontban metszik.

Látható tehát, hogy a

$$\Delta^{II, III} = [123456]$$

háromszög a

$$v^{II, III} = p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}$$

négyoldal polaris alakzatának átlóháromszöge, vagy a mi ugyanaz: a $v^{II, III}$ négyoldal átlóháromszöge polaris alakzata a $\Delta^{II, III}$ háromszögnek a PASCAL-hatszög körül írt kúpszeletre vonatkozólag.

E szerint:

Egy STEINER-egyeneshez rendelt v négyoldal oly négy háromszögre oszlik, melyek a STEINER-egyeneshez rendelt Δ háromszöggel perspectívásak; a collineatio középpontok a v négyoldal polaris négyszögének szögpontjai a PASCAL-hatszög körül írt kúpszeletre vonatkozólag. A Δ háromszög polaris alakzata a v négyoldal átlóháromszögének s így véle perspectívás.

10. Az Y-négyoldalakról.

30. A 20. pontban két négyszöggel

$$V^{II, III} = P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}, \quad S^{II, III} = \Pi A_1 A_2 A_3$$

találkoztunk (9. és 8. ábra), melyeknek szögpontjai az egymást a $\Sigma^{II, III}$ SALMON-pontban metsző $p a_1 a_2 a_3$ CAYLEY-egyeneseken fekszenek. E négyszögek szögpontjainak összekötő egyenesei a $\Delta^{II, III} = [12\ 34\ 56]$ háromszög szögpontjainak mennek keresztül, t. i.

$$a \quad \Pi A_1^{IV} = \pi^{IV}, \quad A_1 P^I = \alpha_1^I, \quad A_2 A_3^{VI} = \alpha_2^{VI}, \quad A_3 A_2^V = \alpha_3^V \\ \text{egyenesek az } (12, 34) \text{ ponton,}$$

$$a \quad \Pi A_2^V = \pi^V, \quad A_1 A_3^{VI} = \alpha_1^{VI}, \quad A_2 P^I = \alpha_2^I, \quad A_3 A_1^{IV} = \alpha_3^{IV} \\ \text{egyenesek az } (56, 12) \text{ ponton,}$$

$$a \quad \Pi A_3^V = \pi^V, \quad A_1 A_2^V = \alpha_1^V, \quad A_2 A_1^{IV} = \alpha_1^{IV}, \quad A_3 P^I = \alpha_3^I \\ \text{egyenesek az } (34, 56) \text{ ponton}$$

mennek keresztül.

A $V^{II, III}$, $S^{II, III}$ négyszögek négy pár háromszögre oszlanak, melyek a $\Delta^{II, III}$ háromszöggel perspektívák, ezek:

$$\begin{array}{ccc} A_1^{IV} & A_1^V & A_3^{VI} & P^I & A_2^V & A_3^{VI} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \Pi & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ (34, 12) & (12, 56) & (56, 34) & (12, 34) & (34, 56) & (56, 12) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P^I & A_3^{VI} & A_1^{IV} & P^I & A_1^{IV} & A_2^V \\ \Pi & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_1 & \Pi & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ (56, 12) & (12, 34) & (34, 56) & (34, 56) & (56, 12) & (12, 34); \end{array}$$

a collineatio-középpontok:

$$\Sigma^{II, III} P^I \Pi, \quad \Sigma^{II, III} A_1^{IV} \mathbf{A}_1, \quad \Sigma^{II, III} A_2^V \mathbf{A}_2, \quad \Sigma^{II, III} A_3^{VI} \mathbf{A}_3.$$

Mint hogy ez utóbbiak egy-egy egyenesben fekszenek, a collineatio-tengelyek egy

$$Y^{II, III} = Y_{12} Y_{34} Y_{56} Y'_{12} Y'_{34} Y'_{56}$$

négyoldalnak oldalai lesznek, melynek szögpontjaiban ama négyszögek és ama háromszög oldalai egymást metszik, még pedig

az Y_{12} pontban az $A_1^{IV} A_2^V$, $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$, 12; az Y'_{12} pontban a $P^I A_3^{VI}$, $\Pi \mathbf{A}_3$, 12
 az Y_{56} » $A_2^V A_3^{VI}$, $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$, 56; az Y'_{56} » $P^I A_1^{IV}$, $\Pi \mathbf{A}_1$, 56
 az Y_{34} » $A_3^{VI} A_1^{IV}$, $\mathbf{A}_3 \mathbf{A}_1$, 34; az Y'_{34} » $P^I A_2^V$, $\Pi \mathbf{A}_2$, 34
 oldalak.

Az $Y^{II, III}$ négyoldalt a $\sigma^{II, III}$ egyeneshez és a $\Sigma^{II, III}$ pont-hoz rendeljük. E négyoldal szögpontjai a $\Delta^{II, III}$ háromszög szög-pontjaitól harmonicusan vannak elválasztva, minthogy az a háromszög átlóháromszöge a szóban lévő négyoldalnak.

A tizenöt σ egyeneshez rendelt Y -négyoldaloknak csak 45 szög-pontjuk van, mert kettő-kettő közülök mindig egybeesik.

Ugyanis a PASCAL-hatszögnek mindegyik oldala három Δ -háromszögnek oldala; pl. az $\overline{12}$ oldal a $\Delta^{II, III}$, $\Delta^{IV, V}$, $\Delta^{I, VI}$ háromszögnek oldala, melyek a

$$\sigma^{II, III} = |PA_1A_2A_3|, \sigma^{IV, V} = |\Pi A_3B_3\Gamma_3|, \sigma^{I, VI} = |B_3C_3A_1A_2|$$

STEINER-egyenesekhez rendelvük.

De az imént úgy tapasztaltuk, hogy a $\sigma^{I, IV}$, $\sigma^{IV, V}$ egyenesek a $\Delta^{II, III}$ háromszög 12 oldalát az Y_{12} , Y'_{12} pontokban metszik, melyek az (1 2, 3 4), (1 2, 5 6) pontoktól harmonicusan vannak elválasztva. Ugyanezen úton kimutatható, hogy a $\sigma^{II, III}$, $\sigma^{I, VI}$ egyenesek a $\Delta^{IV, V}$ háromszög $\overline{12}$ oldalát az Y''_2 , Y'_{12} pontokban, a $\sigma^{II, III}$, $\sigma^{IV, V}$ egyenesek a $\Delta^{I, VI}$ háromszögnek $\overline{12}$ oldalát az Y''_{12} , Y_{12} pontokban metszik, még pedig úgy, hogy az Y''_{12} , Y'_{12} pontok az (1 2, 3 6), (1 2, 5 4)-tól, az Y''_{12} , Y_{12} pontok az (1 2, 3 5), (1 2, 6 4)-tól harmonicusan vannak elválasztva.

Ebből az következik, hogy a 15 Y -négyoldal szögpontjainak száma 45, melyek hármásával a Δ -háromszögek oldalain fekszenek; továbbá a Δ -háromszögek oldalain az Y pontok harmonicusan választják el a PASCAL-pontokat.

31. A $\sigma^{II, III}$ egyenes a $\Delta^{II, III}$ háromszög $\overline{12}$ oldalát az Y''_{12} pontban metszi. Ugyanígy a $\sigma^{II, III}$ egyenes a $\Delta^{II, III}$ háromszögnek $\overline{34}$, $\overline{56}$ oldalát az Y''_{34} , Y''_{56} pontban metszi. Ennélfogva: a 45 Y pont hármásával a tizenöt STEINER-egyenesen, a tizenöt Δ -háromszögnek negyvenöt oldalán és a tizenöt Y -négyoldalnak hatvan oldalán fekszik.

Az Y -négyoldalak hatvan oldaláról kimutatható, hogy hármásával a STEINER-pontokon mennek keresztül.

Ha ugyanis a helyett, hogy, mint előbb, a $V^{II, III}$, $S^{II, III}$, $\Delta^{II, III}$ -ből, a $\sigma^{III, I} = |PB_1B_2B_3|$ STEINER-egyeneshez rendelt

$$V^{III, I} = P^{II}B_1^{IV}B_2^VB_3^{VI}, S^{III, I} = \Pi B_1B_2B_3, \Delta^{III, I} = [14\ 56\ 52]$$

négyszögekből, illetve háromszögből indulunk ki, azt látjuk, hogy az Y^{III} ,¹ négyoldal $Y_{14} Y_{52} Y_{36}$ oldala közös collineatio-tengelye a

$$B_1^{IV} B_2^{VI} B_3^{VI}, B_1 B_2 B_3, (25, 36) (36, 14) (14, 25)$$

háromszögeknek.

Ha továbbá meggondoljuk, hogy az

$$A_1 A_2 A_3, (34, 12) (12, 56) (56, 34), \\ (25, 36) (36, 14) (14, 25), B_1 B_2 B_3$$

háromszögek közül

| | | |
|------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| a 1-ső és 2-ik a P^I és | $ Y_{12} Y_{34} Y_{56} $ | coll.-középpont- és tengelyre |
| a 2-ik és 3-ik a Π és | p^{III} | » » » |
| a 3-ik és 4-ik a P^{II} és | $ Y_{14} Y_{52} Y_{36} $ | » » » |
| a 4-ik és 1-ső a Π és | $ P C_1 C_2 C_3 $ | » » » |

perspectivás, és hogy a collineatio-középpontok a p CAYLEY-egyenesen fekszenek, beláthatjuk, hogy a collineatio-tengelyek egymást ugyanegy pontban metszik.¹ Minthogy a p^{III} és a $| P C_1 C_2 C_3 |$ egyenesek a P ponton mennek keresztül, az $| Y_{12} Y_{34} Y_{56} |$ és $| Y_{14} Y_{52} Y_{36} |$ egyenesek és hasonlóképp az $| Y_{16} Y_{32} Y_{54} |$ egyenes is a P ponton fog keresztül menni.

A mint az imént láttuk, az Y^{II}, III négyoldalnak $Y_{12} Y_{34} Y_{56}$ oldala a $\sigma^{II}, III = | P A_1 A_2 A_3 |$ STEINER-egyenest a P STEINER-pontján megy keresztül. — Ugyanígy kell az Y^{II}, III négyoldal $Y'_{12} Y'_{34} Y'_{56}, Y'_{12} Y'_{56} Y'_{34}, Y'_{56} Y'_{34} Y'_{12}$ oldalainak, a σ^{II}, III -nak $A_1 A_2 A_3$ STEINER-pontján keresztül mennie, vagyis: *egy STEINER-egyenest a STEINER-pontokban metszik.*

32. Térjünk vissza az előbbi configurációhoz (9. ábra), a melyben a $V^{II}, III, S^{II}, III, V_1^{II}, III$ négyszögeknek szögpontjai a $p a_1 a_2 a_3$ CAYLEY-egyeneseken fekszenek (26.) és a V_1^{II}, III négyszögnek átlóháromszöge a Δ^{II}, III háromszög

A Δ^{II}, III háromszög $(34, 12), (12, 56), (56, 34)$ szögpontjaiban a V_1^{II}, III négyszög

$$| A_2^V A_3^{VI} |_1, | P^I A_1^{IV} |_1; | A_3^{VI} A_1^{IV} |_1, | P^I A_2^V |_1; \\ | A_1^{IV} A_2^V |_1, | P^I A_3^{VI} |_1$$

oldalai egymást metszik, s azokon

¹ 26. pont, jegyzetben.

$$B_1^{II} \Gamma_1^{III}, B_1^{III} C_1^{II}; B_2^{II} \Gamma_2^{III}, B_2^{III} C_2^{II}; B_3^{II} \Gamma_3^{III}, B_3^{III} C_3^{II}$$

KIRKMAN-pontok (27.) is rajta fekszenek. Ámde a felírt KIRKMAN-pontok összekötő g_{01} egyenesei, mint a V-négyszögek oldalai, a hozzájuk rendelt Δ háromszögek oldalait Y-pontokban metszik, még pedig:

$$\left. \begin{array}{l} a \ V^V, \ VI = II^{IV} A_1^I B_1^{II} \Gamma_1^{III} \\ a \ V^{VI}, \ IV = II^V A_2^I B_2^{II} \Gamma_2^{III} \\ a \ V^{IV}, \ V = II^{VI} A_3^I B_3^{II} \Gamma_3^{III} \\ a \ V^I, \ IV = B_1^{III} C_1^{II} A_2^{VI} A_3^V \\ a \ V^I, \ V = B_2^{III} C_2^{II} A_3^{IV} A_1^{VI} \\ a \ V^I, \ IV = B_3^{III} C_3^{II} A_1^V A_2^{IV} \end{array} \right\} \begin{array}{l} B_1^{II} \Gamma_1^{III} \\ B_2^{II} \Gamma_2^{III} \\ B_3^{II} \Gamma_3^{III} \\ B_1^{III} C_1^{II} \\ B_2^{III} C_2^{II} \\ B_3^{III} C_3^{II} \end{array} \left. \begin{array}{l} \Delta^V, \ VI \\ \Delta^{VI}, \ IV \\ \Delta^{IV}, \ V \\ \Delta^I, \ IV \\ \Delta^I, \ V \\ \Delta^I, \ VI \end{array} \right\} \begin{array}{l} 56 \\ 34 \\ 12 \\ 56 \\ 34 \\ 12 \end{array} \left. \begin{array}{l} Y_{56} \\ Y_{34} \\ Y_{12} \\ Y'_{56} \\ Y'_{34} \\ Y'_{12} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{háromszögnek} \\ \text{oldalát az} \\ \text{pontban} \end{array}$$

metszi.

A főlisorolt Y-pontok azonban az $Y^{II, III}$ négyoldalnak szögpontjai; tehát a $V_1^{II, III}$ négyszög az $Y^{II, III}$ négyoldal körül van írva, s mert átlóháromszögük közös, azért az illető Y-négyoldalnak oldalai a V_1 négyszögek szögpontjainak harmonikus polarisai a hozzájuk rendelt Δ háromszögekre vonatkozólag.

33. Az $Y^V, VI, Y^{VI, IV}, Y^{IV, V}$ négyoldalak szemben fekvő szög-pontjai az

$$Y_{32} Y''_{32}, Y_{56} Y''_{56}, Y_{14} Y''_{14}; Y_{16} Y''_{16}, Y_{34} Y''_{34}, Y_{52} Y''_{52}; \\ Y_{54} Y''_{54}, Y_{12} Y''_{12}, Y_{36} Y''_{36}$$

pontok, melyek az

$$\begin{array}{l} Y_{56} Y_{34} Y_{12}, \quad \sigma^{II, III} = P A_1 A_2 A_3 = Y''_{56} Y''_{34} Y''_{12} \\ Y_{12} Y_{52} Y_{36}, \quad \sigma^{III, I} = P B_1 B_2 B_3 = Y''_{14} Y''_{52} Y''_{36} \\ Y_{32} Y_{16} Y_{54}, \quad \sigma^{I, II} = P C_1 C_2 C_3 = Y''_{32} Y''_{16} Y''_{54} \end{array}$$

egyenesekben (30, 31) fekszenek; ezek az egyenesek tehát involutiót képeznek.

Ennélfogva:

Minden STEINER-ponton keresztül megy három STEINER-egyenes, valamint három oldala azoknak az Y-négyoldalnak, melyek e STEINER-egyenesekhez vannak rendelve. E hat egyenes oly involutiót képez, melyben a mondott Y-négyoldal oldalai a STEINER-egyenesekhez kapcsoltak.

Az $Y^V, VI, Y^{VI, IV}, Y^{IV, V}$ négyoldalak $\Delta^V, VI, \Delta^{VI, IV}, \Delta^{IV, V}$ átlóháromszögei a P collinatio-középpontra és a $\pi^{IV}, \pi^V, \pi^{VI}$ colli-

neatio-tengelyekre vonatkozólag perspectivásak (15.) lévén, következik, hogy a négyoldalak is perspectivásak a P pontra és a π^{IV} , π^{V} , π^{VI} tengelyekre vonatkozólag. Tudjuk továbbá (32), hogy ama négyoldalak oldalainak harmonicus polusai átlósháromszögekre vonatkozólag a V_1^{V} , $^{\text{VI}}$, V_1^{VI} , $^{\text{IV}}$, V_1^{IV} , $^{\text{V}}$ négyszögeknek szögpontjai; ezért e négyszögek is perspectivásak a P pontra és π^{IV} , π^{V} , π^{VI} tengelyekre.

Ennélfogva:

Egy STEINER-ponton keresztül menő három STEINER-egyeneshez rendelt Y-négyoldalak, (valamint V_1 -négyszögek), páronként perspectivásak; a STEINER-ponton keresztül menő PASCAL-egyenesek képezik a collineatio-tengelyeket, a STEINER-pont ellenpontja a collineatio-középpontot.

Vagy:

Úgy a tizenöt Y-négyoldal, mint a tizenöt V_1 -négyszög, hármásával húszszor perspectivás a húsz STEINER-pontra, mint collineatio-középpontra vonatkozólag; a collineatio-középpontoknak, mint STEINER-pontoknak, ellenpontjain keresztül menő PASCAL-egyenesek képezik a collineatio-tengelyeket.

E tételek szerint az Y^{II} , $^{\text{III}}$ négyoldal perspectivás

- az Y^{III} , $^{\text{I}}$, Y^{II} , $^{\text{I}}$ -gyel a Π , p^{III} , p^{II} ;
- az Y^{III} , $^{\text{IV}}$, Y^{II} , $^{\text{IV}}$ -gyel az A_1 , a_1^{III} , a_1^{II} ;
- az Y^{III} , $^{\text{V}}$, Y^{II} , $^{\text{V}}$ -tel az A_2 , a_2^{III} , a_2^{II} ;
- az Y^{III} , $^{\text{VI}}$, Y^{II} , $^{\text{VI}}$ -tal az A_3 , a_3^{III} , a_3^{II}

pontokra és egyenesekre vonatkozólag; és ugyanígy a V_1^{II} , $^{\text{III}}$ négyszög.

Tehát:

Mindegyik Y-négyoldal (V_1 -négyszög) négy pár Y-négyoddallal (V_1 -négyszöggel) perspectivás; a négy pár collineatio-tengely négy pár PASCAL-egyenes, melyek a felvett Y-négyoldalhoz rendelt STEINER-egyenesen fekvő STEINER-pontokban metszik egymást; a collineatio-középpontok pedig a STEINER-pontoknak ellenpontjai. *A négy pár PASCAL-egyenes két negyoldalt képez, melyek a STEINER-egyeneshez rendelt két DESARGUES-configurációhoz tartoznak.*

34. Ha a (8. ábra)

$$p^{\text{II}} a_1^{\text{II}} p^{\text{III}} a_1^{\text{III}}, \quad p^{\text{II}} a_2^{\text{II}} p^{\text{III}} a_2^{\text{III}}, \quad p^{\text{II}} a_3^{\text{II}} p^{\text{III}} a_3^{\text{III}}$$

oldalú négyszögeket tekintjük, melyeknek két-két átlója

$$P Y_{12} Y_{34} Y_{56}, \quad Y'_{12} Y'_{34} Y'_{56}; \quad P Y_{12} Y_{34} Y_{56}, \quad Y'_{12} Y_{34} Y'_{56}; \\ P Y_{12} Y_{34} Y_{56}, \quad Y_{12} Y'_{34} Y'_{56}$$

az $Y^{\text{II}}, \text{III}$ négyszögek oldalai, és

$$B_1^{\text{II}}, (23, 56); \quad B_2^{\text{II}}, (16, 34); \quad B_3^{\text{II}}, (54, 12)$$

szögpontjai a p^{II} oldalon fekszenek, következésképpen, hogy e szögpont-párok amaz átlóktól harmonicusan vannak elválasztva. Minthogy a p^{II} egyenes az $Y^{\text{II}}, \text{III}$, Y^{II}, I perspectivás négyszögek collineatio-tengelye, mondhatjuk, hogy

Mindegyik PASCAL-egyenes collineatio-tengelye két Y-négyszög oldalának; egy megfelelő oldalpár a PASCAL-egyenes a STEINER-pontban, a többi három pár pedig más három pontban metszi. Ez a STEINER-pont harmonicusan választja el a három metszőpontot a PASCAL-egyenesen fekvő KIRKMAN- és PASCAL-pontoktól; továbbá a STEINER-pont ellenpontja a két perspectivás Y-négyszöghöz tartozó collineatio-középpont.

Ha ellenben a II STEINER-pontra vonatkozólag perspectivás

$$V_1^{\text{II}}, \text{III} = [P^{\text{I}} A_1^{\text{IV}} A_2^{\text{V}} A_3^{\text{VI}}]_1, \quad V_1^{\text{I}}, \text{II} = [P^{\text{III}} C_1^{\text{IV}} C_2^{\text{V}} C_3^{\text{VI}}]_1$$

négyszögeket tekintjük, melyeknek átlóháromszögei

$$\Delta^{\text{II}}, \text{III} = [12\ 34\ 56], \quad \Delta^{\text{I}}, \text{II} = [54\ 16\ 32],$$

azt látjuk, hogy ezeknek megfelelő oldalai egymást az (12, 54), (34, 16), (56, 32) PASCAL-pontokban, amazoknak megfelelő oldalai pedig egymást a p^{II} egyenesnek

$$B_1^{\text{II}} = (A_{21}^{\text{V}} A_{31}^{\text{VI}}, C_{21}^{\text{V}} C_{31}^{\text{VI}}), \quad B_2^{\text{II}} = (A_{31}^{\text{VI}} A_{11}^{\text{IV}}, C_{31}^{\text{VI}} C_{11}^{\text{IV}}), \\ B_3^{\text{II}} = (A_{11}^{\text{IV}} A_{21}^{\text{V}}, C_{11}^{\text{IV}} C_{21}^{\text{V}})$$

KIRKMAN-pontjaiban és még három U pontban:

$$(P_1^{\text{I}} A_{11}^{\text{IV}}, P_1^{\text{III}} C_{11}^{\text{IV}}), \quad (P_1^{\text{I}} A_{21}^{\text{V}}, P_1^{\text{III}} C_{21}^{\text{V}}), \quad (P_1^{\text{I}} A_{31}^{\text{VI}}, P_1^{\text{III}} C_{31}^{\text{VI}})$$

metszik.

A négyszögek harmonicus tulajdonsága következtében az U pontok a KIRKMAN-pontokat két PASCAL-egyenesről harmonikusan választják el. Ennélfogva:

Mindegyik PASCAL-egyenes két perspectivás V_1 -négyszögnek collineatio-tengelye; a collineatio-középpont a PASCAL-egyenesen fekvő STEINER-pont ellenpontja. A négyszögek megfelelő oldalpárjai egymást a collineatio-tengely három KIRKMAN-pontjában és más három U pontban metszik; ama négyszögek átlóháromszögeinek megfelelő oldalai pedig egymást a tengely PASCAL-pontjaiban metszik. Két-két PASCAL-pont egy KIRKMAN-ponttól és egy U ponttól harmonikusan van elválasztva.

Mivel mindegyik PASCAL-egyenesen három U pont fekszik, az U pontok száma $3 \cdot 60 = 180$; s mert mindegyik U pontban egymást két g_{01} egyenes, mint V_1 -négyszögeknek oldalai metszi, azért mindegyik g_{01} egyenesen négy U pont van. Így pl. a $P_1^I A_1^{IV}$ egyenesen rajta fekszenek a

$$\begin{aligned} (P^I A_1^{IV}, P^{II} B_1^{IV})_1, & \quad (P^I A_1^{IV}, P^{III} C_1^{IV})_1, & \quad (P^I A_1^{IV}, A_1^{II} \Gamma_3^V)_1, \\ & (P^I A_1^{IV}, A_1^{III} B_2^{VI})_1 \end{aligned}$$

pontok, melyek egyszersmind pontjai a p^{II} , p^{III} , a_1^{II} , a_1^{III} egyeneseknek.

35. Az $Y^{II, III}$ négyszög Y'_{56} szögpontján keresztül mennek (9. ábra) a $V^{II, III}$, $S^{II, III}$, $V_1^{II, III}$ négyszögeknek $P^I A_1^{IV}$, ΠA_1 , $|P^I A_1^{IV}|_1$ oldalai, s az utóbbi oldalon még az (1 2, 3 4) PASCAL-pont is rajta fekszik. Abból, hogy a $P^I A_1^{IV} \Pi A_1$ négyszögnek átlópontjai Y'_{56} , $\Sigma^{II, III}$, (1 2, 3 4), következik, hogy a

$$P^I A_1^{IV}, \Pi A_1; Y'_{56} P_1^I A_1^{IV}, Y'_{56} \Sigma^{II, III}$$

egyenespárok s így a

$$P^I, \Pi; P_1^I, \Sigma^{II, III}$$

pontpárok harmonicusan vannak elválasztva.

Ugyanígy kimutatható, hogy a p CAYLEY-egyenesen a P^{II}, Π ; $P_1^{II}, \Sigma^{II, I}$ és a P^{III}, Π ; $P_1^{III}, \Sigma^{I, II}$ pontpárok harmonicusan vannak elválasztva. Ennélfogva:

Mindegyik CAYLEY-egyenesen egy STEINER-, három KIRKMAN-, három SALMON- és három V_1 -pont fekszik. A STEINER-

pont és mindegyik KIRKMAN-pont az utóbbiakhoz rendelt V_1 -pontoktól és egy-egy SALMON-ponttól harmonicusan van elválasztva.

E tétel alapján a hatvan V_1 -pont könnyen megszerkeszthető, ha a hatvan KIRKMAN-, húsz STEINER- és tizenöt SALMON-pont ismeretes. Pl. a p egyenesen fekvő $P_1^I, P_1^{II}, P_1^{III}$ pontok a

$$(P^I \Pi P_1^I \Sigma^{II, III}) = (P^{II} \Pi P_1^{II} \Sigma^{III, I}) = (P^{III} \Pi P_1^{III} \Sigma^{I, II}) = -1$$

relációkból könnyen megszerkeszthetők.

A fentebbi tételből (vagy az $A_1^{IV} A_2^V A_1 A_2$ négyszögből) következik, hogy a $V_1^{II, III}$ négyszög $|A_1^{IV} A_2^V|$ oldalán a szögpontok az $Y_{12}, (34, 56)$ pontoktól harmonicusan vannak elválasztva. Vagyis: a g_{01} egyeneseken fekvő V_1 -pontpárok az Y pontoktól és a PASCAL-pontoktól harmonicusan vannak elválasztva.

36. Ha a 8-ik ábrában a $p^{II} p^{III} a_3^{II} a_3^{III}$ négyoldalt tekintjük, melynek egyik átlópontja és átlója $Y_{12}, \sigma^{II, III}$, azt látjuk, hogy a $p^{II} p^{III}$ egyenespárok a $\sigma^{II, III} |P Y_{12} Y_{34} Y_{56}|$ egyenespároktól, és hasonlóképp az $a_3^{II} a_3^{III}$ egyenespárok a $\sigma^{II, III} |A_3 Y_{12} Y'_{34} Y'_{56}|$ egyenespároktól harmonicusan vannak elválasztva. Minthogy mindegyik STEINER-ponton a tizenöt Y -négyoldal hatvan oldala közül három megy keresztül, kimondhatjuk, hogy

Egy STEINER-ponton keresztül menő három PASCAL-egyenes közül kettő-kettő harmonicusan választja el a STEINER-egyenesét a STEINER-egyeneshez rendelt Y -négyoldal három oldalától.

Ha továbbá a $p^{II} p^{III} a_3^{II} a_3^{III}$ négyoldalnak azt az átlóját

$$B_3^{II} \Gamma_3^{III} = (p^{II} a_3^{II}) (p^{III} a_3^{III})$$

tekintjük, melyen az A_{11}^{IV}, A_{21}^{IV} pontok fekszenek, azt látjuk, hogy az Y_{12} pont és a $\sigma^{II, III}$ egyenes a $B_3^{II} \Gamma_3^{III}$ pontpárokat harmonicusan választja el. Így tehát: *A g_{01} egyeneseken, mint a V_1 -négyszögek oldalain, fekvő KIRKMAN-pontok egy Y ponttól és a V_1 -négyszöghöz rendelt STEINER-egyenesétől harmonicusan vannak elválasztva.*

Ezt a tulajdonságot a 9-ik ábrából is kiolvashatjuk. Mert $\Pi A_3 Y_{12}$ átlóháromszöge az

$$A_1^{IV} A_2^V (12, 56) (12, 34)$$

négyszögnek, s így az A_1^{IV}, A_2^V pontok az Y_{12} ponttól és a $|\Pi A_3|$ egyenestől harmonikusan vannak elválasztva. De az $A_1^{IV} A_2^V$ egyenes egybeesik a $|\mathbf{B}_3^{\text{II}} \Gamma_3^{\text{III}}|_1$ egyenessel, mely a $V_1^{IV}, V_1^V = [\text{II}^{\text{VI}} \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3^{\text{II}} \Gamma_3^{\text{III}}]_1$ négyszögnek egyik oldala, és $\Pi \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3 \Gamma_3$ a σ^{IV}, V STEINER-egyenes.

A $p^{\text{II}} p^{\text{III}} a_3^{\text{II}} a_3^{\text{III}}, a_1^{\text{II}} a_1^{\text{III}} a_2^{\text{II}} a_2^{\text{III}}$ négyoldalak végre azt is mutatják, hogy az

$$\begin{array}{l} A_1 A_2 \text{ pontpárok az } Y''_{12}, |\text{PI} \mathbf{A}_3^{\text{VI}}|_1\text{-től és a} \\ P A_3 \quad \quad \quad \text{az } Y''_{12}, |\mathbf{A}_1^{IV} \mathbf{A}_2^V|_1\text{-től} \end{array}$$

harmonikusán vannak elválasztva, a mit a következőképp fejezhetünk ki:

Egy STEINER-egyenesen fekvő négy STEINER-pontot hatszor bonthatunk szét pontpárokká; e pontpárok mindegyikét egy Y pont és a STEINER-egyeneshez rendelt V_1 -négyszög egy oldala harmonikusán választja el.

Végezetül még a VI. és VII. táblázat megtekintésére kérjük fel az olvasót.

11. Az y-négyszögekről.

37. Tudjuk, hogy a tizenöt σ STEINER-egyenes a hozzájuk rendelt Δ -háromszögeknek oldalait negyvenöt Y-pontban metszi. Ennek megfelelőleg a tizenöt Σ SALMON-pontot a hozzájuk rendelt Δ -háromszögek szögpontjaival összekötő egyeneseket általában y-egyeneseknek nevezzük. Számuk szintén negyvenöt. A mi pedig az y-egyenesek különös megjelölését illeti, gondoljuk meg, hogy a $\sigma^{\text{II}}, \text{III}$ egyenes a $\Delta^{\text{II}}, \text{III}$ háromszög 1 2 3 4 5 6 oldalait az $Y''_{12}, Y''_{34}, Y''_{56}$ pontokban metszi. Nevezzük tehát a $\Sigma^{\text{II}}, \text{III}$ pont összekötő egyeneseit a $\Delta^{\text{II}}, \text{III}$ háromszög (3 4, 5 6), (5 6, 1 2), (1 2, 3 4) szögpontjaival rendre y''_{12}, y''_{34} és y''_{56} -nak.

Ha ezek után ismét a 9-ik ábrához térünk vissza s azt látjuk, hogy az

$$A_1^{IV} A_2^V \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2, \text{PI} \mathbf{A}_3^{\text{VI}} \Pi \mathbf{A}_3$$

négyszögek átlópontjai

$$\Sigma^{\text{II}}, \text{III} (3 4, 5 6) Y_{12}; \Sigma^{\text{II}}, \text{III} (3 4, 5 6) Y'_{12};$$

ennélfogva

$$\begin{array}{l} \text{az } A_1^{IV} \mathbf{A}_1 = a, A_2^V \mathbf{A}_2 = a_2 \text{ egyenespárok az } Y_{12}, y''_{12}\text{-től;} \\ \text{a } \text{PI} \Pi = p, A_3^{IV} \mathbf{A}_3 = a_3 \quad \quad \quad \text{az } Y'_{12}, y''_{12}\text{-től} \end{array}$$

harmonikusán vannak elválasztva.

| | | |
|---|---|---|
| $Y_{34} = (A_3^{VI} A_1^{IV}, B_2^{III} \Gamma_2^{III}, \sigma^I, \nu)$ | $Y'_{34} = (P^I A_2^V, B_3^{III} C_2^{II}, \sigma^{VI}, IV)$ | $Y''_{34} = (A_3^{IV} A_1^{VI}, II^V A_2^I, \sigma^{II}, III)$ |
| $Y_{56} = (A_2^V A_3^{VI}, B_1^{II} \Gamma_1^{II}, \sigma^I, IV)$ | $Y'_{56} = (P^I A_1^{IV}, B_1^{III} C_1^{II}, \sigma^V, VI)$ | $Y''_{56} = (A_2^{VI} A_3^V, II^{IV} A_1^I, \sigma^{II}, III)$ |
| $Y_{12} = (A_1^{IV} A_3^V, B_3^{III} \Gamma_3^{III}, \sigma^I, VI)$ | $Y'_{12} = (P^I A_3^{VI}, B_3^{III} C_3^{II}, \sigma^{IV}, V)$ | $Y''_{12} = (A_1^V A_2^{IV}, II^{VI} A_3^I, \sigma^{II}, III)$ |
| $Y_{11} = (B_2^V B_3^{VI}, \Gamma_1^{III} A_1^I, \sigma^{II}, IV)$ | $Y'_{14} = (P^{II} B_1^{IV}, C_1^I A_1^{III}, \sigma^V, VI)$ | $Y''_{14} = (B_2^{VI} B_3^V, II^{IV} B_1^{II}, \sigma^{III}, I)$ |
| $Y_{62} = (B_3^{VI} B_1^{IV}, \Gamma_2^{III} A_3^I, \sigma^{II}, V)$ | $Y'_{52} = (P^{II} B_2^V, C_2^I A_2^{III}, \sigma^{VI}, IV)$ | $Y''_{62} = (B_3^{IV} B_1^{VI}, II^V B_2^{II}, \sigma^{III}, I)$ |
| $Y_{36} = (B_1^{IV} B_2^V, \Gamma_3^{III} A_3^I, \sigma^{II}, VI)$ | $Y'_{36} = (P^{III} B_3^{VI}, C_3^I A_3^{III}, \sigma^{IV}, V)$ | $Y''_{36} = (B_1^V B_2^{IV}, II^{VI} B_3^{II}, \sigma^{III}, I)$ |
| $Y_{32} = (C_2^V C_3^{VI}, A_1^I B_1^{II}, \sigma^{III}, IV)$ | $Y'_{32} = (P^{III} C_1^{IV}, A_1^{II} B_1^I, \sigma^V, VI)$ | $Y''_{32} = (\Gamma_2^{VI} \Gamma_3^V, II^{IV} \Gamma_1^{II}, \sigma^I, II)$ |
| $Y_{16} = (C_3^{VI} C_1^{IV}, A_3^I B_2^{II}, \sigma^{III}, V)$ | $Y'_{16} = (P^{III} C_2^V, A_2^{II} B_2^I, \sigma^{VI}, IV)$ | $Y''_{16} = (\Gamma_3^{IV} \Gamma_1^V, II^V \Gamma_2^{III}, \sigma^I, II)$ |
| $Y_{54} = (C_1^{IV} C_2^V, A_3^I \Gamma_3^{III}, \sigma^{III}, VI)$ | $Y'_{54} = (P^{III} C_3^{VI}, A_3^{II} B_3^I, \sigma^{IV}, V)$ | $Y''_{54} = (\Gamma_1^V \Gamma_2^{IV}, II^{VI} \Gamma_3^{III}, \sigma^I, II)$ |
| $Y_{13} = (A_2^{III} B_1^{VI}, A_3^{II} \Gamma_1^V, \sigma^I, IV)$ | $Y'_{13} = (B_3^I \Gamma_2^{IV}, B_1^{III} A_2^{VI}, \sigma^{II}, V)$ | $Y''_{13} = (C_1^{II} A_3^V, C_2^I B_3^{IV}, \sigma^{III}, VI)$ |
| $Y_{51} = (A_3^{III} B_2^{IV}, A_1^{II} \Gamma_2^{VI}, \sigma^I, V)$ | $Y'_{51} = (B_1^I \Gamma_3^V, B_2^{III} A_3^{IV}, \sigma^{II}, VI)$ | $Y''_{51} = (C_2^{II} A_1^{VI}, C_3^I B_1^{IV}, \sigma^{III}, IV)$ |
| $Y_{35} = (A_1^{III} B_3^V, A_2^{II} \Gamma_3^{IV}, \sigma^I, VI)$ | $Y'_{35} = (B_2^I \Gamma_1^{VI}, B_3^{III} A_1^V, \sigma^{II}, IV)$ | $Y''_{35} = (C_3^{II} A_2^{IV}, C_1^I B_2^{VI}, \sigma^{III}, V)$ |
| $Y_{34} = (A_2^{II} \Gamma_1^{VI}, A_3^{III} B_1^V, \sigma^I, IV)$ | $Y'_{24} = (B_1^{III} A_3^V, B_2^I \Gamma_3^{IV}, \sigma^{II}, VI)$ | $Y''_{24} = (C_1^{II} A_2^V, C_3^I B_2^{IV}, \sigma^{III}, V)$ |
| $Y_{62} = (A_3^{II} \Gamma_2^{IV}, A_1^{III} B_2^{VI}, \sigma^I, V)$ | $Y'_{62} = (B_2^{III} A_1^{VI}, B_3^I \Gamma_1^V, \sigma^{II}, IV)$ | $Y''_{62} = (C_2^{II} A_3^{IV}, C_1^I B_3^V, \sigma^{III}, VI)$ |
| $Y_{46} = (A_1^{II} \Gamma_3^V, A_2^{III} B_3^{IV}, \sigma^I, VI)$ | $Y'_{46} = (B_3^{III} A_2^{IV}, B_1^I \Gamma_2^{VI}, \sigma^{II}, V)$ | $Y''_{46} = (C_3^{II} A_1^V, C_2^I B_1^{VI}, \sigma^{III}, IV)$ |

(VI. táblázat.)

E VI. táblázatban az van föltüntetve, hogy a 45 Y-pont mindenikében mely egyenesek metszik egymást. A következő oldalon levő VII. táblázat pedig a 15 Y-négyszög szögpontjait csoportosítja.

Ugyanennél az oknál fogva mondhatjuk, hogy

az $a_2 a_3$ egyenes-párok Y_{56}, y''_{56} -tól; a $p a_1$ egyenes-párok Y'_{56}, y''_{56} -tól
 az $a_3 a_1$ » » Y_{34}, y''_{34} -tól; a $p a_2$ » » Y'_{34}, y''_{34} -tól
 vannak harmonicusan elválasztva. Tehát:

Egy SALMON-pontból kisugárzó négy CAYLEY-egyenes hat egyenespárra bontható; ezek az egyenespárok a SALMON-

| Alábbi négy- oldalakkak | következő szögpontjaik vannak: |
|----------------------------|--|
| Y^{II}, III | $Y_{12} Y_{34} Y_{56} Y'_{12} Y'_{34} Y'_{56}$ |
| Y^{III}, I | $Y_{36} Y_{25} Y_{14} Y'_{36} Y'_{25} Y'_{14}$ |
| Y^I, II | $Y_{54} Y_{16} Y_{32} Y'_{54} Y'_{16} Y'_{32}$ |
| Y^V, VI | $Y_{32} Y_{56} Y_{14} Y''_{32} Y''_{56} Y''_{14}$ |
| Y^{VI}, IV | $Y_{16} Y_{34} Y_{52} Y''_{16} Y''_{34} Y''_{52}$ |
| Y^{IV}, V | $Y_{54} Y_{12} Y_{36} Y''_{54} Y''_{12} Y''_{36}$ |
| Y^I, IV | $Y''_{56} Y''_{13} Y''_{24} Y'_{56} Y'_{13} Y'_{24}$ |
| Y^{II}, IV | $Y''_{14} Y_{35} Y_{26} Y'_{14} Y''_{35} Y''_{26}$ |
| Y^{III}, IV | $Y''_{32} Y'_{46} Y'_{15} Y'_{32} Y_{46} Y_{15}$ |
| Y^I, V | $Y''_{34} Y''_{26} Y''_{15} Y'_{34} Y'_{26} Y'_{15}$ |
| Y^{II}, V | $Y''_{25} Y_{46} Y_{13} Y'_{25} Y''_{46} Y''_{13}$ |
| Y^{III}, V | $Y''_{16} Y'_{24} Y'_{35} Y'_{16} Y_{24} Y_{35}$ |
| Y^I, VI | $Y''_{12} Y''_{64} Y''_{35} Y'_{12} Y'_{64} Y'_{35}$ |
| Y^{II}, VI | $Y''_{63} Y_{24} Y_{15} Y'_{63} Y''_{24} Y''_{15}$ |
| Y^{III}, VI | $Y''_{45} Y'_{62} Y'_{13} Y'_{45} Y_{62} Y_{13}$ |

(VII. táblázat.)

E táblázathoz megjegyzendő, hogy a négyoldalak első három szögpontja mindig egy egyenesben fekszik, a következő három pedig egy háromszögnek szögpontja.

ponton keresztül menő egy-egy y-egyenesről és a SALMON-pont-hoz rendelt Y-négyoldal szögpontjaitól harmonicusan vannak elválasztva.

A $\sigma^{II, III}$ STEINER-egyenes a $\Delta^{II, III}$ háromszög oldalait az $Y''_{12}, Y''_{34}, Y''_{56}$ pontokban metszi, a $\Delta^{II, III}$ háromszögnek szög-pontjai pedig, mint mondtuk, a $\Sigma^{II, III}$ SALMON-pontból az $y''_{12}, y''_{34}, y''_{56}$ egyenesekkel projiciálvák. Ezért:

Egy STEINER-egyenesen fekvő Y-pontok az illetőhöz rendelt SALMON-pontból kisugárzó y-egyenesektől involutiósan vannak elválasztva.

38. A negyvenöt y-egyenes egymást hármasával a tizenöt SALMON-ponton kívül még hatvan pontban metszi, melyek hármasával a CAYLEY-egyeneseken fekszenek.

Ugyanis az

$$a_1^{III} a_2^{III} a_3^{II}, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}$$

háromszögek oldalai, az A_1, A_2, A_3 pontokon mennek keresztül, melyek a $\sigma^{II, III} = |PA_1A_2A_3|$ egyenesen fekszenek; a háromszögek tehát perspectivásak. A collineatio-középpontok, melyek az 1-ső és 2-ik háromszöghez tartoznak: $\Sigma^{III, I} = (p b_1 b_2 b_3)$, $P^{III} = (\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III})$ a szögpontokat vetítő sugarak $b_1 b_2 b_3, \gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III}$; ennél fogva a 2-ik és 3-ik perspectivás háromszöghez tartozó vetítő sugarak egymást a $\Sigma^{III, I}, P^{III} = p$ CAYLEY-egyenesen metszik.

Ámde ez utóbbi háromszögek szögpontjai a

$$\Sigma^{I, IV} = (b_1 c_1 \alpha_2 \alpha_3), \Sigma^{I, V} = (b_2 c_2 \alpha_3 \alpha_1), \Sigma^{I, VI} = (b_3 c_3 \alpha_1 \alpha_2)$$

SALMON-pontok és e SALMON-pontokhoz rendelt $\Delta^{I, IV}, \Delta^{I, V}, \Delta^{I, VI}$ háromszögeknek

$$(13, 24) (15, 26) (35, 46)$$

szögpontjai. Ennél fogva az $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, a_1^{IV} a_2^V a_3^{IV}$ perspectivás háromszögekhez tartozó vetítő sugarak az y_{56}, y_{34}, y_{12} egyenesek, melyek egymást a p CAYLEY-egyenesen metszik.

Ugyanezen az úton kimutatható, hogy

az $y_{14} = \Sigma^{II, IV} (35, 26), y_{25} = \Sigma^{II, V} (13, 46), y_{36} = \Sigma^{II, VI} (24, 15)$ és az $y_{23} = \Sigma^{III, IV} (15, 46), y_{16} = \Sigma^{III, V} (35, 24), y_{45} = \Sigma^{III, VI} (13, 26)$ egyenesek egymást a p -egyenesen metszik.

39. A negyvenöt y-egyenes tizenöt y-négyszög oldalának tekinthetjük és ezeket a tizenöt SALMON-pontoz és tizenöt STEINER-egyeneshez rendelhetjük.

Láttuk az imént, hogy az y_{12}, y_{34}, y_{56} egyenesek egymást a p -egyenesen metszik, s ha

$$\Sigma^{V, VI} (14, 32) \equiv y'_{56}, \Sigma^{VI, IV} (16, 52) = y'_{34}, \Sigma^{IV, V} (36, 54) \equiv y'_{12},$$

ugyanoly módon kimutathatjuk, hogy az

$$Y_{12}, Y_{34}, Y_{56}; Y'_{12}, Y'_{34}, Y'_{56}; Y''_{12}, Y''_{34}, Y''_{56}; Y_{12}, Y'_{34}, Y'_{56}$$

egyenesek is megfelelőleg p, a_1, a_2, a_3 CAYLEY-egyeneseken metszik egymást.

Ez oknál fogva az $y_{12}, y_{34}, y_{56}, y'_{12}, y'_{34}, y'_{56}$ egyenesek egy $y^{II, III}$ négyszögnek oldalai, melynek szögpontjai a $\Sigma^{II, III}$ pontból kisugárzó p, a_1, a_2, a_3 egyeneseken fekszenek.

Ha tehát ezt az $y^{II, III}$ négyszöget a $\Sigma^{II, III}$ ponthoz és $\sigma^{II, III}$ egyeneshez, valamint a többi hasonló y -négyszögeket a többi Σ -ponthoz és σ -egyeneshez rendeljük, mondhatjuk:

A negyvenöt y-egyenes tizenöt y-négyszöget képez, melynek 4.15=60 szögpontja hármásával a húsz CAYLEY-egyenesen fekszik, még pedig akkép, hogy mindegyik y-négyszögnek négy szögpontja azon a négy CAYLEY-egyenesen fekszik, a melyek egymást az y-négyszöghez rendelt SALMON-pontban metszik.

40. A 38. pontban tárgyaltak szerint az

$$(y_{12} y_{34} y_{56}), (y_{36} y_{25} y_{14}), (y_{54} y_{16} y_{32})$$

pontok a p CAYLEY-egyenesen fekszenek, mely még a

$\Sigma^{II, III} = (y''_{12} y''_{34} y''_{56}), \Sigma^{III, I} = (y''_{36} y''_{25} y''_{14}), \Sigma^{I, II} = (y''_{54} y''_{16} y''_{32})$ SALMON-pontokat is tartalmazza.

Ámde

az $y_{32}, y''_{32}; y_{56}, y''_{56}; y_{14}, y''_{14}$ ellenoldalpárjai az $y^{V, VI}$ négyszögnek,

az $y_{16}, y''_{16}; y_{34}, y''_{34}; y_{52}, y''_{52}$ » $y^{VI, IV}$ »

az $y_{54}, y''_{54}; y_{12}, y''_{12}; y_{36}, y''_{36}$ » $y^{IV, V}$ »

a minek következtében eme hat pontpár a p -egyenesen involutiót képez. Tehát:

Mindegyik CAYLEY-egyenesen hat oly pont van, a melyekben az y-egyenesek egymást hármásával metszik, t. i. három pont mint az y-négyszögeknek szögpontja és három e négyszögekhez rendelt SALMON-pont. E hat pont involutiót képez, melyben a SALMON-pontokhoz a hozzájuk rendelt négyszögek szögpontjai kapcsolvák. (Összehasonlítandó a 32. pontban foglalt tétellel.)

41. Miután az $y^{II, III}, V_1^{II, III}$ négyszögeknek

$$\begin{matrix} (y_{12} y_{34} y_{56}) & (y'_{12} y'_{34} y'_{56}) & (y'_{12} y_{34} y'_{56}) & (y_{12} y'_{34} y'_{56}) \\ P_1^I & A_{11}^{IV} & A_{21}^V & A_{31}^{VI} \end{matrix}$$

szögpontjai a p , a_1 , a_2 , a_3 egyeneseken fekszenek, kérdezhetjük, hogy nem perspectivás helyzetűek-e, vagyis, hogy a megfelelő oldalainak metszőpontjai nem fekszenek-e ugyanegy egyenesben?

Tudjuk, hogy

$$Y_{56} \equiv \Sigma^{II, IV} (13, 24) \equiv (b_1 c_1 a_2 a_3) (13, 24) \\ P_1^I A_{11}^{IV} \equiv B_1^{III} C_1^{II},$$

és hogy a b_1 , c_1 egyenesek a B_1^{III} , C_1^{II} pontokon mennek keresztül. Miután az Y_{56} egyenes a b_1, c_1 egyenespárt a B_1^{III}, C_1^{II} egyenesen fekvő Y'_{56} ponttól harmonicusan választja el (37.), az $(Y_{56}, B_1^{III}, C_1^{II})$ pont is harmonicusan választja el a B_1^{III}, C_1^{II} pontokat az Y'_{56} ponttól.

Ha ezután az $a_2^{II} a_2^{III} a_3^{II} a_3^{III}$ négyoldalt (8. ábra) tekintjük, melynek szemben fekvő szögpontjai B_1^{III} , C_1^{II} ; egyik átlópontja Y'_{56} ; egyik átlója $\sigma^{II, III} = |PA_2 A_3|$, beláthatjuk, hogy az $(Y_{56}, P_1^I A_{11}^{IV})$ pont a $\sigma^{II, III}$ egyenesen fekszik és az A_2, A_3 pontokat az Y''_{56} ponttól harmonicusan választja el.

Ugyanezen az úton kimutatható, hogy az $Y^{II, III}, V_1^{II, III}$ négyszögek többi oldalai is a $\sigma^{II, III}$ egyenesen metszik egymást és a megfelelő oldalpárok

$$(Y_{56}, P_1^I A_{11}^{IV}), (Y'_{56}, A_2^{V} A_3^{VI}), (Y_{34}, P_1^I A_{21}^V), (Y'_{34}, A_3^{VI} A_{11}^{IV}), \\ (Y_{12}, P_1^I A_{31}^{VI}), (Y'_{12}, A_1^{IV} A_2^V)$$

metszőpontjai az

$$A_2 A_3, P A_1, A_3 A_1, P A_2, A_1 A_2, P A_3$$

pontpárokat az

$$Y''_{56}, Y''_{56}, Y''_{34}, Y''_{34}, Y''_{12}, Y''_{12}$$

pontoktól harmonicusan választják el, és így ama négyszögek perspectivás helyzetűek. Ennélfogva:

A tizenöt V_1 -négyszög a tizenöt y -négyszöggel perspectivás helyzetű; a hozzájuk rendelt SALMON-pontok és STEINER-egyenesek a collineatio-középpontok és tengelyek.

Vagy pedig:

A STEINER-egyenesek a hozzájuk rendelt y -négyszögek oldalait kilenczven pontban metszik; mindegyik metszőponton keresztül megy a kilenczven g_{01} egyenes közül egy-egy.

Továbbá, tekintettel a 36. pont utolsó tételére:

Egy STEINER-egyenesen fekvő négy STEINER-pont hat pontpárra bontható; e pontpárokat a STEINER-egyeneshez rendelt γ -négyszög (úgyszintén V_1 -négyszög) egy-egy oldala és egy Y -pont harmonicusan választja el. (Dualisan megfelel a 37. pontban levő tételnek.)

E tétel a 9. ábrából is kimagyarázható, melyben az $A_1 A_2$ pontpár az Y_{12}, Y''_{12} -től és hasonlóképp a $\sigma^I, \sigma^{VI} = |B_3 C_3 A_1 A_2|$ -n fekvő

$B_3 C_3, B_3 A_1, C_3 A_2, B_3 A_2, C_3 A_1$ pontpárok, az $Y_{12}, Y'_{12}; Y_{35}, Y'_{35}; Y_{35}, Y''_{35}; Y_{46}, Y'_{46}; Y_{46}, Y''_{46}$ ponttól és egyenestől harmonicusan vannak elválasztva.

42. Az $A_1^{IV} A_2^V A_1 A_2, P^I A_3^{VI} \Pi A_3$ négyszögekből látható (9. ábra), hogy az

$$A_2^V A_1 = \alpha_1^V, A_1^{IV} A_2 = \alpha_2^{IV} \text{ egyenesek az } Y_{12}, Y''_{12}\text{-től, és az} \\ A_3^{VI} \Pi = \pi^{VI}, P_1 A_3 = \alpha_3^I \text{ egyenesek az } Y'_{12}, Y''_{12}\text{-től}$$

harmonicusan vannak elválasztva.

Ez pedig a következőképp fejezhető ki: Egy Δ -háromszög mindegyik szögpontján négy PASCAL-egyenes és egy γ -egyenes megy keresztül; e PASCAL-egyenesek közül kétszer kettő az γ -egyenestől és egy a Δ -háromszög ama szögpontjával szemben fekvő oldalon nyugvó Y -ponttól harmonicusan van elválasztva. Vagy, miután a $V_1^{II, III} = [P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}]_I$ négyszög $|A_1^{IV} A_2^V|_I, |P^I A_3^{VI}|_I$ oldalai az Y_{12}, Y'_{12} pontokon mennek keresztül, mondhatjuk:

Egy V_1 négyszög átlós háromszögének, Δ -nak mindegyik szögpontjában a V_1 négyszögnek két oldala, azaz két g_{01} egyenes, egy γ egyenes és négy PASCAL-egyenes találkozik; mindegyik g_{01} egyenes az γ egyenest két PASCAL-egyenestől harmonicusan választja el.

43. Vegyük szemügyre a $V_1^I, IV = [B_1^{III} C_1^{II} A_2^{VI} A_3^V]_I$ négyszöget és annak $\Delta^I, IV = [1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6]$ átlóháromszögét, mely egyszersmind átlóháromszöge az

$$Y^I, IV = Y'_{13} Y'_{24} Y'_{56} Y''_{13} Y''_{24} Y''_{56}$$

négyszögnek is. A mondott átlóháromszögnek szögpontjait a Σ^I, IV SALMON-ponttal összekötve, az Y_{56}, Y_{13}, Y_{24} egyeneseket nyerjük.

A Δ^I, IV háromszög (1 3, 2 4) szögpontján keresztülmenő V_1^I, IV négyszög oldala, γ -egyenes és PASCAL-egyenesek közül a

$$Y'_{56} B_{11}^{III} C_{11}^{II} = | P^I A_1^{IV} |, Y_{56}$$

harmonicusan választják el a

$$\beta_1^{II} = | P^{II} C_1^{II} A_1^{II} | \quad \gamma_1^{III} = | P^{III} A_1^{III} B_1^{III} |$$

egyeneseket. Minthogy azonban a

$$P^I, (Y_{12} Y_{34} Y_{56}), P^{II}, P^{III}$$

pontok a p -egyenesen fekszenek, azért a két első pont a két utóbbit is harmonicusan választja el.

Hasonló úton, ha a $V_1^{II, IV}, V_1^{III, IV}$ négyszögekből indulunk ki, kimutatható, hogy a p -egyenesen fekvő

$$P^{II}, (Y_{14} Y_{25} Y_{36}), P^{III}, P^I \text{ és } P^{III}, (Y_{23} Y_{16} Y_{45}), P^I, P^{II}$$

pontok harmonicus helyzetűek.

Tekintve, hogy az $(Y_{12} Y_{34} Y_{56}), (Y_{14} Y_{25} Y_{36}), (Y_{23} Y_{16} Y_{45})$ pontok az $\gamma^{II, III}, \gamma^{III, I}, \gamma^{I, II}$ négyszögeknek szögpontjai, mondhatjuk:

Minden CAYLEY-egyenes három KIRKMAN-pontot és az γ -négyszögek három szögpontját tartalmazza, a mely hat pont involutiót képez. Két-két ily KIRKMAN-pont a harmadik KIRKMAN-pontot, az γ -négyszögek egyik szögpontjától s így egyszerűen az γ -négyszögek két szögpontja a harmadik szög-pontot egy KIRKMAN-ponttól harmonicusan választja el.

Jegyzet. Ha e tételt a 36. tétellel a 151. lapon összehasonlítjuk, azt látjuk, hogy a PASCAL-egyenesek és az Y négyoldalak oldalai *nem felelnek meg dualisan* a KIRKMAN-pontoknak és az γ -négyszögek szögpontjainak. E szerint VERONESE »Sull' hexagrammum mysticum« című értekezésének LXI. theoremája *hibás*.

44. A 38. pontban kimutattuk, hogy az $a_1^V a_2^V a_3^{VI}, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ háromszögek az $(Y_{12} Y_{34} Y_{56})$ collineatio-középpontra és a $\sigma^{II, III}$ collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectívások.

Ugyanígy kimutatható, hogy a

$$\begin{array}{ccc} p^I a_2^V a_3^{VI} & p^I a_3^{VI} a_1^{IV} & p^I a_1^{IV} a_2^V \\ \pi \alpha_2 \alpha_3 & \pi \alpha_3 \alpha_1 & \pi \alpha_1 \alpha_2 \end{array}$$

háromszögpárok is perspectívások az $(Y'_{12} Y'_{34} Y'_{56}), (Y'_{12} Y'_{34} Y'_{56}),$

($Y_{12} Y'_{34} Y'_{56}$) collineatio-középpontokra és a $\sigma^{II, III}$ egyenesre, mint collineatio-tengelyre, vonatkozólag, vagyis:

$\triangleright A^{v^{II, III}} = p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}$,
 $s^{II, III} = \pi \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ négyoldalak négy pár háromszögre bonthatók, melyek az $y^{II, III}$ négyszög szögpontjaira és a $\sigma^{II, III}$ egyenesre, mint collineatio-középpontokra és tengelyre vonatkozólag perspectivásak; a szögpontokat vetítő sugarak az $y^{II, III}$ négyszög oldalai.

$\triangleright A^{V^{II, III}} = p^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}$,
 $S^{II, III} = \Pi A_1 A_2 A_3$ négyszögek négy pár háromszögre bonthatók, melyek a $Y^{II, III}$ négyoldalra és a $\Sigma^{II, III}$ pontra, mint collineatio-tengelyekre és középpontra vonatkozólag perspectivásak; a megfelelő oldalak metszőpontjai az $Y^{II, III}$ négyoldal szögpontjai (30.)

Tudjuk továbbá (27. és 41. pont), hogy a $\sigma^{II, III}$ STEINER-egyenes P, A_1, A_2, A_3 STEINER-pontjából kisugárzó

$$\pi p^I p^{II} p^{III} \alpha_1 a_1^{IV} a_1^{II} a_1^{III} \alpha_2 a_2^V a_2^{II} a_2^{III} \alpha_3 a_3^{VI} a_3^{II} a_3^{III}$$

PASCAL-egyenesek az

$$\begin{aligned} s^{II, III} &= \pi \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 p^{II} a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II} \\ v^{II, III} &= p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI} p^{III} a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III} \end{aligned}$$

négyszögek oldalai.

A két első és a két utóbbi négyszög a $\sigma^{II, III}$ collineatio-tengelyre és az

$$y^{II, III} = Y_{12} Y_{34} Y_{56} Y'_{12} Y'_{34} Y'_{56}, V_1^{II, III} = [p^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}]_I$$

négyszög szögpontjaira, mint collineatio-középpontokra vonatkozólag perspectivás, maguk az $y^{II, III}, V_1^{II, III}$ négyszögek pedig a $\sigma^{II, III}$ és $\Sigma^{II, III}$ tengelyre és középpontra vonatkozólag perspectivásak.

45. Az $y^{II, III}, V_1^{II, III}$ négyszögekkel együtt azoknak $D^{II, III}, \Delta^{II, III}$ átlóháromszögei is perspectivásak az $\sigma^{II, III}$ $\Sigma^{II, III}$ -ra vonatkozólag. Ámde e háromszögeknek megfelelő szögpontjai

$$\begin{aligned} D_{12} &= (Y_{12} Y'_{12}) & D_{34} &= (Y_{34} Y'_{34}) & D_{56} &= (Y_{56} Y'_{56}) \\ &(34, 56) & &(56, 12) & &(12, 34), \end{aligned}$$

s ennélfogva a $\Sigma^{II, III}$ pontot a $\Delta^{II, III}$ háromszög szögpontjaival összekötő egyenesek, névszerint $y''_{12}, y''_{34}, y''_{56}$, a $D^{II, III}$ háromszög szögpontjain mennek keresztül, és a $\sigma^{II, III}$ egyenesnek $Y''_{12}, Y''_{34}, Y''_{56}$ metszőpontjai a $\Delta^{II, III}$ háromszög 12 34 56 oldalával a $D^{II, III}$ háromszög oldalain fekszenek.

Abból továbbá, hogy a $\Delta^{II, III}$ átlóháromszöge az $Y^{II, III}$ négyszögnek, következnek:

Az

$$Y^{II, III} = Y_{12} Y_{34} Y_{56} Y'_{12} Y'_{34} Y'_{56}, \quad y^{II, III} = y_{12} y_{34} y_{56} y'_{12} y'_{34} y'_{56}$$

négyszög és négyszög átlóháromszögei $\Delta^{II, III}$ és $D^{II, III}$ a hozzájuk rendelt $\sigma^{II, III}$ STEINER-egyenesre, mint collineatio-tengelyre, és a hozzájuk rendelt $\Sigma^{II, III}$ SALMON-pontra, mint középpontra, vonatkozólag perspectivásak; a megfelelő oldalak metszéspontjai $Y'_{12} Y'_{34} Y'_{56}$, és a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek $y''_{12}, y''_{34}, y''_{56}$.

Továbbá:

A negyvenöt y -egyenes egymást hármasával a tizenöt SALMON-ponton és a CAYLEY-egyeneseken fekvő hatvan ponton kívül még tizenöt D -pontban metszi, melyek a tizenöt y -négyszög D -átlóháromszögeinek szögpontjai.

Valamint hogy a tizenöt Δ -háromszög negyvenöt szögpontja a negyvenöt y -egyenesen fekszik, azonképen a tizenöt D -háromszög negyvenöt oldala a negyvenöt Y -ponton megy keresztül.

46. Miután az $y_{12}, y'_{12}, y''_{12}$ egyenesek egymást ugyanegy pontban, D_{12} -ben, metszik, e pont szögpontja a

$$D^{II, III} = D_{12} D_{34} D_{56}, \quad D^{IV, V} = D_{12} D_{36} D_{54}, \quad D^{I, VI} = D_{12} D_{35} D_{64}$$

háromszögnek. Tehát:

A tizenöt y -négyszög átlóháromszögeinek, azaz a tizenöt D -háromszögnek csak tizenöt szögpontja van, miként a tizenöt Y -négyszög Δ átlóháromszögeinek is csak tizenöt oldala van.

Az $y^{II, III}, y^{I, VI}, y^{IV, V}$ négyszögek $y_{12}, y'_{12}; y''_{12}, y_{12}$ szemben fekvő oldalpárjai

$$a \ D^{II, III} \text{ háromszögnek } D_{12} D_{34} = (y_{12} y'_{12}) (y_{34} y'_{34}),$$

$$D_{12} D_{56} = (y_{12} y'_{12}) (y_{56} y'_{56}) \text{ oldalait,}$$

$$a \ D^{I, VI} \text{ háromszögnek } D_{12} D_{35} = (y'_{12} y''_{12}) (y'_{35} y''_{35}),$$

$$D_{12} D_{64} = (y'_{12} y''_{12}) (y'_{64} y''_{64}) \text{ oldalait,}$$

$$a \ D^{IV, V} \text{ háromszögnek } D_{12} D_{36} = (y''_{12} y_{12}) (y''_{36} y_{36}),$$

$$D_{12} D_{54} = (y''_{12} y_{12}) (y''_{54} y_{54}) \text{ oldalait}$$

harmonicusan választják el.

A D háromszögeknek a D-háromszögek szögpontjaiból kisugárzó három oldalpárja ugyanazon szögpontokból kisugárzó y-egyenesektől harmonicusan van elválasztva. (Megfelel a 30. pontban levő tételnek).

47. Az

$$y^{v, vi} = y_{56} y_{14} y_{32} y''_{56} y''_{14} y''_{32}; \quad y^{vi, iv} = y_{34} y_{52} y_{16} y''_{34} y''_{52} y''_{16}; \\ y^{iv, v} = y_{12} y_{36} y_{54} y''_{12} y''_{36} y''_{54}$$

négyszögek oldalpárjai egymást az

$$(y_{56} y_{34} y_{12}), \quad \Sigma^{ii, iii} = (y''_{56} y''_{34} y''_{12}); \quad (y_{14} y_{52} y_{36}), \quad \Sigma^{iii, i} = (y''_{14} y''_{52} y''_{36}); \\ (y_{32} y_{16} y_{54}), \quad \Sigma^{i, ii} = (y''_{32} y''_{16} y''_{54})$$

pontpárookban metszik, melyek a π -egyenesen involutiót képeznek.

Ama négyszögek tizenkét szögpontja közül

$$(y_{56} y_{14} y_{32}) \quad (y_{34} y_{52} y_{16}) \quad (y_{12} y_{36} y_{54})$$

a π CAYLEY-egyenesen fekszik, a többi pedig szögpontja a következő perspectívás háromszögeknek:

$$y''_{56} y''_{14} y''_{32}, \quad y''_{34} y''_{52} y''_{16}, \quad y''_{12} y''_{36} y''_{54},$$

mely háromszögekhez tartozó collineatio középpontok a π -egyenesen fekszenek.

Ugyanis az

$$y''_{56} y''_{14} y''_{32}, \quad [A_1^i B_1^{ii} \Gamma_1^{iii}]_1, \quad [A_2^i B_2^{ii} \Gamma_2^{iii}]_1, \quad y''_{34} y''_{52} y''_{16}$$

háromszögek közül

az 1-ső perspectívás a 2-ikkal $\Sigma^{v, vi}$, $\sigma^{v, vi}$ -ra vonatkozólag (41.)

a 2-ik > a 3-ikkal P, π^{vi} -ra >

a 3-ik > a 4-ikkal $\Sigma^{vi, iv}$, $\sigma^{vi, iv}$ -re >

a 4-ik > az 1-sővel p-ra >

s mert a négy collineatio-tengely egymást a II STEINER-pontban metszi, a collineatio-középpontok a π -egyenesen fekszenek.

Ugyanezen az úton következtethető, hogy az $y''_{56} y''_{14} y''_{32}$, $y''_{12} y''_{36} y''_{54}$ és $y''_{34} y''_{52} y''_{16}$, $y''_{12} y''_{36} y''_{54}$ perspectívás háromszögek collineatio-középpontjai is a π -egyenesen fekszenek.

Mínt hogy az $y^{v, vi}$, $y^{vi, iv}$, $y^{iv, v}$ négyszögeknek három szögpontja a π -egyenesen volt, következtethető, hogy azok páronként

perspectivásak; a közös collineatio-tengely a p-egyenes, és a három collineatio-középpont a π -egyenesen van.

Ama négyszögek

$$D^V, \text{ VI} = D_{56} D_{14} D_{32}, \quad D^{\text{VI}}, \text{ IV} = D_{34} D_{52} D_{16}, \quad D^{\text{IV}}, \text{ V} = D_{12} D_{36} D_{54}$$

átlóháromszögei tehát szintén perspectivásak a p collineatio-tengelyre és a π -egyenesen fekvő collineatio-középpontokra vonatkozólag, és a megfelelő oldalak metszéspontjai közül kettő-kettő harmonicusan választja el annak az involutióknak kapcsolt pontpárjait, a mely involutio szerint az $y^V, \text{ VI}, y^{\text{VI}}, \text{ IV}, y^{\text{IV}}, \text{ V}$ négyszögek oldalai a p-egyeneset metszik; vagyis a

$$\begin{aligned} (D_{56} D_{14}, D_{34} D_{52}, D_{12} D_{36}), & \quad (D_{56} D_{32}, D_{34} D_{16}, D_{12} D_{54}), \\ & \quad (y_{56} y_{34} y_{12}), \quad (y''_{56} y''_{34} y''_{12}); \\ (D_{12} D_{32}, D_{52} D_{16}, D_{36} D_{54}), & \quad (D_{14} D_{56}, D_{52} D_{34}, D_{36} D_{12}), \\ & \quad (y_{14} y_{52} y_{36}), \quad (y''_{14} y''_{52} y''_{36}); \\ (D_{32} D_{56}, D_{16} D_{34}, D_{54} D_{12}), & \quad (D_{32} D_{14}, D_{16} D_{52}, D_{54} D_{36}), \\ & \quad (y_{32} y_{16} y_{54}), \quad (y''_{32} y''_{16} y''_{54}) \end{aligned}$$

pontok harmonicusan négyest képeznek.

A $D^V, \text{ VI}, D^{\text{VI}}, \text{ IV}, D^{\text{IV}}, \text{ V}$ háromszögeknek szögpontjai egyszerűs mind szögpontjai az

$$\begin{aligned} y^{\text{II}}, \text{ III} = y_{56} y_{34} y_{12} y'_{56} y'_{34} y'_{12}, \quad y^{\text{III}}, \text{ I} = y_{14} y_{52} y_{36} y'_{14} y'_{52} y'_{36}, \\ y^{\text{I}}, \text{ II} = y_{32} y_{16} y_{54} y'_{32} y'_{16} y'_{54} \end{aligned}$$

négyszögek

$$D^{\text{II}}, \text{ III} = D_{12} D_{34} D_{56}, \quad D^{\text{III}}, \text{ I} = D_{36} D_{52} D_{14}, \quad D^{\text{I}}, \text{ II} = D_{54} D_{16} D_{32}$$

átlóháromszögeinek, mely utóbbi négy- és háromszögek a π collineatio-tengelyre a p-egyenesen fekvő collineatio-középpontokra vonatkozólag perspectivásak.

Jelen esetben is a négyszögek megfelelő oldalainak metszéspontjai

$$\begin{aligned} (y_{56} y_{14} y_{32}), \quad \Sigma^V, \text{ VI} = (y'_{56} y'_{14} y'_{32}); \quad (y_{34} y_{52} y_{16}), \quad \Sigma^{\text{VI}}, \text{ IV} = (y'_{34} y'_{52} y'_{16}); \\ (y_{12} y_{36} y_{54}), \quad \Sigma^{\text{IV}}, \text{ V} = (y'_{12} y'_{36} y'_{54}) \end{aligned}$$

harmonicusan vannak elválasztva a háromszögek megfelelő oldalainak

$$\begin{aligned} (D_{12} D_{34}, D_{36} D_{52}, D_{54} D_{16}), \quad (D_{34} D_{56}, D_{52} D_{14}, D_{16} D_{32}), \\ (D_{56} D_{12}, D_{14} D_{36}, D_{32} D_{54}) \end{aligned}$$

metszőpontjaitól. Ámde ez utóbbi pontok a $D^V, VI, D^{VI, IV}, D^{IV, V}, y^V, VI, y^{VI, IV}, y^{IV, V}$ perspectivás három- és négyszögek collineatio-középpontjai; ennél fogva mondhatjuk:

A tizenöt y-négyszög (és a tizenöt D-háromszög) közül húszszor választhatunk ki hármat, mely páronként perspectivás a CAYLEY-egyenesekre, mint collineatio-tengelyekre, vonatkozólag. A három collineatio-középpont, mely ily három perspectivás y-négyszöghez (és D-háromszöghez) tartozik, a CAYLEY-egyenes ellenegyenesén fekszik és harmonicusan választja el annak az involutióknak kapcsolt pontpárjait, mely involutiót a CAYLEY-egyenesen fekvő SALMON-pontoknak és az y-négyszögeknek szögpontjai képeznek.

Jegyzet. E három collineatio-középpont nem esik egybe a CAYLEY-egyenes KIRKMAN-pontjaival, mert két KIRKMAN-pont az y-négyszögeknek egy szögpontjától és a harmadik KIRKMAN-ponttól van harmonicusan elválasztva, holott két collineatio-középpont az y-négyszögek egy szögpontjától és egy SALMON-ponttól van harmonicusan elválasztva.

48. E fejezet végén még az Y-pontok- és y-egyeneseknek, valamint a g_{01} egyeneseken fekvő pontoknak említésre méltó helyzeti viszonyáról akarunk szólni.

A (3 4, 5 6), illetve (5 4, 3 6) ponton keresztül menő

$$g_{01} = A_1^{IV} A_2^V B_{31}^{II} \Gamma_{31}^{III}, \quad g'_{01} = A_{11}^{IV} A_{21}^V B_3^{II} \Gamma_3^{III}$$

egyenespár egymást az Y_{12} pontban metszi.

Az $y''_{12} = \Sigma^{II, III}$ (3 4, 5 6) egyenes az $A_1^{IV} A_2^V, A_{11}^{IV} A_{21}^V$ pontpárokat és az $y'_{12} = \Sigma^{IV, V}$ (3 6, 5 4) egyenes a $B_3^{II} \Gamma_3^{III}, B_{31}^{II} \Gamma_{31}^{III}$ pontpárokat

harmonicusan választja el az Y_{12} ponttól. E szerint:

»Minden Y-ponton egy g_{01} és egy g'_{01} egyenes megy keresztül, melyeken két-két KIRKMAN- és két-két V_1 -pont fekszik. A két KIRKMAN-pont a g_{01} egyenesen és a két V_1 -pont a g'_{01} egyenesen, és fordítva a két KIRKMAN-pont a g'_{01} és a két V_1 -pont a g_{01} egyenesen, a felvett Y-ponttól és egy-egy y-egyenesről harmonicusan van elválasztva. A két y-egyenesnek és az Y-pontnak ugyanazon alsó, de különböző felső mutatója van.

Jegyzet. 1. Ha a VII. táblázatban a nagy betűket kicsinyekkel cseréljük löl, akkor az egyes y-négyszögek oldalait nyerjük.

2. A VIII. táblázatból látható, hogy mely y-egyenesek mennek keresztül az egyes SALMON-pontokon.

| | | |
|---|--|---|
| $\Sigma^{II, III} = (y''_{12} y''_{34} y''_{56})$ | $\Sigma^{III, I} = (y''_{14} y''_{36} y''_{52})$ | $\Sigma^{I, II} = (y''_{16} y''_{32} y''_{54})$ |
| $\Sigma^{V, VI} = (y'_{14} y'_{32} y'_{56})$ | $\Sigma^{VI, IV} = (y'_{16} y'_{34} y'_{52})$ | $\Sigma^{IV, V} = (y'_{12} y'_{36} y'_{54})$ |
| $\Sigma^{I, IV} = (y_{13} y_{24} y_{56})$ | $\Sigma^{II, IV} = (y_{14} y'_{35} y'_{26})$ | $\Sigma^{III, IV} = (y''_{15} y''_{46} y_{32})$ |
| $\Sigma^{I, V} = (y_{15} y_{26} y_{34})$ | $\Sigma^{II, V} = (y'_{13} y_{25} y'_{46})$ | $\Sigma^{III, V} = (y_{16} y''_{24} y''_{35})$ |
| $\Sigma^{I, VI} = (y_{12} y_{35} y_{46})$ | $\Sigma^{II, VI} = (y'_{15} y'_{24} y_{36})$ | $\Sigma^{III, VI} = (y''_{13} y_{45} y''_{26})$ |

(VIII. táblázat.)

12. A v_1 -Veronese-egyenesekről.

49. Ismeretes, hogy a P^1 KIRKMAN-ponton keresztül menő $\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I$ PASCAL-egyeneselekhez a p^I egyenesen fekvő $A_1^I A_2^I A_3^I$ KIRKMAN-pontok vannak rendelve.

De ugyanezekhez a PASCAL-egyeneselekhez az $A_{11}^I A_{21}^I A_{31}^I$ pontok is rendelvek, melyekről szintén kimutatható, hogy egy p_1^I egyenesen fekszenek, mely épen úgy, mint a p^I , keresztül megy a P-ponton.

Ugyanis az

$$(12, 34) (56, 12) (34, 56) \quad B_1^{IV} B_2^V B_3^{VI}, C_1^{IV} C_2^V C_3^{VI}$$

háromszögek a II collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivásak, mert megfelelő szögpontjaik a $\pi^{IV}, \pi^V, \pi^{VI}$ egyenesekben fekszenek.

De az 1-ső és 2-ik, 1-ső és 3-ik háromszöghöz tartozó collineatio-tengelyek, mert megfelelő oldalainak metszéspontjai a

$$(12, 45), (34, 61), (56, 23); (12, 36), (34, 52), (56, 14)$$

pontok, a p^{II}, p^{III} egyenesek. De a 2-ik és 3-ik háromszög oldalai g_{01} egyenesek, melyeket V_1 -pontokkal ekkép fejezhetünk ki (V. táblázat):

$$\begin{vmatrix} A_1^I \Gamma_1^{III} & A_2^I \Gamma_2^{III} & A_3^I \Gamma_3^{III} \\ A_1^I B_1^{II} & A_2^I B_2^{II} & A_3^I B_3^{II} \end{vmatrix}_1$$

Ennélfogva az $|A_1^I A_2^I A_3^I|_1$ pontok, mint a megfelelő olda-

lak metszőpontjai, egy p_1^I egyenesen fekszenek, mely a $P=(p^I p^{III})$ ponton megy keresztül.

Ha még meggondoljuk, hogy az $\alpha_1^I, \alpha_2^I, \alpha_3^I$ egyenesek P^I metszőpontja a p -egyenesen fekszik, kimondhatjuk a következő tételt:

Egy CAYLEY-egyenesen fekvő KIRKMAN-pontból kisugárzó három PASCAL-egyeneshez oly három V_1 pont van rendelve, mely a CAYLEY-egyeneshez rendelt STEINER-ponttal együtt egy egyenesen fekszik.

Ezt az egyenest a KIRKMAN-ponthoz rendelt v_1 VERONESE-egyenesnek, vagy röviden v_1 egyenesnek nevezzük általánosan, s mint-hogy minden KIRKMAN-ponthoz egy v_1 egyenes van rendelve, azért a v_1 egyenesek száma hatvan. Ez egyeneseket külön-külön akkép jelöljük, mint a KIRKMAN-pontokhoz rendelt PASCAL-egyeneseket, de megkülönböztetésül még egy „ ν_1 » mutatót függesztünk hozzájuk.

Igy a

$$p^I, P^I=(\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I), P_1^I, p_1^I = |A_1^I A_2^I A_3^I| = |A_1^I A_2^I A_3^I|,$$

pontok és egyenesek egymáshoz rendelvek.

Miután minden PASCAL-egyenesen három KIRKMAN-pont fekszik, minden V_1 ponton is három v_1 egyenes megy keresztül; s mert minden CAYLEY-egyenesen három KIRKMAN-pont van, azért minden STEINER-ponton három v_1 egyenes megy keresztül. Ennélfogva:

A hatvan v_1 egyenes hármásával a hatvan V_1 ponton és a húsz STEINER-ponton megy keresztül.

A hatvan V_1 pont hármásával a hatvan v_1 egyenesen és húsz CAYLEY-egyenesen fekszik.

50. Vizsgáljuk most meg, hogy egy DESARGUES-configuratio tíz PASCAL-egyeneséhez és tíz KIRKMAN-pontjához rendelt V_1, v_1 pontok és egyenesek mily configuratiót képeznek.

A p^I egyenesen fekvő $A_1^I A_2^I A_3^I$ pontokhoz oly $\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I$ egyenesek vannak rendelve, melyek egymást a p^I -hez rendelt P_1^I pontban metszik; továbbá a P^I ponton keresztül menő $\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I$ egyenesekhez oly $A_1^I A_2^I A_3^I$ pontok vannak rendelve, melyek a P^I -hez rendelt p_1^I egyenesen fekszenek. Miután a

$$b_1^I b_2^I b_3^I = C_1^I C_2^I C_3^I, \quad c_1^I c_2^I c_3^I = B_1^I B_2^I B_3^I$$

háromszögek, melyeknek szögpontjai az $\alpha_1^I, \alpha_2^I, \alpha_3^I$ egyeneseken fekszenek és melyeknek oldalai egymást az A_1^I, A_2^I, A_3^I pontokban metszik, a

$$P^I = (\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I), \quad p^I = | \mathbf{A}_1^I \mathbf{A}_2^I \mathbf{A}_3^I |$$

pontra és egyenesre vonatkozólag perspectivásak, a

$$(B_1^I B_2^I B_3^I)_I = (c_1^I c_2^I c_3^I)_I, \quad (C_1^I C_2^I C_3^I)_I = (b_1^I b_2^I b_3^I)_I,$$

háromszögek is, melyeknek oldalai egymást az $| \mathbf{A}_1^I, \mathbf{A}_2^I, \mathbf{A}_3^I |$, pontokban metszik és melyeknek szögpontjai az $| \alpha_1^I, \alpha_2^I, \alpha_3^I |$ egyeneseken fekszenek, perspectivásak a

$$p_1^I = | \mathbf{A}_1^I \mathbf{A}_2^I \mathbf{A}_3^I |_I, \quad P_1^I = (\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I)_I,$$

egyenesre és pontra, mint collineatio-tengelyre és középpontra, vonatkozólag. Ennélfogva:

A hatvan V_1 pontból és hatvan v_1 egyenesből álló $[V_1 v_1] = [Vv]_1$ configuratio, ép úgy, mint a hatvan PASCAL-egyenesből v -ből és hatvan KIRKMAN-pontból V -ből álló $[Vv]$ configuratio, hat DESARGUES-configuratióra oszlik. Mindkét configuratio $[Vv]$, $[Vv]_1$ a két $H = (15_4, 20_3)$, $H' = (20_3, 15_4)$ HESSE-configuratio irányában egyenlőképp viselkedik, a mennyiben minden STEINER-ponton keresztül megy három v_1 és három v -egyenes és minden CAYLEY-egyenesen három V_1 és három V -pont fekszik.

51. A 44. pontban két háromszöget

$$B_1^{IV} B_2^V B_3^{VI}, \quad C_1^{IV} C_2^V C_3^{VI}$$

tárgyaltunk, melyek egymás irányában és az $A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}$ irányában, a $p_1^I, p_1^{II}, p_1^{III}$ collineatio-tengelyekre és a π pontra vonatkozólag, perspectivásak voltak. A három háromszög tehát egy $(15_4, 20_3)$ HESSE-configuratiót képezett. Ennek húsz pontja a kilencz KIRKMAN-és a kilencz V_1 pont

$$(\mathbf{A}_1^I \mathbf{A}_2^I \mathbf{A}_3^I \mathbf{B}_1^{II} \mathbf{B}_2^{II} \mathbf{B}_3^{II} \Gamma_1^{III} \Gamma_2^{III} \Gamma_3^{III})_I,$$

valamint a $P II$ STEINER-ellenpontpár; tizenöt egyenese pedig a három $\pi^{IV}, \pi^V, \pi^{VI}$ PASCAL-egyenes, a három v_1 egyenes,

$$p_1^I = | \mathbf{A}_1^I \mathbf{A}_2^I \mathbf{A}_3^I |_I, \quad p_1^{II} = | \mathbf{B}_1^{II} \mathbf{B}_2^{II} \mathbf{B}_3^{II} |_I, \quad p_1^{III} = | \Gamma_1^{III} \Gamma_2^{III} \Gamma_3^{III} |_I,$$

és kilencz g_{01} egyenes, a melyeken két-két KIRKMAN- és két-két V_1 pont (V. táblázat) fekszik. Ennélfogva:

Egy STEINER-pontból kisugárzó három

| | | |
|---|---|--|
| PASCAL-egyenesen kilencz KIRKMAN-pont fekszik; ezek három, páronként perspectívás háromszögnek szögpontjai. A megfelelő oldalak metszőpontjai V_1 -pontok; a collineatio tengelyek v_1 egyenesek, | v_1 egyenesen kilencz V_1 pont fekszik; ezek három, páronként perspectívás háromszögnek szögpontjai. A megfelelő háromszög- oldalak metszőpontjai KIRKMAN-pontok; a collineatio-tengelyek PASCAL-egyenesek, | STEINER-egyenesen kilencz STEINER-pont fekszik; ezek három, páronként perspectívás háromszögnek szögpontjai. A megfelelő háromszög- oldalak metszőpontjai STEINER-pontok; a collineatio-tengelyek STEINER-egyenesek, |
|---|---|--|

melyek egymást a STEINER-pont ellenpontjában metszik.

A középső tétel a configuratio

$$[A_i^I B_i^{II} \Gamma_i^{III}]_i \dots (i=1, 2, 3)$$

háromszögeiből folyik és általánosítható.

52. A

$$V_1^{V, VI} = [II^{IV} A_1^I B_1^{II} \Gamma_1^{III}]_1, \quad V_1^{VI, IV} = [II^{IV} A_2^I B_2^{II} \Gamma_2^{III}]_1, \\ V_1^{IV, V} = [II^{IV} A_3^I B_3^{II} \Gamma_3^{III}]_1$$

négyszögek szögpontjai a P ponton keresztül menő $\pi p_1^I p_1^{II} p_1^{III}$ egyenesen fekszenek, és a P pont és $\pi^{IV}, \pi^V, \pi^{VI}$ collineatio-tengelyekre perspectívásak.

Ugyanis ama négyszögek átlós háromszögei: $\Delta^V, \Delta^{VI}, \Delta^{VI, IV}, \Delta^{IV, V}$, valamint az

$$[A_i^I B_i^{II} \Gamma_i^{III}]_i \dots (i=1, 2, 3)$$

háromszögek, mint ama négyszögeknek részei, a nevezett pontra és collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspectívásak.

Mint hogy ama négyszögek a II STEINER-ponton keresztül menő $\sigma^{V, VI}, \sigma^{VI, IV}, \sigma^{IV, V}$ STEINER-egyenesekhez vannak rendelve, következnek:

»Egy STEINER ponton keresztül menő három STEINER-egyeneshez rendelt három V_1 négyszög páronként perspectívás. A STEINER-ponton keresztül menő PASCAL-egyenesek képezik a collineatio-tengelyeket, a STEINER-pont ellenpontja a közös collineatio középpont.

Vagy még:

»A tizenöt V_1 négyszög hármásával húszlélekép perspectivás, a húsz STEINER-pont képezi a collineatio-középpontokat; az ezeknek ellenpontjain keresztül menő PASCAL egyenesek pedig a collineatio-tengelyek«.

Mindkét tételt már a 33. pontban levezettük.

53. A 35. pontban foglalt tétel alapján (9. ábra):

$$(A_{11}^{IV} \Sigma^{II, III} A_1^{IV} A_1) = -1,$$

tehát egyszersemind azoknál a sugaraknál

$$\Pi A_{11}^{IV} = \pi_1^{IV}, \Pi \Sigma^{II, III} = p, \Pi A_1^{IV} = \pi^{IV}, \Pi A_1 = \sigma^V, \sigma^VI,$$

melyek e négyes pontjait a Π pontból projiciálják

$$(\pi_1^{IV} p \pi^{IV} \sigma^V, \sigma^VI) = -1.$$

Ugyanígy, a Π pontból kisugárzó többi $\Pi A_{21}^V = \pi_1^V, \Pi A_{31}^{VI} = \pi_1^{VI}, \dots$ sugarakat tekintve,

$$(\pi_1^V p \pi^V \sigma^{VI, IV}) = (\pi_1^{VI} p \pi^{VI} \sigma^{IV, V}) = -1.$$

Ez pedig a következőképpen fejezhető ki:

Minden STEINER-pontból kisugárzik egy CAYLEY-, három PASCAL-, három v_1 -, és három STEINER-egyenes. A CAYLEY-egyenes és a v_1 -egyenes, az utóbbihoz rendelt PASCAL-egyenestől és egy STEINER-egyenestől harmonicusan van elválasztva.

Ennélfogva, ha a PASCAL-, CAYLEY-, és STEINER-egyenesek ismeretesek, ezekből a v_1 -egyenesek egyszerű úton szerkeszthetők. Mert pl. a P ponton keresztül menő $p_1^I, p_1^{II}, p_1^{III}$ egyenesekre nézve

$$(p_1^I \pi p^I \sigma^{II, III}) = (p_1^{II} \pi p^{II} \sigma^{III, I}) = (p_1^{III} \pi p^{III} \sigma^I, II) = -1.$$

13. A Pascal-egyenesek nincsenek correlatiós vonatkozásban a Kirkman-, és V_1 -pontokkal, és nincsenek collinearis vonatkozásban a v_1 -egyenesekkel.

54. A fentebbiekből meggyőződhattünk arról, hogy a hatvan

| | | |
|--------------------------------------|--|--|
| PASCAL-egyenes | KIRKMAN-pont | V_1 pont |
| 1. hármásával a húsz STEINER-ponton, | 1. hármásával a húsz CAYLEY-egyenesen, | 1. hármásával a húsz CAYLEY-egyenesen, |

| | | |
|---|--|---|
| 2. hármasával a hatvan KIRKMAN ponton, | 2. hármasával a hatvan PASCAL-egyenesen fekszik. | 2. hármasával a hatvan v_1 egyenesen fekszik. |
| 3. négyesével a negyvenöt PASCAL-ponton megy keresztül. | | |

Vizsgáljuk most meg, hogy *nem fekszenek-e az olyan KIRKMAN-, valamint V_1 -pontok, melyek egy PASCAL-ponton keresztül menő négy PASCAL-egyeneshez vannak rendelve, ugyanegy egyenesben?*

Az (14, 23) ponton (I. táblázat) keresztül mennek a $p^I a_1^{IV}$ $b_1^{III} c_1^{II}$ PASCAL-egyenesek, melyekhez a

$$P^I A_1^{IV} B_1^{III} C_1^{II}; \quad | \quad P^I A_1^{IV} B_1^{III} C_1^{II} |_1$$

pontok vannak rendelve, és az V. és IV. táblázat szerint a

$$P_1^I A_1^{IV} B_1^{III} C_1^{II} (12, 34), \quad \text{valamint a } B_1^{III} C_1^{II} P_1^I A_1^{IV} (13, 24)$$

pontok egy-egy egyenesben (g_{01}, g'_{01}) fekszenek.

Ha már most ama négy KIRKMAN- és négy V_1 -pont egy-egy egyenesben feküdnék, akkor ez a két egyenes egybeesnék, egy q -egyenessel, mert mindegyiknek két közös pontja van a másik egyenessel, és akkor az (12, 34), (13, 24) pontok is a q egyenesen volnának. Ámde

$$\begin{aligned} \text{az } (13, 24) \text{ és } C_1^{II} = (\beta_1^{II} a_2^{II} a_3^{II}) \text{ pontok összekötő egyenese: } & \beta_1^{II}, \\ \text{» } (12, 34) \text{ » } A_1^{IV} = (\pi^{IV} \alpha_2^{IV} \alpha_3^{IV}) \text{ » » » } & \pi^{IV}; \end{aligned}$$

ennél fogva a q egyenes úgy a β_1^{II} , mint a π^{IV} -gyel egybeesnék. Minthogy azonban az általános PASCAL-hatszögben a β_1^{II} és π^{IV} PASCAL-egyenesek különbözők, ama feltevésünk, hogy a négy KIRKMAN-, vagy a négy V_1 -pont egy egyenesben fekszik, hamis. Így tehát:

Egy PASCAL-pontból kisúgárzó négy PASCAL-egyeneshez rendelt négy KIRKMAN-, valamint négy V_1 pont nem fekszik ugyanegy egyenesben.

Ennek pedig az a következménye, hogy *a hatvan PASCAL-egyenes képezte configuratio sem a hatvan KIRKMAN-pontból, sem pedig a hatvan V_1 pontból álló configuratióval nincs correlatióban.*

55. Vizsgáljuk még meg, hogy *a hatvan PASCAL-egyenes, és a hatvan v_1 egyenes képezte configurációk nem collinearis alakzatai-e egymásnak?*

Ha ismét kimutathatjuk, hogy négy egymást egy (PASCAL) pontban metsző PASCAL-egyeneshez rendelt v_1 egyenes nem metszi egymást egy pontban, akkor a PASCAL-egyenesek és v_1 -egyenesek nem lehetnek egymásnak collinearis alakzatai akképpen, mint a hogy az egymáshoz rendelést egész eddigi tárgyalásunk folyamán eszközöltük.

A 9. ábrában három négyszöget $V^{II}, III = P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}$, $V_1^{II}, III = [P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}]_1$, $S^{II}, III = \Pi A_1 A_2 A_3$ látunk, melyeknek szögpontjai az egymást a Σ^{II}, III pontban metsző p a₁ a₂ a₃ egyenesen fekszenek.

Ha az alábbi egyenesek metszéspontjai

$$\begin{aligned} (A_1 A_{2_1}^V, A_2 A_{1_1}^{IV}) &= (34, 56)_1, & (A_1^{IV} A_{2_1}^V, A_2^V A_{1_1}^{IV}) &= (34, 56)'_1 \\ (A_2 A_{3_1}^{VI}, A_3 A_{2_1}^V) &= (12, 34)_1, & (A_2^V A_{3_1}^{VI}, A_3^{VI} A_{2_1}^V) &= (12, 34)'_1 \\ (A_3 A_{1_1}^{IV}, A_1 A_{3_1}^{VI}) &= (56, 12)_1, & (A_3^{VI} A_{1_1}^{IV}, A_1^{IV} A_{3_1}^{VI}) &= (56, 12)'_1, \end{aligned}$$

akkor

$$\begin{aligned} a \Sigma^{II}, III & (34, 56), (34, 56)_1, (34, 56)'_1 && \text{pontok az } y''_{12} \text{ egyenesen,} \\ > \Sigma^{II}, III & (56, 12), (56, 12)_1, (56, 12)'_1 && > y''_{34} > \\ > \Sigma^{II}, III & (12, 34), (12, 34)_1, (12, 34)'_1 && > y''_{56} > \end{aligned}$$

fekszenek, és mindegyik egyenesen az első két pont az utóbbi kettőt harmonicusan választja el.

Ha most az $\alpha_2 \equiv |A_2 A_3^V(34, 12)|$ collineatio-tengelyre perspectivás

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma^{II}, III A_{2_1} A_{3_1}^{IV} \\ (34, 56) A_1^{IV} \Pi \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \Sigma^{II}, III A_2^V A_3 \\ (34, 56) A_{1_1} P_1^I \end{array} \right\}$$

háromszögeket tekintjük, azt látjuk, hogy a

$$\pi_1^{VI} = \Pi A_{3_1}^{VI} \quad \alpha_{3_1}^I = A_3 P_1^I$$

egyenesek az

$$y''_{12} = \Sigma^{II}, III (34, 56), \quad A_{2_1}^V A_1^{IV}, A_2^V A_{1_1}^{IV}$$

egyenesek $(34, 56)'_1$ metszéspontjában találkoznak, az

$$\alpha_{1_1}^V = A_1 A_{2_1}^V \quad \alpha_{2_1}^{IV} = A_2 A_{1_1}^{IV}$$

egyenesek pedig a $(34, 56)_1$ ponton mennek keresztül.

Mint hogy azonban a $(34, 56)_1$ pontok általában nem esnek

egybe, mert a $\Sigma^{\text{II, III}}$ (3 4, 5 6) pontoktól harmonicusan vannak elválasztva, a $\pi^{\text{VI}} \alpha_3^{\text{I}} \alpha_1^{\text{V}} \alpha_2^{\text{IV}}$ PASCAL-egyenesekhez rendelt $\pi_1^{\text{VI}} \alpha_{31}^{\text{I}} \alpha_{11}^{\text{V}} \alpha_{21}^{\text{IV}}$ v_1 -egyenesek nem metszik egymást ugyanegy pontban. Ezért:

A hatvan PASCAL- és a hatvan v_1 -egyenes képezte konfigurációk nem collinearitási alakzatai egymásnak

56. Az előbbi bizonyításból kitűnik, hogy az $y''_{56} \cdot y''_{34}, y''_{12}$ egyenesek mindegyikének két pontjában két v_1 -egyenes metszi egymást, melyek az illető y -egyenes és az $Y^{\text{II, III}}$ négyszög szögpontjaitól harmonicusan vannak elválasztva. Még pedig:

| | | | | |
|------------------------------|--------------------------|---|--|---------------------------|
| az (1 2, 3 4) ₁ | ponton keresztül menő | $\alpha_{21}^{\text{VI}} \alpha_{31}^{\text{V}}$ | egyenesek harmonicusan vannak elválasztva a | y''_{56}, Y_{56} -től, |
| az (1 2, 3 4) ₁ ' | » | $\pi_1^{\text{IV}} \alpha_{11}^{\text{I}}$ | » | y''_{56}, Y'_{56} -től, |
| az (5 6, 1 2) ₁ | » | $\alpha_{31}^{\text{IV}} \alpha_{11}^{\text{IV}}$ | » | y''_{34}, Y_{34} -től, |
| az (5 6, 1 2) ₁ ' | » | $\pi_1^{\text{V}} \alpha_{21}^{\text{I}}$ | » | y''_{34}, Y'_{34} -től, |
| a (3 4, 5 6) ₁ | » | $\alpha_{11}^{\text{V}} \alpha_{21}^{\text{IV}}$ | » | y''_{12}, Y_{12} -től, |
| a (3 4, 5 6) ₁ ' | » | $\pi_1^{\text{VI}} \alpha_{31}^{\text{I}}$ | » | y''_{12}, Y'_{12} -től, |

hol $\Pi A_{21}^{\text{V}} = \pi_1^{\text{V}}, A_2 P_1^{\text{I}} = \alpha_{21}^{\text{I}}, A_3 A_{11}^{\text{IV}} = \alpha_{31}^{\text{IV}}, A_1 A_{31}^{\text{VI}} = \alpha_{11}^{\text{VI}}$

$\Pi A_{11}^{\text{IV}} = \pi_1^{\text{IV}}, A_3 P_1^{\text{I}} = \alpha_{31}^{\text{I}}, A_2 A_{31}^{\text{VI}} = \alpha_{21}^{\text{VI}}, A_3 A_{21}^{\text{V}} = \alpha_{31}^{\text{V}}$.

Minden y -egyenes egy SALMON-pontot egy PASCAL-ponttal köt össze, és minden y -egyenesen két ily pont, mint (3 4, 5 6)₁, (3 4, 5 6)₁' fekszik, melyek ama pontokat $\Sigma^{\text{II, III}}$ (3 4, 5 6) harmonicusan választják el. Ezeknek az új, párosával az y -egyeneseken fekvő pontoknak száma tehát kilenczven. Általában G_{12} -vel jelöljük őket, és, ha két ugyanegy y -egyenesen fekvő ily pontról van szó, G_{12}, G'_{12} -vel; a relatio, melyben a Σ SALMON-pontokkal és az ezentúl G -vel jelölendő PASCAL-pontokkal vannak,

$$(G_{12} G'_{12} \Sigma G) = -1.$$

Minden y -egyenesen fekvő G_{12}, G'_{12} pontpáron négy v_1 egyenes megy keresztül; kettő a G_{12} és kettő a G'_{12} ponton, ezek azokhoz a PASCAL-egyenesekhez vannak rendelve, melyek az y -egyenesen fekvő G PASCAL-egyenesen mennek keresztül. Máskülönben e G_{12}, G'_{12} pontpár a negyvenöt g_{01}, g'_{01} egyenespárhoz rendelhető.

Ugyanis az y''_{12} egyenesen rajta fekszenek a

$$G_{12} = (3 4, 5 6)_{12}, G'_{12} = (3 4, 5 6)'_{12}$$

pontok, melyekben az $\alpha_{11}^{\text{V}} \alpha_{21}^{\text{IV}}, \pi_1^{\text{VI}} \alpha_{31}^{\text{I}}$ egyenesek egymást metszik, és az Y''_{12} ponton keresztül mennek a

$$g_{01} = | \mathbf{A}_{21}^{\vee} \mathbf{A}_{21}^{\text{IV}} \mathbf{A}_{31}^{\text{I}} \Pi^{\text{VI}} |, \quad g'_{01} = | \Pi_1^{\text{VI}} \mathbf{A}_{31}^{\vee} \mathbf{A}_1^{\vee} \mathbf{A}_2^{\text{IV}} |$$

egyenesek, melyeken az $\mathbf{A}_{11}^{\vee} \mathbf{A}_{21}^{\text{IV}}$; $\Pi_1^{\text{VI}} \mathbf{A}_{31}^{\text{I}}$ pontok fekszenek.

Akkép, a mint mindegyik PASCAL-egyenes három PASCAL-pontot, G-t, tartalmaz, minden v_1 egyenesen is három G_{12} pont fekszik. Így a

$$\pi = 143256 = | \Pi \mathbf{A}_3^{\text{VI}} \mathbf{B}_3^{\text{VI}} \mathbf{C}_3^{\text{VI}} |$$

PASCAL-egyenesen a

$$(34, 56) = (\pi^{\text{VI}} \alpha_3^{\text{I}} \alpha_1^{\vee} \alpha_2^{\text{IV}}), \quad (14, 52) = (\pi^{\text{VI}} \beta_3^{\text{II}} \beta_1^{\vee} \beta_2^{\text{IV}}), \\ (16, 32) = (\pi^{\text{VI}} \gamma_3^{\text{III}} \gamma_1^{\vee} \gamma_2^{\text{IV}})$$

PASCAL-pontok fekszenek, holott a $\pi_1^{\text{VI}} = | \Pi \mathbf{A}_{31}^{\text{VI}} \mathbf{B}_{31}^{\text{VI}} \mathbf{C}_{31}^{\text{VI}} |$ v_1 -egyenes a

$$(34, 56)'_1 = (\pi^{\text{VI}} \alpha_3^{\text{I}})_1, \quad (14, 52)'_1 = (\pi^{\text{VI}} \beta_3^{\text{II}})_1, \quad (16, 32)'_1 = (\pi^{\text{VI}} \gamma_3^{\text{III}})_1,$$

G_{12} pontokat tartalmazza.

57. *A negyvenöt Y-pont mindegyikén négy I_{12} egyenes megy keresztül, melyeken a kilenczven G_{12} pont közül kettő-kettő fekszik; az egész configurációban 180 ily I_{12} egyenes van, minden G_{12} ponton keresztül megy négy.*

A negyvenöt y-egyenes mindegyikében négy L_{01} pont van, melyben a kilenczven g_{01} egyenes közül kettő-kettő egymást metszi; az egész configurációban 180 ily L_{01} pont van, minden g_{01} egyenesen négy fekszik.

Ugyanis az

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}_{11}^{\text{IV}} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_{21}^{\vee} \mathbf{A}_{31}^{\text{VI}} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mathbf{P}_1^{\text{I}} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \\ \Pi \mathbf{A}_{21}^{\vee} \mathbf{A}_{31}^{\text{VI}} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mathbf{A}_{11}^{\text{I}} \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_{11}^{\text{II}} \Pi_{11}^{\text{III}} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \Pi_1^{\text{IV}} \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{P} \mathbf{B}_{11}^{\text{II}} \Gamma_{11}^{\text{III}} \end{array} \right\}$$

háromszögpárok közül a két első a $\Sigma^{\text{II}}, \text{III}$, a két utóbbi pedig a $\Sigma^{\vee, \text{VI}}$ collineatio-középpontra vonatkozólag perspectívás, ennél fogva az

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_{11}^{\text{IV}} = \alpha_{21}^{\text{IV}}, \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^{\vee} = \alpha_{11}^{\vee} \quad \text{egymást } (\alpha_2^{\text{IV}} \alpha_1^{\vee})_1 = (34, 56),$$

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{A}_{11}^{\text{IV}} = \alpha_{31}^{\text{IV}}, \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_{31}^{\text{VI}} = \alpha_{11}^{\text{VI}} \quad \text{» } (\alpha_3^{\text{IV}} \alpha_1^{\text{VI}})_1 = (56, 12)_1,$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3, \quad \mathbf{A}_{21}^{\vee} \mathbf{A}_{31}^{\text{VI}} \quad \text{» } Y_{66}$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_1^{\text{I}} = \alpha_2^{\text{I}}, \quad \Pi \mathbf{A}_{21}^{\vee} = \pi_1^{\vee} \quad \text{» } (\alpha_2^{\text{I}} \pi^{\vee})_1 = (56, 12)'_1,$$

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{P}_1^{\text{I}} = \alpha_{31}^{\text{I}}, \quad \Pi \mathbf{A}_{31}^{\text{VI}} = \pi_1^{\text{VI}} \quad \text{» } (\alpha_3^{\text{I}} \pi^{\text{VI}})_1 = (34, 56)'_1,$$

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3, \quad \mathbf{A}_{21}^{\vee} \mathbf{A}_{31}^{\text{VI}} \quad \text{» } Y_{66}$$

$$\begin{array}{lll}
 B_1 A_{11}^I = b_{11}^I, & A_1 B_{11}^{II} = a_{11}^{II} & \text{egymást } (b_1^I a_1^{II})_1 = (5\ 6, 1\ 4)_1 \\
 C_1 A_{11}^I = c_{11}^I, & A_1 \Gamma_{11}^{III} = a_{11}^{III} & \gg (c_1^I a_1^{III})_1 = 3\ 2, 5\ 6)_1 \\
 B_1 C_1, & B_{11}^{II} \Gamma_{11}^{III} & \gg Y_{56} \\
 \\
 B_1 \Pi_1^{IV} = b_{11}^{IV}, & P B_{11}^{II} = p_1^{II} & \gg (b_1^{IV} p_1^{II})_1 = (3\ 2, 5\ 6)'_1 \\
 C_1 \Pi_1^{IV} = c_{11}^{IV}, & P \Gamma_{11}^{III} = p_1^{III} & \gg (c_1^{IV} p_1^{III})_1 = (5\ 6, 1\ 4)'_1 \\
 B_1 C_1, & B_{11}^{II} \Gamma_{11}^{III} & \gg Y_{56}
 \end{array}$$

pontokban metszik, melyek mindig egy egyenesben fekszenek.

Ha ellenben az

$$\left. \begin{array}{l} a_1^{IV} \alpha_2 \alpha_3 \\ \alpha_1 a_2^V a_3^{VI} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} p^I \alpha_2 \alpha_3 \\ \pi a_2^V a_3^{VI} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \alpha_1^I b_1 c_1 \\ a_1 \beta_1^{II} \gamma_1^{III} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \pi^{IV} b_1 c_1 \\ p \beta_1^{II} \gamma_1^{III} \end{array} \right\}$$

háromszögpárokból indultunk ki, melyek közül az első két, illetve a másik két pár a σ^{II}, III, V, VI collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspektívás, azt látjuk, hogy az

$$\begin{array}{lll}
 \alpha_2 a_1^{IV} = A_2^{IV}, & \alpha_1 a_2^V = A_1^V & \text{pontok az } A_2^{IV} A_1^V \\
 \alpha_3 a_1^{IV} = A_3^{IV}, & \alpha_1 a_3^{VI} = A_1^{VI} & \gg \text{az } A_3^{IV} A_1^{VI} \\
 \alpha_2 \alpha_3, & a_2^V a_3^{VI} = (1\ 3, 2\ 4) & \gg \text{az } Y_{56} \\
 \alpha_2 p^I = A_2^I, & \pi a_2^V = \Pi^V & \gg \text{az } A_2^I \Pi^V \\
 \alpha_3 p^I = A_3^I, & \pi a_3^{VI} = \Pi^{VI} & \gg \text{az } A_3^I \Pi^{VI} \\
 \alpha_2 \alpha_3, & a_2^V a_3^{VI} = (1\ 3, 2\ 4) & \gg \text{az } Y_{56} \\
 b_1 \alpha_1^I = B_1^I, & a_1 \beta_1^{II} = A_1^{II} & \gg \text{a } B_1^I A_1^{II} \\
 c_1 \alpha_1^I = C_1^I, & a_1 \gamma_1^{III} = A_1^{III} & \gg \text{a } C_1^I A_1^{III} \\
 b_1 c_1, & \beta_1^{II} \gamma_1^{III} = (1\ 3, 2\ 4) & \gg \text{az } Y_{56} \\
 b_1 \pi^{IV} = B_1^{IV}, & p \beta_1^{II} = P^{II} & \gg \text{a } B_1^{IV} P^{II} \\
 c_1 \pi^{IV} = C_1^{IV}, & p \gamma_1^{III} = P^{III} & \gg \text{a } C_1^{IV} P^{III} \\
 b_1 c_1, & \beta_1^{II} \gamma_1^{III} = (1\ 3, 2\ 4) & \gg \text{az } Y_{56}
 \end{array}$$

egyenesekben fekszenek, melyek egymást egy pontban metszik.

14. Az $\circ V, {}_1 V$ pontokról és a $\circ v, {}_1 v$ egyenesekről.

A PASCAL-egyenesek és KIRKMAN-pontok, valamint a v_1 egyenesek és V_1 pontok képezte $[Vv]$, $[Vv]_1$ konfigurációkhoz még új $\circ[Vv]$, ${}_1[Vv]$ konfigurációkat találhatunk, melyek bizonyos tekintetben az előbbiekkal a correlatio vonatkozásában állanak; a mennyiben

a PASCAL- és v_1 -egyenesekkel az ${}_0V$ és ${}_1V$ pontok és a KIRKMAN- és V_1 -pontokkal az ${}_0v$ és ${}_1v$ -egyenesek állíthatók szembe oly módon, hogy ezekből az új pontokból és egyenesekből a következőkben directe levezetett tételek megegyeznek azokkal a tételekkel, melyeket nyerünk, ha a már ismert tételeket az említett felcseréléssel fejezzük ki.

58. A p CAYLEY-egyenesen a II STEINER pont, a $P^I P^{II} P^{III}$ KIRKMAN-pontok, a $P_1^I P_1^{II} P_1^{III}$ VERONESE- vagyis V_1 -pontok fekszenek. Határozzunk most meg három új pontot, ${}_0P^I {}_0P^{II} {}_0P^{III}$ -at, a

$$(P^I P_1^I {}_0P^I II) = (P^{II} P_1^{II} {}_0P^{II} II) = (P^{III} P_1^{III} {}_0P^{III} II) = -1$$

relációkból.

Minden CAYLEY-egyenesen három ily új pont fekszik; melyeknek száma tehát hatvan és a melyeket általában ${}_0V$ -vel jelölünk és a PASCAL-egyenesekhez rendelünk.

Igy az a_1, a_2, a_3 egyeneseken az ${}_0A_1^{IV}, {}_0A_2^V, {}_0A_3^{VI}$ pontokat

$$(A_1^{IV} A_{1_1}^{IV} {}_0A_1^{IV} A_1) = (A_2^V A_{2_1}^V {}_0A_2^V A_2) = (A_3^{VI} A_{3_1}^{VI} {}_0A_3^{VI} A_3) = -1$$

relációk határozzák meg.

A $V^{II, III}, V_1^{II, III}, S^{II, III}$ négyszögekhez (10. ábra) most egy új négyszög ${}_0V^{II, III} = {}_0[P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}]$ járul, melynek oldalai ép úgy, mint a három előbbi négyszögnek oldalai, az

$$Y^{II, III} = Y_{12} Y_{34} Y_{46} Y'_{12} Y'_{34} Y'_{56}$$

négyszög oldalai szögpontjain mennek keresztül, mert a két első és a két utóbbi négyszög szögpontjai a feltétel szerint harmonicusan vannak elválasztva.

Az Y_{12} ponton keresztül menő

$$| A_1^{IV} A_2^V | = g_{01}, \quad | A_1^{IV} A_2^V | = g'_{01}, \quad A_1 A_2 = \sigma^I, \quad v^I$$

egyeneseken még megfelelőleg rajta fekszenek a $B_{3_1}^{II} \Gamma_{3_1}^{III}, B_3^{II} \Gamma_3^{III}, B_2 C_3$ pontok. Ezek azonban más rendben még a β_3, γ_3 CAYLEY-egyeneseken is rajta vannak, és így a

$$(B_3^{II} B_{3_1}^{II} {}_0B_3^{II} P_3) = (\Gamma_3^{III} \Gamma_{3_1}^{III} {}_0\Gamma_3^{III} C_3) = -1$$

relációkból meghatározott ${}_0B_3^{II}, {}_0\Gamma_3^{III}$ pontok az ${}_0 | A_1^{IV} A_2^V |$ egyenesen fekszenek.

Mint hogy az ${}_0g = {}_0 | A_1^{IV} A_2^V B_3^{II} \Gamma_3^{III} |$ egyenesen fekvő négy ${}_0V$ ponthoz rendelt négy PASCAL-egyenes, $a_1^{IV}, a_2^V, \beta_3^{II}, \gamma_3^{III}$, egymást a $G = (3\ 5, 4\ 6)$ PASCAL-pontban metszi, mondhatjuk:

Egy PASCAL-ponton keresztül menő négy PASCAL-egyeneshez rendelt négy ${}_0V$ pont egy egyenesen fekszik.

Vagy:

A hatvan ${}_0V$ pont négyesével a negyvenöt ${}_0g$ egyenesen fekszik, melyek a negyvenöt Y -ponton mennek keresztül.

A hatvan PASCAL-egyenes egymást négyesével a negyvenöt PASCAL-pontban, G -ben, metszi, melyek a negyven y -egyenesen fekszenek.

Az ${}_0g$ egyeneseket a G -pontokhoz rendeljük.

Minthogy a negyvenöt ${}_0g$ egyenes mindegyikén a hatvan ${}_0V$ pont közül négy fekszik, azért *minden ${}_0V$ ponton három ${}_0g$ egyenes megy keresztül* úgy, mint a hogy minden PASCAL-egyenesen három PASCAL-pont fekszik.

A $v^{II, III} = p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}$ négyoldalnak négy oldala és hat szög-pontja PASCAL-egyenes és PASCAL-pont. Ezekhez a

$${}_0V^{II, III} = {}_0[P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}]$$

négyszögnek négy szögpontja és hat oldala van rendelve, melyek ${}_0V$ pontok és ${}_0g$ egyenesek. Az $y^{II, III}$ négyszög a $v^{II, III}$ négyoldal körül van írva, holott az $Y^{II, III}$ négyoldal az ${}_0V^{II, III}$ négyszögbe bele van írva.

59. Az ${}_0\pi^{IV}$ egyenest ekkép értelmezzük: $(\pi^{IV} {}_0\pi^{IV} \sigma^V, {}^VI) = -1$.

Minthogy

$$\pi^{IV} = \Pi A_1^{IV} B_1^{IV} C_1^{IV}, \quad \pi_1^{IV} = \Pi A_{1_1}^{IV} B_{1_1}^{IV} C_{1_1}^{IV}, \quad \sigma^V, {}^VI = \Pi A_1 B_1 \Gamma_1,$$

az a_1, b_1, c_1 egyeneseknek ${}_0A_1^{IV}, {}_0B_1^{IV}, {}_0C_1^{IV}$ pontjai az ${}_0\pi^{IV}$ egyenesen fekszenek. De az ${}_0A_1^{IV}, {}_0B_1^{IV}, {}_0C_1^{IV}$ pontokhoz rendelt PASCAL-egyenesek $a_1^{IV}, b_1^{IV}, c_1^{IV}$ egymást a π CAYLEY-egyenesen fekvő Π^{IV} KIRKMAN-pontban metszik. Ennélfogva:

Egy CAYLEY-egyenes KIRKMAN-pontján keresztül menő három PASCAL-egyeneshez három ugyanegy egyenesen fekvő ${}_0V$ pont van rendelve, s az utóbbi egyenes a CAYLEY-egyeneshez rendelt STEINER-ponton megy keresztül.

Vagy pedig:

A hatvan ${}_0V$ pont hármásával hatvan ${}_0v$ egyenesen fekszik, melyek hármásával a húsz STEINER-ponton mennek keresztül; az ${}_0V$ pontok ellenben hármásával a húsz CAYLEY-egyenesen fekszenek.

A hatvan ${}_0v$ egyenest az ismert módon a hatvan ${}_0V$ ponthoz rendeljük.

Miután a hatvan ${}_0V$ pont hármásával a hatvan ${}_0v$ egyenesen fekszik, minden ${}_0V$ ponton három ${}_0v$ egyenes megy keresztül; továbbá egy DESARGUES-configurációhoz tartozó tíz PASCAL-egyeneshez és tíz KIRKMAN-ponthoz oly tíz ${}_0V$ pont és ${}_0v$ egyenes van rendelve, melyek szintén egy DESARGUES-configurációt képeznek.

Azaz: *A hatvan ${}_0V$ pont és hatvan ${}_0v$ egyenes képezte ${}_0[Vv]$ configuratio hat DESARGUES-configurációra bomlik.*

60. Húzzuk meg a

$${}_0\pi^{VI} = \Pi {}_0A_3^{VI}, \quad {}_0\alpha_1^V = A_1 {}_0A_2^V, \quad {}_0\alpha_2^{IV} = A_2 {}_0A_1^{IV}, \quad {}_0\alpha_3^I = A_3 {}_0P^I$$

egyeneseket, melyek a ${}_0g$ egyenes ${}_0\Pi^{VI}$, ${}_0A_1^V$, ${}_0A_2^{IV}$, ${}_0A_3^I$ pontjaihoz rendelvük. A

$$\Pi A_3 {}_0A_3^{VI} P^I; \quad A_1 A_2 {}_0A_2^V {}_0A_1^{IV}$$

négyszögek arra utalnak, hogy a

$${}_0\pi^{VI}, \quad {}_0\alpha_3^I \text{ és } {}_0\alpha_1^V, \quad {}_0\alpha_2^{IV}$$

egyenesek egymást az y''_{12} egyenesen metszik, mert Y_{12} , y''_{12} az $a_1 a_2$ egyeneseket és $Y'_{12} y''_{12}$ a $p a_3$ egyeneseket harmonikusán választja el.

Továbbá:

$$\Pi ((34, 56)'_1 {}_0(\pi^{VI} a_3^I) (34, 56) \Sigma^{II, III}) \wedge (A_{31}^{VI} {}_0A_3^{VI} A_3^{VI} \Sigma^{II, III}) \wedge (A_{11}^{IV} {}_0A_1^{IV} A_1^{IV} \Sigma^{II, III}) \wedge ((34, 56)_1 {}_0(\alpha_1^V \alpha_2^{IV}) (34, 56) \Sigma^{II, III}),$$

ennél fogva a ${}_0(\pi^{VI} a_3^I)$, ${}_0(\alpha_1^V \alpha_2^{IV})$ pontok egyidejűleg a $(34, 56)'_{12}$, $(34, 56)_1$ pontokkal a $(34, 56)$, $\Sigma^{II, III}$ pontokat harmonikusán választják el.

Ugyanígy az y''_{56} , y''_{34} egyeneseken fekvő

$${}_0(\pi^{IV} \alpha_1^I) {}_0(\alpha_2^{VI} \alpha_3^V) (12, 34) \Sigma^{II, III}; \quad {}_0(\pi^V \alpha_2^I) {}_0(\alpha_3^{IV} \alpha_1^{VI}) (56, 12) \Sigma^{II, III}$$

négyesek is harmonikusak. Ezért:

»Négy ugyanegy ${}_0g$ egyenesen fekvő ${}_0V$ ponthoz rendelt ${}_0v$ egyenes, nem metszi egymást egy pontban. Ezeknek az egye-

»Egy PASCAL-ponton, G-n, keresztül metsző négy PASCAL-egyeneshez rendelt négy KIRKMAN-pont, nem fekszik ugyanegy

nesekek két o_1G metszőpontja egy γ -egyenesben fekszik és annak Σ , G pontjait harmonícusan választja el.

egyenesben. E pontoknak két összekötő egyenese, g_{o_1} , egy Y -ponton megy keresztül és harmonícusan választja el ama Y -pontból kisúgárzó σ , og egyeneseket.

[A jobboldali tétel részben ismeretes, részben nem szorúl megvilágításra; mert pl.

$A_1^{IV} A_2^V B_3^{II} \Gamma_3^{III}$, $B_3^{II} \Gamma_3^{III} A_{11}^{IV} A_{21}^V$ harmonícusan választja el a σ^V , $\sigma^VI = | \Pi A_1 B_1 \Gamma_1 |$, $og = o | A_1^{IV} A_2^V B_3^{II} \Gamma_3^{III} |$ egyeneseket].

Oly pont, mint o_1G , kilenczven van, s azok a kilenczven g_{o_1} egyeneshez rendelhetők.

A kilenczven o_1G pont még páronként a negyvenöt og egyenesen is fekszik; pl. az

$o(\pi^{VI} \alpha_3^I)$, $o(a_3^{VI} p^I)$ pont, a $o | A_1^{IV} A_2^V B_3^{II} \Gamma_3^{III} |$ egyenesen fekszik.

Először is a $\Pi A_3 A_3^{VI}$, $A_2^V A_1^{IV} A_1$ háromszögek az (1 2, 5 6) pontra vonatkozólag perspectivásak; tehát az $F = (\Pi A_3, A_1^{IV} A_2^V)$ pont az y''_{12} egyenesen fekszik.

Ugyanígy kiműtatható, — a mi különben állításunk igazolására nem szükséges — hogy a $V^{II, III} S^{II, III}$ négyszögek többi oldalpárjai

$P^I A_1^{IV}$, $A_2 A_3$; $A_2^V A_3^{VI}$, ΠA_1 egymást az y''_{56} egyenesen
 $P^I A_2^V$, $A_3 A_1$; $A_3^{VI} A_1^{IV}$, ΠA_2 » » y''_{34} »
 $P^I A_3^{VI}$, $A_1 A_2$; $A_1^{IV} A_2^V$, ΠA_3 » » y''_{12} »

metszik, és e metszőpontok a $\Sigma^{II, III}$ ponttól és a $\Delta^{II, III}$ háromszög szögpontjaitól harmonícusan vannak elválasztva.

Ha továbbá rövidség kedvéért

$$J = (y''_{12}, o | A_1^{IV} A_2^V |), H = (A_1^{IV} A_2, A_{11}^{IV} A_2, o | A_1^{IV} A_2^V |),$$

és mi a $(\Sigma^{II, III} J (3 4, 5 6) F)$ négyes pontjait

az Y_{12} pontból az a_1 egyenesre, s e projectiókat ismét
 az A_2^V » » $o | A_1^{IV} A_2^V |$ » » »
 az A_2 » » a_1 » » »
 az Y_{34} » » a_3 » » »
 az Π » » y''_{12} » » »

projiciáljuk, következik

$$\begin{aligned}
 &(\Sigma^{II, III} J(3\ 4, 5\ 6) F) \wedge (\Sigma^{II, III} {}_0A_1^{IV} A_1^{IV} A_1^{IV}) \wedge ({}_0A_2^V {}_0A_1^{IV} H Y_{12}) \wedge \\
 &(\Sigma^{II, III} {}_0A_1^{IV} A_1^{IV} A_1^{IV}) \wedge (\Sigma^{II, III} {}_0A_3^{VI} A_3^{VI} A_3^{VI}) \wedge \\
 &(\Sigma^{II, III} {}_0(\pi^{VI} \alpha_3^I) (3\ 4, 5\ 6) F),
 \end{aligned}$$

a miből az látható, hogy a J pont egybeesik az ${}_0(\pi^{VI} \alpha_3^I)$ ponttal, vagyis, hogy az ${}_0 | A_1^{IV} A_2^V B_3^{II} \Gamma_3^{III} |$ egyenes a ${}_0(\pi^{VI} \alpha_3^I)$ ponton megy keresztül, és e pont az Y_{12} pontot az ${}_0A_1^{IV} {}_0A_2^V$ pontpártól harmonicusan választja el.

Ugyanezen az úton kimutathatjuk, a $\Sigma^{IV, V}, V^{IV, V}, S^{IV, V}$ négyszögekből kiindulva, hogy a ${}_0(a_3^{VI} p^I)$ pont szintén amaz egyenesen fekszik és az Y_{13} pontot a ${}_0B_3^{II} {}_0\Gamma_3^{III}$ pontpártól harmonicusan választja el.

Ennélfogva :

»A negyvenöt ${}_0g$ egyenes mindegyikén egy Y, négy ${}_0V$ és két ${}_0iG$ pont fekszik; mindegyik ${}_0iG$ pont az Y-pontot a ${}_0V$ ponttól harmonicusan választja el«.

»Mindegyik G-pontból kisügázik egy y, négy PASCAL- és két ${}_0i;g$ egyenes; mindegyik ${}_0i;g$ egyenes az y-egyenest két PASCAL-egyenestől harmonicusan választja el (42)«.

61. »A kilenczven ${}_0G$ pont hármásával a hatvan ${}_0v$ egyenesen és hármásával még más hatvan ${}_1v$ egyenesen fekszik, úgy, hogy mindegyik ${}_0iG$ ponton két ${}_0v$ és két ${}_1v$ egyenes megy keresztül«.

»A kilenczven ${}_0i;g$ egyenes hármásával a hatvan KIRKMAN-ponton és a hatvan V_1 ponton megy keresztül, úgy, hogy mindegyik ${}_0i;g$ egyenesen két KIRKMAN- és két V_1 pont fekszik. (V. táblázat)«.

Az ${}_0\pi^{IV} = \Pi {}_0A_1^{IV} {}_0B_1^{IV} {}_0C_1^{IV}$ egyenes az

$$A_1 {}_0P^I = {}_0\alpha_1^I, B_1 {}_0P^{II} = {}_0\beta_1^{II}, \Gamma_1 {}_0P^{III} = {}_0\gamma_1^{III}$$

egyenesektől az ${}_0(\pi^{IV} \alpha_1^I), {}_0(\pi^{IV} \beta_1^{II}), {}_0(\pi^{IV} \gamma_1^{III})$ pontokban metszetik, melyek az ${}_0\pi^{IV}$ egyenesen fekszenek. Ugyanígy a hatvan ${}_0v$ egyenes mindegyike három ${}_0iG$ pontot tartalmaz.

De ha a $\Sigma^{II, III}$ pontra vonatkozólag perspectivás

$${}_0(A_1^{III} A_2^{III} A_3^{III}) = {}_0(b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III}), {}_0(A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II}) = {}_0(c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II})$$

háromszögeket tekintjük, melyeknek szögpontjai az a_1, a_2, a_3 egyeneseken fekszenek, azt látjuk, hogy a megfelelő oldalak három metsző-

pontja ${}_0(b_i^{III} c_i^{II})$, egy ${}_1p^I$ egyenesen fekszik, mely ${}_0p^I$ től különbözik, mert a hatvan ${}_0v$ egyenes közül az ${}_0(b_i^{III} c_i^{II})$ ponton csak az ${}_0b_i^{III}$, ${}_0c_i^{II}$ egyenesek mennek keresztül.

A hatvan ${}_0v$ egyenesből hatvanszor lehet oly perspectivás háromszögpárokat, mint ${}_0(b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III})$, ${}_0(c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II})$, alkotni és így hatvan ${}_1v$ collineatio-tengelyt nyerünk. Így pl. az

$$\begin{array}{ccc} {}_0(b_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III}) \} & {}_0(b_2^{III} \gamma_3^{III} \gamma_1^{III}) \} & {}_0(b_3^{III} \gamma_1^{III} \gamma_2^{III}) \} \\ {}_0(c_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II}) \} & {}_0(c_2^{II} \beta_3^{II} \beta_1^{II}) \} & {}_0(c_3^{II} \beta_1^{II} \beta_2^{II}) \} \end{array}$$

háromszögpárok az ${}_1a_1^{IV}$, ${}_1a_2^V$, ${}_1a_3^{VI}$ collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectivásak, s, mint látható, az ${}_0(b_i^{III} c_i^{II})$ pontokon ($i=1, 2, 3$) még a ${}_1p^I$, ${}_1a_1^{IV}$; ${}_1p^I$, ${}_1a_2^V$; ${}_1p^I$, ${}_1a_3^{VI}$ egyenespárok is keresztül mennek.

62. A hatvan ${}_1v$ egyenes egymást hármasával a húsz STEINER-pontban metszi, mint a hogy a hatvan V_1 pont hármasával a húsz CAYLEY-egyenesen fekszik.

Ugyanis az

$$\begin{array}{ll} {}_0(A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II}) = {}_0(c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II}), & {}_0(A_1^{III} A_3^{III} A_2^{III}) = {}_0(b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III}) \\ {}_0(B_1^{III} B_2^{III} B_3^{III}) = {}_0(a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III}), & {}_0(C_1^{II} C_3^{II} C_2^{II}) = {}_0(a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II}) \end{array}$$

háromszögek közül

$$\begin{array}{ll} \text{az 1-ső persp. a 2-dikkel az } \Sigma^{II, III}, {}_1p^I; \\ \text{a 2-ik } \gg \text{ a 3-dikkel az } {}_0P^{III}, {}_0p^{III}; \\ \text{a 3-ik } \gg \text{ a 4-dikkel az } {}_0P^I, \sigma^{II, III}; \\ \text{a 4-ik } \gg \text{ az 1-sővel az } {}_0P^{II}, {}_0p^{II} \end{array}$$

collineatio-középpontra és tengelyre vonatkozólag, és a collineatio-középpontok a p-egyenesen fekszenek; ennél fogva az ${}_1p^I$ egyenes a P-ponton megy keresztül.

A hatvan ${}_1v$ egyenes egymást hármasával a hatvan ${}_1V$ pontban metszi, melyek hármasával a húsz CAYLEY-egyenesen fekszenek. Ezek az ${}_1v$, ${}_1V$ egyenesek és pontok oly ${}_1[Vv]$ configuratiót képeznek, mint a már ismert $[Vv]$, $[Vv]_0$, $[Vv]_1$, ${}_0[Vv]$ configuratiók.

Ugyanis az

$$\begin{array}{l} {}_0(A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}), \quad {}_0[(a_2^{VI} a_3^V) (a_3^{IV} a_1^{VI}) (a_1^V a_2^{IV})] = \\ \quad {}_1(12, 34) \quad {}_1(56, 12) \quad {}_1(34, 56), \quad A_1 A_2 A_3 \end{array}$$

háromszögek, minthogy oldalai az Y_{56} , Y_{34} , Y_{12} ponton mennek

keresztül, perspectivásak; ennél fogva collineatio-középpontjuk egy p-egyenesen fekszik, melyet már az

$$A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}, (12, 34) (56, 12) (34, 56), \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$$

háromszögek meghatároznak.¹

Ebből pedig az következik, hogy az

$${}_1\alpha_1^I = \mathbf{A}_1 o(\alpha_2^{VI} \alpha_3^V), \quad {}_1\alpha_2^I = (\mathbf{A}_2 o(\alpha_3^{VI} \alpha_1^{IV})), \quad {}_1\alpha_3^I = \mathbf{A}_o(\alpha_1^V \alpha_2^{IV})$$

egyenesek egymást a p-egyenes ${}_1P^I$ pontjában metszik.

Ugyanezen úton következtethető, hogy az ${}_1\beta_1^{II}$ ${}_1\beta_2^{II}$ ${}_1\beta_3^{II}$ és

¹ Ha két háromszög $M_1 M_2 M_3$, $U_1 U_2 U_3$ az O , o collineatio-középpontra és tengelyre vonatkozólag perspectivás és

$$M'_1 = (M_2 U_3, M_3 U_2), \quad M'_2 = (M_3 U_1, M_1 U_3), \quad M'_3 = (M_1 U_2, M_2 U_1),$$

akkor az

$$\begin{array}{ccc} M_1 & U_2 & U_3 \\ U_1 & M_2 & M_3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M_2 & U_3 & U_1 \\ U_2 & M_3 & M_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} M_3 & U_1 & U_2 \\ U_3 & M_1 & M_2 \end{array}$$

háromszögek perspectivás volta miatt

az $M_2 M_3, U_2 U_3, M'_2 M'_3$ egyenesek egymást az O_1 pontban

az $M_3 M_1, U_3 U_1, M'_3 M'_1$ » » az O_2 »

az $M_1 M_2, U_1 U_2, M'_1 M'_2$ » » az O_3 »

metszik, melyek az $o = |O_1 O_2 O_3|$ egyenesen fekszenek.

Ennél fogva az $M'_1 M'_2 M'_3$ háromszög perspectivás a felvett két $M_1 M_2 M_3, U_1 U_2 U_3$ háromszöggel, és a két collineatio-középpont M, U_m az O -ponttal egy $r = |O M U_m|$ egyenesen fekszik.

Ha $U_1 U_2 U_3, O, o, O_1 O_2 O_3$ állandó marad, ellenben az $M_1 M_2 M_3$ háromszög változik, akkor az r -egyenes nem változtatja helyzetét.

Ha ugyanis az $N_1 N_2 N_3$ egy más háromszög, mely az $U_1 U_2 U_3$ -mal az O -pontra és o -egyenesre vonatkozólag perspectivás és, ha megfelelő oldalai O_1, O_2, O_3 metszéspontjai is ugyanazok, s ha továbbá

$$N'_1 = (N_2 U_3, N_3 U_2), \quad N'_2 = (N_3 U_1, N_1 U_3), \quad N'_3 = (N_1 U_2, N_2 U_1),$$

akkor ezek a pontok az $O M'_1, O M'_2, O M'_3$ egyeneseken vannak és az o collineatio-tengelyre perspectivás

$$\begin{array}{ccc} M'_1 & M'_2 & M'_3 \\ N'_1 & N'_2 & N'_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} N_1 & N_2 & N_3 \\ N'_1 & N'_2 & N'_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{array}$$

háromszögekhez tartozó O, U_m, U_n , illetve O, N, U_n collineatio-középpontok az $r = |O M N U_m U_n|$ egyenesen fekszenek.

${}_1\gamma_1^{\text{III}}, {}_1\gamma_2^{\text{III}}, {}_1\gamma_3^{\text{III}}$ egyeneseknek metszéspontjai ${}_1P^{\text{II}}, {}_1P^{\text{III}}$ is a p-n fekszenek.

63. A CAYLEY-egyeneseken fekvő ${}_1V$ pontok a Σ , ${}_0V$ és PASCAL-pontokból egyszerűen szerkeszthetők.

Ugyanis az y''_{56} egyenesen fekvő

$${}_1(34, 12)', {}_1(34, 12), \Sigma^{\text{II}}, {}^{\text{III}}, (34, 12)$$

harmonikus pontokat II-ből az ${}_0\pi^{\text{IV}}, {}_1\pi^{\text{IV}}$ p π^{IV} harmonikus sugarakkal projiciáljuk, melyek az a_1 egyenest az ${}_0A_1^{\text{IV}}, {}_1A_1^{\text{IV}}, \Sigma^{\text{II}}, {}^{\text{III}}, A_1^{\text{IV}}$ harmonikus pontokban metszik.

E szerint az ${}_1A_1^{\text{IV}}$ pont és hasonlóképp ${}_1P^{\text{I}}, {}_1B_1^{\text{III}}, {}_1C_1^{\text{II}}, \dots$ valamint a többi ${}_1V$ pont e körülmény alapján szerkeszthető, t. i.

$$\begin{aligned} ({}_0P^{\text{I}}{}_1P^{\text{I}}\Sigma^{\text{II}}, {}^{\text{III}}P^{\text{I}}) &= ({}_0A_1^{\text{IV}}, {}_1A_1^{\text{IV}}, \Sigma^{\text{II}}, {}^{\text{III}}, A_1^{\text{IV}}) = \\ ({}_0B_1^{\text{III}}, {}_1B_1^{\text{III}}, \Sigma^{\text{I}}, {}^{\text{IV}}B_1^{\text{III}}) &= ({}_0C_1^{\text{II}}, {}_1C_1^{\text{II}}, \Sigma^{\text{I}}, {}^{\text{IV}}C_1^{\text{II}}) = -1. \end{aligned}$$

A $P^{\text{I}}A_1^{\text{IV}}, {}_0|P^{\text{I}}A_1^{\text{IV}}|, B_1^{\text{III}}C_1^{\text{II}}, {}_0|B_1^{\text{III}}C_1^{\text{II}}|$ egyenesek egymást az Y'_{56} pontban metszik, tehát az ${}_1|P^{\text{I}}A_1^{\text{IV}}|, {}_1|B_1^{\text{III}}C_1^{\text{II}}|$ egyenesek is ezen Y'_{56} ponton mennek keresztül.

(De e két utóbbi egyenes nem eshetik egybe, hanem harmonikusán választja el az ${}_0g = {}_0|P^{\text{I}}A_1^{\text{IV}}, B_1^{\text{III}}C_1^{\text{II}}|, \sigma^{\text{V}}, {}^{\text{VI}} = |\Pi A_1 B_1 \Gamma_1|$ egyeneseket. Ugyanis

$$Y'_{56} ({}_0P^{\text{I}} \Pi P^{\text{I}} P^{\text{I}}) \wedge Y'_{56} ({}_0B_1^{\text{III}} B_1 B_1^{\text{III}} B_1^{\text{III}})$$

ből következik, miután a két első megfelelő sugár az ${}_0g$, illetve $\sigma^{\text{V}}, {}^{\text{VI}}$ -ba egyesül, a harmadik megfelelő sugárpár pedig ${}_0g, \sigma^{\text{V}}, {}^{\text{VI}}$ -ot harmonikusán választja el, hogy a negyedik megfelelő sugárpár, azaz ${}_1|P^{\text{I}}A_1^{\text{IV}}|, {}_1|B_1^{\text{III}}C_1^{\text{II}}|$ szintén harmonikusán választja el az ${}_0g, \sigma^{\text{V}}, {}^{\text{VI}}$ egyeneseket).

Mint hogy ezek szerint a negyvenöt Y-pont mindegyikén két ily egyenes, melyen két ${}_1V$ pont fekszik, megy keresztül, számuk kilenczven. Mi ezeket az egyeneseket általában ${}_{12}g$ -vel, vagy ha egy párról van szó ${}_{12}g, {}_{12}g'$ -vel jelöljük.

Ennélfogva:

A hatvan ${}_1V$ pont párosával az Y-pontokkal kilenczven ${}_{12}g$ egyenesen fekszik, mely egyenesek hármásával a ${}_1V$ pontokon,

A hatvan ${}_1v$ egyenes egymást párosával kilenczven G_{12} pontban metszi, mely pontok hármásával a v_1 egyeneseken, pá-

párosával pedig az Y-pontokon
mennek keresztül és az og, σ -
egyeneseket harmonikusán vá-
lasztják el.

rosával pedig az y-egyeneseken
feküsznek és a G, Σ -pontokat
harmonikusán választják el (55).

64. A ${}_1P^I$ pontot (és így valamennyi ${}_1V$ pontot) nemcsak az

$$({}_0P^I {}_1P^I \Sigma^{II}, {}^{III} P^I) = -1 \dots \dots 1)$$

relatióból, hanem az

$$({}_1P^I \Pi {}_0P^I \Sigma^{II}, {}^{III}) = -1 \dots \dots 2)$$

relatióból is szerkeszthetjük. Mert az y''_{56} egyenesen fekvő

$${}_0(\pi^{IV} \alpha_1^I) (y''_{56}, \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3) {}_0(\alpha_2^{VI} \alpha_3^V) \Sigma^{II}, {}^{III}$$

harmonikus pontokat az \mathbf{A}_2 pontból az ${}_1a_2^{VI} \sigma^I, {}^{IV} {}_0\alpha_2^{VI} a_2$ sugarakkal
projiciáljuk, melyek az a_3 egyenest az ${}_1A_3^{VI} \mathbf{A}_3 {}_0A_3^{VI} \Sigma^{II}, {}^{III}$ har-
monicus pontokban metszik; ennél fogva

$$({}_1P^I \Pi {}_0P^I \Sigma^{II}, {}^{III}) = ({}_1A_3^{VI} \mathbf{A}_3 {}_0A_3^{VI} \Sigma^{II}, {}^{III}) = -1.$$

Azt találtuk az előbb, hogy

$$({}_0\pi^{VI} {}_1\pi^{VI} p \pi^{VI}) = -1, \quad ({}_1a_2^{VI} \sigma^I, {}^{IV} {}_0\alpha_2^{VI} a_2) = -1;$$

ennél fogva a P STEINER-ponton keresztül menő sugarakra nézve is
hasonlólag

$$({}_0P^I {}_1P^I \pi P^I) = -1 \dots \dots 3.)$$

$$({}_1P^I \sigma^{II}, {}^{III} {}_0P^I \pi) = -1 \dots \dots 4.)$$

3.) és 4.) az előbbi 1.), 2.) egyenletekkel, melyek a p-egyenesen
fekvő pontokra vonatkoznak, szembe állítható.

De a 3.), 4.) egyenleteket

$$(P^I P_1^I \Pi {}_0P^I) = -1 \dots \dots 3')$$

$$(P_1^I \Sigma^{II}, {}^{III} P^I \Pi) = -1 \dots \dots 4')$$

-gyel és az 1.), 2.)-dikát az

$$\mathbf{A}_1 (P^I P_1^I \Pi {}_0P^I) \equiv (\alpha_1^I \alpha_{11}^I \sigma^{II}, {}^{III} {}_0\alpha_1^I) = -1$$

$$\mathbf{A}_1 (P_1^I \Sigma^{II}, {}^{III} P^I \Pi) \equiv (a_{11}^I a_1^I \sigma^{II}, {}^{III}) = -1$$

egyenletekből származó egyenletekkel

$$(P^I P_1^I \sigma^{II}, {}^{III} {}_0P^I) = -1 \dots \dots 1')$$

$$(P_1^I \pi P^I \sigma^{II}, {}^{III}) = -1 \dots \dots 2')$$

is összehasonlíthatjuk, mondván:

ha a KIRKMAN-pontokat a hozzájuk rendelt ${}_0V$ -egyenesekkel

ha a STEINER- » » » » CAYLEY- »

ha a SALMON- » » » » STEINER- »

ha a ${}_0V$ - » » » » PASCAL- »

ha a ${}_1V$ - » » » » V_1 - »

ha a V_1 - » » » » ${}_1V$ - »

felcseréljük, akkor az 1.), 2.), 3.), 4.) egyenletek az 1'.), 2'.), 3'.), 4'.) egyenletekre változnak át. —

Az előbbi egyenletekből következtethető, hogy a

$$\Pi \Sigma^{\text{II}}, \text{III}; P^{\text{I}} {}_0P^{\text{I}}; P_1^{\text{I}} {}_1P^{\text{I}}$$

pontpárok és a

$$\pi \sigma^{\text{II}}, \text{III}; p^{\text{I}} {}_0p^{\text{I}}; p_1^{\text{I}} {}_1p^{\text{I}}$$

egyenespárok egy-egy involutióinak kapcsolt elempárjai, mert

$$({}_1P^{\text{I}} \Pi {}_0P^{\text{I}} \Sigma^{\text{II}}, \text{III}) = (P_1^{\text{I}} \Sigma^{\text{II}}, \text{III} P^{\text{I}} \Pi) = -1,$$

$$({}_1P^{\text{I}} \pi {}_0p^{\text{I}} \sigma^{\text{II}}, \text{III}) = (p_1^{\text{I}} \sigma^{\text{II}}, \text{III} p^{\text{I}} \pi) = -1.$$

Továbbá az 1.) és 2.) egyenletekből

$$({}_0P^{\text{I}} \Sigma^{\text{II}}, \text{III} {}_1P^{\text{I}} P^{\text{I}}) = 2, ({}_0P^{\text{I}} \Sigma^{\text{II}}, \text{III} \Pi {}_1P^{\text{I}}) = -1,$$

tehát

$$({}_0P^{\text{I}} \Sigma^{\text{II}}, \text{III} \Pi P^{\text{I}}) = -2, \text{ és } ({}_0P^{\text{I}} \Pi \Sigma^{\text{II}}, \text{III} P^{\text{I}}) = 3.$$

Ez utóbbi egyenlet azt mutatja, hogy az ${}_0P^{\text{I}}$, Π pontok az $\Sigma^{\text{II}}, \text{III}$, P^{I} pontoktól nincsenek elválasztva

Ha a p -egyenesnek azokat a részeit, melyeken az $\Sigma^{\text{II}}, \text{III}$, P^{I} , illetve Π , ${}_0P^{\text{I}}$ pontok nem seküsznek $[\Pi {}_0P^{\text{I}}]$, illetve $[\Sigma^{\text{II}}, \text{III} P^{\text{I}}]$ -gyel jelöljük, akkor

$$(P^{\text{I}} P_1^{\text{I}} \Pi {}_0P^{\text{I}}) = -1, \text{ és } ({}_0P^{\text{I}} {}_1P^{\text{I}} \Sigma^{\text{II}}, \text{III} P^{\text{I}}) = -1$$

egyenletek következtében a P_1^{I} pont az $[\Pi {}_0P^{\text{I}}]$ vonaldarabon, de a $[\Sigma^{\text{II}}, \text{III} P^{\text{I}}]$ vonaldarabon kívül fekszik, ellenben az ${}_1P^{\text{I}}$ pont az $[\Sigma^{\text{II}}, \text{III} {}_0P^{\text{I}}]$ vonaldarabon, de a $[\Pi {}_0P^{\text{I}}]$ vonaldarabon kívül van.

65. Az Y_{12} ponton keresztül menő sugarakra vonatkozólag

$$Y_{12} (A_{11}^{\text{IV}} \Sigma^{\text{II}}, \text{III} A_1^{\text{IV}} A_1) = Y_{12} (B_{31}^{\text{II}} \Sigma^{\text{IV}}, \text{V} B_3^{\text{II}} A_1) =$$

$$Y_{12} (A_1^{\text{IV}} \Sigma^{\text{IV}}, \text{V} A_1^{\text{IV}} A_1) = -1;$$

ennélfogva $Y_{12} A_1 = \sigma^{\text{I}}, \text{VI}$ kettőssugara az

$$Y_{12} A_1^{\text{IV}}, Y_{12} A_1^{\text{IV}}; Y_{12} \Sigma^{\text{II}}, \text{III}, Y_{12} \Sigma^{\text{IV}}, \text{V}$$

sugárpároktól meghatározott involutióinak. Minthogy azonban $Y_{12} A_1 = \sigma^{\text{II}}, \text{VI}$, ${}_0A_1^{\text{IV}} A_2^{\text{V}} B_3^{\text{II}} \Gamma_3^{\text{III}}$ a két első sugarat, tehát egyszerűen a két utóbbi sugarat is harmonikusán választja el, következik:

»Egy Y-ponton keresztül-
menő STEINER-egyenes és og
egyenes két SALMON-ponttól har-
monicusan van elválasztva.

»Egy y-egyenesen fekvő SAL-
MON- és PASCAL-pont (G) két STEI-
NER-egyenestől harmonicusan
van elválasztva.

(A jobb oldali tétel evidens, mert a $\Sigma^{II, III}, (34, 56), F, E$ pontok harmonicusan).

A tétel még így is kifejezhető:

»Két-két SALMON-pont, mely-
nek különböző mutatói vannak,
egy og - és egy STEINER-egyenestől
harmonicusan van elválasztva.

»Két-két STEINER-egyenes,
melynek különböző mutatói van-
nak, egy PASCAL-ponttól (G) és
egy SALMON-ponttól harmonicu-
san van elválasztva.

Minthogy a

$$\sigma^I, IV = |A_1 A_2 B_3 C_3| \text{ és } og = o |A_1^{IV} A_2^V B_3^{II} \Gamma_3^{III}|$$

egyenesek a $\Sigma^{II, III}, \Sigma^{IV, V}$ pontoktól és a $g_{01} = |A_1^{IV} A_2^V B_3^{II} \Gamma_3^{III}|$,
 $g'_{01} = |A_{11}^{IV} A_{21}^V B_3^{II} \Gamma_3^{III}|$ egyenesektől harmonicusan vannak elvá-
lasztva, a

$$\sigma^I, VI, og; Y_{12} \Sigma^{II, III}, g_{01}; Y_{12} \Sigma^{IV, V}, g'_{01}$$

egyenespárok involutiót képeznek és így egy egyenespártól harmo-
nicusan vannak elválasztva.

Hasonlóképen involutiót képeznek a

$$\Sigma^{II, III}, G = (34, 56); E = (y''_{12} \sigma^I, VI), o_1 G = (34, 56);$$

$$F = (y''_{12} \sigma^{IV, V}), o_1 G = (34, 56)$$

pontpárok és egy pontpártól ezek is harmonicusan vannak elvá-
lasztva.

De nem folytatjuk ez irányú fejtegetéseinket, hanem vissza-
térünk a og pontokhoz és a ${}_{12}g$ egyenesekhez.

66. *A negyvenöt Y-pont mindegyikén négy o_1l egyenes
megy keresztül, melyeken a kilenczven o_1G pontból kettő-
kettő fekszik; összesen 180 ily o_1l egyenes van, minden o_1G
ponton négy megy keresztül.*

*A negyvenöt y-egyenes mindegyikén, a kilenczven ${}_{12}g$
egyenes közül négy pár metszi egymást; összesen 180 ily ${}_{12}L$
metszőpont van, minden ${}_{12}g$ egyenesen fekszik négy.*

collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspectivásak; ennélfogva, mint-hogy

$$\alpha_2 \circ a_1^{IV} = \circ A_2^{IV}, \quad \alpha_1 \circ a_2^V = \circ A_1^V, \quad \alpha_3 \circ a_1^{IV} = \circ A_3^{IV}, \dots$$

az

$$\begin{aligned} & \circ | A_1^V A_2^{IV} |, \circ | A_1^{VI} A_3^{IV} |, y_{56}; \quad \circ | II^V A_2^I |, \circ | A_1^V A_2^{IV} |, y'_{56}; \\ & \circ | B_1^{VI} A_2^{III} |, \circ | \Gamma_1^{VI} A_2^{II} |, y''_{56}; \quad \circ | A_2^{II} \Gamma_1^{VI} |, \circ | A_3^{II} \Gamma_1^V |, y''_{56}; \\ & \circ | P^{II} B_1^{IV} |, \circ | A_1^{II} B_1^I |, y''_{56}; \quad \circ | B_1^I A_1^{II} |, \circ | C_1^I A_1^{III} |, y_{56} \end{aligned}$$

egyenesek egymást egy-egy pontban metszik. Ezt még a következőkép is kifejezhetjük: a hat $\circ g$ egyenes közül, t. i. a

$$\begin{aligned} & \circ | II^{VI} A_1^V A_2^{IV} A_3^I |, \circ | II^V A_1^{VI} A_2^I A_3^{IV} |, \circ | B_1^V \Gamma_1^V A_2^{III} A_3^{II} |, \\ & \circ | B_1^V \Gamma_1^{VI} A_2^{II} A_3^{III} |, \circ | P^{II} A_1^{III} B_1^{IV} C_1^I |, \circ | P^{III} A_1^{II} B_1^I C_1^{IV} | \end{aligned}$$

egyenesek közül az 1-ső és 2-ik egymást az y_{56} és y'_{56} egyenesen, a 3-ik és 4-ik az y'_{56} és y''_{56} , az 5-ik és 6-ik az y''_{56} és y_{56} egyenesen metszi. Minthogy azonban az $y_{56} y'_{56} y''_{56}$ egyeneseknek egy közös D_{56} pontjuk van, ama hat $\circ g$ egyenes mind keresztül megy a D_{56} ponton.

A hat $\circ g$ egyenes a PASCAL-hatszög $\overline{56}$ oldalán fekvő

$$(34, 56) \quad (12, 56) \quad (24, 56) \quad (13, 56) \quad (23, 56) \quad (14, 56)$$

PASCAL-pontokhoz van rendelve; ennélfogva:

»Ama negyvenöt $\circ g$ egyenes, melyen a $60 \circ V$ pont négyesével rajta fekszik, hatával a tizenöt y -négyyszög tizenöt átlópontján megy keresztül«.

»A negyvenöt PASCAL-pont, melyekben a hatvan PASCAL-egyenes egymást négyesével metszi, hatával, a tizenöt Y -négyoldal tizenöt átlóján fekszik«.

Miután a tizenöt D -pont mindegyikén a negyvenöt $\circ g$ egyenesből hat megy keresztül, a $\circ g$ egyenesek mindegyikén két D -pont fekszik. Pl. a

$$\circ | II^{IV} A_1^I A_2^{VI} A_3^V |, \circ | II^V A_2^I A_3^{VI} A_1^{VI} |, \circ | II^{VI} A_3^I A_1^V A_2^{IV} | \text{ egyeneseken a } D_{12} D_{34} \quad D_{56} D_{12} \quad D_{34} D_{56} \text{ pontok fekszenek,}$$

és így ezek az egyenesek az $y^{II, III}$ négyyszög $D^{II, III} = D_{12} D_{34} D_{56}$ átlóháromszögének oldalai. Ennélfogva:

»A negyvenöt $\circ g$ egyenes a tizenöt y -négyszögnek átlója, azaz a tizenöt D -átlóháromszögnek oldala«.

»A negyvenöt G -PASCAL-pont a tizenöt Y -négyoldalnak átlópontja, azaz a tizenöt Δ -háromszögnek szögpontja«.

A $D^{II, III}$ háromszög oldalain, mint o g egyeneseken, o_1G pontok fekszenek, még pedig

$$\text{az } (o_1b_1^{III} \ o_1c_1^{II} \ 1p^I \ 1a_1^{IV}), \ (o_1\beta_1^{II} \ o_1\gamma_1^{III} \ 1a_2^V \ 1a_3^{VI}) \\ \text{pontok a } D_{12} D_{34} = o | \Pi^{IV} A_1^I A_2^{VI} A_3^V |,$$

$$\text{az } (o_2b_2^{III} \ o_2c_2^{II} \ 1p^I \ 1a_2^V), \ (o_2\beta_2^{II} \ o_2\gamma_2^{III} \ 1a_3^{VI} \ 1a_1^{IV}) \\ \text{pontok a } D_{56} D_{12} = o | \Pi^V A_2^I A_3^{IV} A_1^{VI} |,$$

$$\text{az } (o_3b_3^{III} \ o_3c_3^{II} \ 1p^I \ 1a_3^{VI}), \ (o_3\beta_3^{II} \ o_3\gamma_3^{III} \ 1a_1^{IV} \ 1a_2^V) \\ \text{pontok a } D_{34} D_{56} = o | \Pi^{VI} A_3^I A_1^V A_2^{IV} |$$

egyenesen; ennél fogva $D^{II, III}$ háromszög átlóháromszöge a $1v^{II, III} = [p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}]$ négyoldalnak, s mert a $1v^{II, III}$ négyoldal az $y^{II, III}$ négyszögbe be van írva, azért az $y^{II, III}$ négyszög szögpontjainak a $D^{II, III}$ átlóháromszöget illetőleg harmonikus polárisai a $1v^{II, III}$ négyoldalnak oldalai. Ennél fogva:

A hatvan $1v$ egyenes tizenöt $1v$ négyoldalra oszlik, melyek a tizenöt y -négyszögbe be vannak írva, és melyeknek átlóháromszögük azokéval közös. (Dualis tétele a 32-nek.)

68. A következőkben ki akarjuk mutatni, hogy a configurációban a 9. ábrával correlációs ábra rejlik. (12. ábra.)

A $\sigma^{II, III}$ collineatio tengelyre perspectivás

$$o(a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}) \equiv (3\ 5, 4\ 6) \ (1\ 3, 2\ 4) \ (1\ 5, 2\ 6), \ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$

háromszögek megfelelő oldalai egymást az $A_1 A_2 A_3$ pontokban metszik; a megfelelő szögpontokat vetítő y_{12}, y_{56}, y_{34} sugarak egymást az $y^{II, III}$ négyszög egyik szögpontjában metszik.

Azonkívül az

$$(o_1a_1^{IV} \alpha_2) = o_1A_2^{IV}, \ (o_1a_1^{IV} \alpha_3) = o_1A_3^{IV}, \ (o_1a_2^V \ \alpha_3) = o_1A_3^V, \\ (o_1a_1^V \ \alpha_1) = o_1A_1^V, \ (o_1a_3^{VI} \ \alpha_1) = o_1A_1^{VI}, \ (o_1a_3^{VI} \ \alpha_2) = o_1A_2^{VI} \ \text{és az} \\ o | A_2^{VI} A_1^V | = D_{34} D_{56}, \ o | A_1^{VI} A_3^{IV} | = D_{56} D_{12}, \ o | A_3^V A_2^{VI} | = D_{12} D_{34}$$

egyenesek a $D^{II, III}$ háromszög oldalai.

Ez a $D^{II, III}$ háromszög a $o(a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI})$ háromszöggel a π , és az $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ háromszöggel a $o p^I$ collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectivás; a közös collineatio-középpont ($y_{12} y_{34} y_{56}$); és a megfelelő oldalak metszőpontjai $o\Pi^{IV}, o\Pi^V, o\Pi^{VI}; oA_1^I, oA_2^I, oA_3^I$.

Ama négy pár háromszög, melyre a

$$o v^{II, III} = o[p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}], \ s^{II, III} = \pi \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$

bonthatók, az $y^{II, III} = y_{12} y_{34} y_{56} y'_{12} y'_{34} y'_{56}$ négyszög szögpontjaira perspectivásak; a szögpontokat vetítő sugarak e négyszögnek oldalai. A ${}_1p^I p^I p^I$, ${}_1a_1^{IV} a_1^{IV} a_1^{IV}$, stb. sugarak között következő relatiók léteznek:

$$({}_1p^I \sigma^{II, III} {}_0p^I \pi) = ({}_1a_1^{IV} \sigma^{II, III} {}_0a_1^{IV} \alpha_1) = \dots = -1$$

$$({}_1p^I {}_0p^I \pi p^I) = ({}_1a_1^{IV} {}_0a_1^{IV} \alpha_1 a_1^{IV}) = \dots = -1$$

$$({}_1p^I \pi p^I \pi^{II, III}) = ({}_1a_1^{IV} \alpha_1 a_1^{IV} \sigma^{II, III}) = \dots = -1.$$

$$A \quad v^{II, III} = ({}_1p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}, \quad v_1^{II, III} = ({}_1p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}), \\ {}_1v^{II, III} = ({}_1p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI})$$

négyszögbe vannak írva, és a ${}_1v^{II, III}$, $y^{II, III}$ négyszögeknek közös átlóháromszögük a $D^{II, III}$.

Ama négyszögeknek az $y^{II, III}$ négyszög oldalain fekvő szögpontjai PASCAL-, SALMON-, ${}_01G$, és G_{12} pontok.

Hasonlóképp lehet a 8. ábrához is correlatiós ábrát (11. ábra) találni. A

$${}_0(A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II}) = {}_0(c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II}), \quad {}_0(A_1^{III} A_2^{III} A_3^{III}) = {}_0(b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III})$$

perspectivás háromszögek megfelelő szögpontjai az $a_1 a_2 a_3$ egyenesen, a megfelelő oldalak metszéspontjai a ${}_1p^I$ egyenesen fekszenek.

Az ${}_0 | A_1^{II} A_2^{III} |$, ${}_0 | A_2^{III} A_1^{III} |$ egyenespárok egymást a $D^{II, III} = D_{12} D_{34} D_{56}$ háromszög szögpontjaiban metszik, mely háromszög a fentebbiekkel a ${}_1p^I$ collineatio-tengelyre és a p-egyenesen fekvő ${}_0P^{III}$, ${}_0P^{II}$ collineatio-középpontokra perspectivás.

A négy háromszögpar, a melyekre a

$${}_0[P^{II} A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II}], \quad {}_0[P^{III} A_1^{III} A_2^{III} A_3^{III}]$$

négyszögek oszthatók, a ${}_1v^{II, III} = [{}_1p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}]$ négyszög oldalaira, mint collineatio-tengelyre, perspectivás.

Az $y^{II, III}$ négyszög a ${}_1v^{II, III}$ négyszög körül van írva, és mindkettőjüknek közös átlóháromszöge $D^{II, III}$; végre ez utóbbinak szögpontjait a $\Sigma^{II, III} = (p a_1 a_2 a_3)$ pontból az $y''_{12} y''_{34} y''_{56}$ sugarakkal projiciáljuk.

69. A 31. és 32. pontban levő tételekhez a correlatiós tételek szintén könnyen megtalálhatók.

Ugyanis a

$${}_1v^{II, III} = [{}_1p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}], \quad Y^{II, III} = Y_{12} Y_{34} Y_{56} Y'_{12} Y'_{34} Y'_{56}$$

négyszög oldalai a $\sigma^{\text{II}}, \text{III}$ egyenes $P A_1 A_2 A_3$ pontjain mennek keresztül, és átlóháromszögeik, $D^{\text{II}}, \text{III}$ és $\Delta^{\text{II}}, \text{III}$, a $\Sigma^{\text{II}}, \text{III}$ pontra és a $\sigma^{\text{II}}, \text{III}$ egyenesre vonatkozólag (45.) perspectivásak. Minthogy ezek következtében ama négyszögek is perspectivásak, kimondhatjuk, hogy

A tizenöt ${}_1V$ és Y -négyoldal a hozzájuk rendelt Σ -pont- és σ -egyenesre vonatkozólag perspectivás.

Vagy más szóval:

A kilenczven ${}_0G$ pont azon a kilenczven egyenesen fekszik, melyek a Σ pontokat a hozzájuk rendelt Y -négyoldalak szögpontjaival összekötik.

Továbbá a $D^{\text{II}}, \text{III}$ D^{III}, I D^{I}, II D^{V}, VI D^{VI}, IV D^{IV}, V háromszögek szögpontjai és oldalai

$$\begin{aligned} D_{56} D_{34} D_{12} &= {}_0 | \Pi^{\text{IV}} A_1^{\text{I}} A_2^{\text{VI}} A_3^{\text{V}} |, {}_0 | \Pi^{\text{V}} A_2^{\text{I}} A_3^{\text{IV}} A_1^{\text{VI}} |, {}_0 | \Pi^{\text{VI}} A_3^{\text{I}} A_1^{\text{V}} A_2^{\text{IV}} | \\ D_{14} D_{25} D_{36} &= {}_0 | \Pi^{\text{IV}} B_1^{\text{II}} B_2^{\text{VI}} B_3^{\text{V}} |, {}_0 | \Pi^{\text{V}} B_2^{\text{II}} B_3^{\text{IV}} B_1^{\text{VI}} |, {}_0 | \Pi^{\text{VI}} B_3^{\text{II}} B_1^{\text{V}} B_2^{\text{IV}} | \\ D_{23} D_{16} D_{45} &= {}_0 | \Pi^{\text{IV}} \Gamma_1^{\text{III}} \Gamma_2^{\text{VI}} \Gamma_3^{\text{V}} |, {}_0 | \Pi^{\text{V}} \Gamma_2^{\text{III}} \Gamma_3^{\text{IV}} \Gamma_1^{\text{VI}} |, {}_0 | \Pi^{\text{VI}} \Gamma_3^{\text{III}} \Gamma_1^{\text{V}} \Gamma_2^{\text{IV}} | \\ D_{56} D_{14} D_{23} &= {}_0 | P^{\text{I}} A_1^{\text{IV}} B_1^{\text{III}} C_1^{\text{II}} |, {}_0 | P^{\text{II}} B_1^{\text{IV}} C_1^{\text{I}} A_1^{\text{III}} |, {}_0 | P^{\text{III}} C_1^{\text{IV}} A_1^{\text{II}} B_1^{\text{I}} | \\ D_{34} D_{25} D_{16} &= {}_0 | P^{\text{I}} A_2^{\text{V}} B_2^{\text{III}} C_2^{\text{II}} |, {}_0 | P^{\text{II}} B_2^{\text{V}} C_2^{\text{I}} A_2^{\text{III}} |, {}_0 | P^{\text{III}} C_2^{\text{V}} A_2^{\text{II}} B_2^{\text{I}} | \\ D_{12} D_{36} D_{45} &= {}_0 | P^{\text{I}} A_3^{\text{VI}} B_3^{\text{III}} C_3^{\text{II}} |, {}_0 | P^{\text{III}} B_3^{\text{VI}} C_3^{\text{I}} A_3^{\text{III}} |, {}_0 | P^{\text{III}} C_3^{\text{VI}} A_3^{\text{II}} B_3^{\text{I}} | \end{aligned}$$

A három első és a három utolsó háromszög a

$$\pi = {}_0 | \Pi^{\text{IV}} \Pi^{\text{V}} \Pi^{\text{VI}} |, \quad p = {}_0 | P^{\text{I}} P^{\text{II}} P^{\text{III}} |$$

collineatio-tengelyre és a

$${}_0P^{\text{I}} \quad {}_0P^{\text{II}} \quad {}_0P^{\text{III}}, \quad {}_0\Pi^{\text{IV}} \quad {}_0\Pi^{\text{V}} \quad {}_0\Pi^{\text{VI}}$$

collineatio-középpontokra perspectivás.

De ama háromszögek átlóháromszögei a

$$\left. \begin{aligned} {}_1V^{\text{II}}, \text{III} &= {}_1 [P^{\text{I}} a_1^{\text{IV}} a_2^{\text{V}} a_3^{\text{VI}}] \\ {}_1V^{\text{III}}, \text{I} &= {}_1 [P^{\text{II}} b_1^{\text{IV}} b_2^{\text{V}} b_3^{\text{VI}}] \\ {}_1V^{\text{I}}, \text{II} &= {}_1 [P^{\text{III}} c_1^{\text{IV}} c_2^{\text{V}} c_3^{\text{VI}}] \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} {}_1V^{\text{V}}, \text{VI} &= {}_1 [\pi^{\text{IV}} \alpha_1^{\text{I}} \beta_1^{\text{II}} \gamma_1^{\text{III}}] \\ {}_1V^{\text{VI}}, \text{IV} &= {}_1 [\pi^{\text{V}} \alpha_2^{\text{I}} \beta_2^{\text{II}} \gamma_2^{\text{III}}] \\ {}_1V^{\text{IV}}, \text{V} &= {}_1 [\pi^{\text{VI}} \alpha_3^{\text{I}} \beta_3^{\text{II}} \gamma_3^{\text{III}}] \end{aligned} \right\}$$

négyszögeknek, melyeknek oldalai a π , illetve p -egyenesen fekvő

$$P \quad {}_1\Pi^{\text{IV}} \quad {}_1\Pi^{\text{V}} \quad {}_1\Pi^{\text{VI}}, \quad \Pi \quad {}_1P^{\text{I}} \quad {}_1P^{\text{II}} \quad {}_1P^{\text{III}}$$

pontokon mennek keresztül. Ennélfogva ama négyszögek közül az első és az utolsó három a π és p tengelyekre és a ${}_0P^{\text{I}} \quad {}_0P^{\text{II}} \quad {}_0P^{\text{III}}$ és ${}_0\Pi^{\text{IV}} \quad {}_0\Pi^{\text{V}} \quad {}_0\Pi^{\text{VI}}$ pontokra vonatkozólag perspectivás.

Tekintettel a 47. pontra, mondhatjuk: A tizenöt v -négyoldalból, D -háromszögből és y -négyzögből húszszor lehet három olyant kiválasztani, mely a húsz CAYLEY-egyenesre, mint collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectivás; a hatvan collineatio-középpont a hatvan oV pont. Három-három collineatio-középpont, mely egy CAYLEY-egyenesen nyugvó perspectivás alakzathoz tartozik, a CAYLEY-egyenes ellenegyenesén fekszik.

15. A v_1 Veronese-egyenesekről és V_1 Veronese-pontokról.

70. Tudjuk az előbbiekből, hogy a hatvan v_1 egyenes egymást párosával a kilenczven G_{12} pontban metszi, úgy hogy minden v_1 egyenesen három G_{12} pont fekszik.

E kilenczven G_{12} pont azonban hármasával még más hatvan egyenesen is fekszik.

Ugyanis az

$$(A_1^{\text{II}} A_2^{\text{II}} A_3^{\text{II}})_1 = (c_1^{\text{II}} c_2^{\text{II}} c_3^{\text{II}})_1, \quad (A_1^{\text{III}} A_2^{\text{III}} A_3^{\text{III}})_1 = (b_1^{\text{III}} b_2^{\text{III}} b_3^{\text{III}})_1$$

háromszögek, melyeknek megfelelő szögpontjai az egymást a $\Sigma^{\text{II}}, \text{III}$ pontban metsző $a_1 a_2 a_3$ egyenesen fekszenek, perspectivásak; ennél fogva megfelelő oldalainak metszőpontjai

$$(c_1^{\text{II}} b_1^{\text{III}})_1 = (1\ 4, 2\ 3)_1, \quad (c_2^{\text{II}} b_2^{\text{III}})_1 = (1\ 6, 2\ 5)_1, \quad (c_3^{\text{II}} b_3^{\text{III}})_1 = (3\ 6, 4\ 5)_1$$

egy p_2^{I} egyenesen fekszenek, mely a p_1^{I} egyenestől különbözik, minthogy a p^{I} egyenesen fekvő

$$(p^{\text{I}} a_1^{\text{IV}})_1 = (1\ 4, 2\ 3)'_1, \quad (p^{\text{I}} a_2^{\text{V}})_1 = (1\ 6, 2\ 5)'_1, \quad (p^{\text{I}} a_3^{\text{VI}})_1 = (3\ 6, 4\ 5)'_1$$

pontok, melyek amazokkal együtt az $y'_{56} y'_{34} y'_{12}$ egyeneseken fekszenek, ugyancsak ama pontokat a $\Sigma^{\text{V}}, \text{VI}$ ponttól és az $(1\ 4, 2\ 3)$, $(1\ 6, 2\ 5)$, $(3\ 6, 4\ 5)$ pontoktól harmonicusan választják el.

A hatvan v_1 egyenesből hatvan ily perspectivás háromszögpárt és így hatvan ily p_2^{I} collineatio-tengelyt, melyet általában v_2 egyenesnek nevezünk, lehet kiválasztani.

Ha ama perspectivás háromszögek közül az

$$(A_2^{\text{III}} A_3^{\text{III}} P^{\text{III}})_1 = (b_1^{\text{III}} \gamma_2^{\text{III}} \gamma_3^{\text{III}})_1, \quad (A_2^{\text{II}} A_3^{\text{II}} P^{\text{II}})_1 = (c_1^{\text{II}} \beta_2^{\text{II}} \gamma_3^{\text{II}})_1$$

háromszögeket vesszük tekintetbe, melyeknek megfelelő oldalai egymást az a_{12}^{IV} egyenes

$$(b_1^{III} c_1^{II})_1 = (1\ 4, 3\ 2)_1, (\gamma_2^{III} \beta_2^{II})_1 = (1\ 5, 2\ 6)'_1, (\gamma_3^{III} \beta_3^{II})_1 = (3\ 5, 4\ 6)'_1$$

pontjaiban metszik, azt látjuk, hogy az a_{12}^{IV} egyenes különbözik az a_{11}^{IV} -től, a melyen az

$$(a_1^{IV} p^I)_1 = (1\ 4, 3\ 2)'_1, (a_1^{IV} a_3^{VI})_1 = (1\ 5, 2\ 6)_1, (a_1^{IV} a_2^V)_1 = (3\ 5, 4\ 6)_1$$

pontok fekszenek.

A $G_{12} = (1\ 4, 3\ 2)_1$ ponton keresztül mennek a $b_{11}^{III} c_{11}^{II} a_{12}^{IV} p_2^I$ egyenesek és a $G'_{12} = (1\ 4, 3\ 2)'_1$ ponton a $b_{12}^{III} c_{12}^{II} a_{11}^{IV} p_1^I$ egyenesek, és hasonlóképp az y -egyeneseken fekvő mindenik G_{12} , G'_{12} pontpáron két-két v_1 és v_2 egyenes megy keresztül. Ennélfogva:

»Minden y -egyenesen egy G_{12} , G'_{12} pontpár fekszik, melyeken két-két v_1 és két-két v_2 egyenes megy keresztül. Ezek az egyenesek a-okhoz a PASCAL-egyenesekhez vannak rendelve, melyek egymást a felvett y -egyenesen fekvő PASCAL-pontban metszik«.

»A hatvan v_2 egyenes egymást hármasával a húsz STEINER-pontban metszi, még pedig azokban a STEINER pontokban, a melyekben a hozzájuk rendelt PASCAL-egyenesek metszik egymást«.

Ugyanis az

$$(A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II})_1 = (c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II})_1, (A_1^{III} A_2^{III} A_3^{III})_1 = (b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III})_1, \\ (B_1^{III} B_2^{III} B_3^{III})_1 = (a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III})_1, (C_1^{II} C_2^{II} C_3^{II})_1 = (a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II})_1$$

háromszögek közül

- az 1-ső persp. a 2-dikkel a $\Sigma^{II, III}$ és a p_2^I ;
- a 2-ik » a 3-dikkel a P_1^{III} és a p_1^{III} ;
- a 3-ik » a 4-dikkel a P_1 és a $\sigma^{II, III}$;
- a 4-ik » az 1-sővel a P_1^{II} és a p_1^{II}

középpontra és tengelyre vonatkozólag. E középpontok a p -egyenesen fekvődvén, a p_2^I egyenes a P -ponton megy keresztül.

Miután a $p_2^I p_1^I \pi p^I$ egyenesek az $(1\ 4, 3\ 2)_1$, $(1\ 4, 3\ 2)'_1$, $\Sigma^{V, VI}$, $(1\ 4, 3\ 2)$ harmonicus pontokat a P -pontból vetítik,

$$(p_2^I p_1^I \pi p^I) = (p_1^I p_2^I \pi p^I) = -1.$$

71. Akképp, mint a hogy a hatvan v_1 egyenes egymást hármasával a húsz STEINER-ponton kívül még hatvan V_1 pontban metszi, a hatvan

v_2 egyenes is a húsz STEINER-ponton kívül még hatvan V_2 pontban fogja egymást metszeni, melyeket a hatvan V_1 pontokhoz rendelünk. Az

$$(A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI})_1, (12, 34)_1 (56, 12)_1 (34, 56)_1 = \\ (\alpha_2^{IV} \alpha_3^V)_1 (\alpha_3^{IV} \alpha_1)_1 (\alpha_1^V \alpha_2^{IV})_1, A_1 A_2 A_3$$

háromszögek, minthogy oldalaik egymást az $|Y_{56} Y_{34} Y_{12}|$ egyenes Y_{56}, Y_{34}, Y_{12} pontjaiban metszik, perspectivásak, s így collineatio-középpontjaik a p -egyenesen fekszenek, melyet már az

$$A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}, (12, 34) (56, 12) (34, 56), A_1 A_2 A_3$$

perspectivás háromszögek meghatároznak. (Jegyzetben a 181. lapon.)

Ennélfogva az

$$A_1 (12, 34)_1 = \alpha_1^{I_{12}} \quad A_2 (56, 12) = \alpha_2^{I_{23}} \quad A_3 (34, 56)_1 = \alpha_3^{I_{32}}$$

sugarak egymást a p -egyenes P_2^I pontjában metszik.

Hasonló úton kimutatható, hogy a $\beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II}$ és $\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III}$ PASCAL-egyenesekhez rendelt $\beta_{12}^{II} \beta_{23}^{II} \beta_{32}^{II}$ és $\gamma_{12}^{III} \gamma_{23}^{III} \gamma_{32}^{III}$ egyenesek egymást a p -egyenesen fekvő P_2^{II} , illetve P_2^{III} pontokban metszik. E szerint kimondhatjuk, hogy

»A hatvan v_2 egyenes egymást hármasával hatvan V_2 pontban metszi, melyek hármasával a húsz CAYLEY-egyenesen teküsznek. Minden V_2 pontból három v_2 egyenes sugárzik ki, és minden v_2 egyenes három V_2 pontot tartalmaz.

Ebből folytatólag következik, hogy egy DESARGUES-configuratiót képező tíz PASCAL-egyeneshez és tíz KIRKMAN-ponthoz rendelt tíz v_2 egyenes és tíz V_2 pont szintén egy $(10_3, 10_3)$ DESARGUES-configuratiót képez, azaz:

»A hatvan V_2 pont és v_2 egyenes, melyek maguk egy $[Vv]_2$ configuratiót képeznek, hat DESARGUES-configuratióra oszlik.

Minthogy az $\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I$ harmonicus egyenesek a $P_1^I, P_2^I, \Sigma^{II, III}, P^I$ pontokat az A_1 pontból projiciálják,

$$(P_1^I P_2^I \Sigma^{II, III} P^I) = -1,$$

s mert a $(P_1^I P_2^I \Sigma^{II, III} P^I), (A_{11}^{IV} A_{12}^{IV} \Sigma^{II, III} A_1^{IV})$ négyesek harmonicusak, a $|P^I A_1^{IV}|_2$ egyenes az $Y'_{56} = (P^I A_1^{IV}, P_1^I A_1^{IV})$ ponton megy keresztül.

A $P^I A_1^{IV}$ egyenesen rajta fekszenek még a $B_1^{III} C_1^{II}$ pontok is; a $|P^I A_1^{IV}|_1$ egyenesen pedig a $B_1^{III} C_1^{II}$ pontok, továbbá a b_1, c_1 egyeneseken a

$$B_{11}^{III} B_{12}^{III} \Sigma^{I, IV} B_1^{III}; C_{11}^{II} C_{12}^{II} \Sigma^{I, IV} C_1^{II}$$

harmonicus pontok; ennél fogva a $|B_1^{III} C_1^{II}|_2$ egyenes a

$$P_1^I A_{11}^{IV} B_1^{III} C_1^{II}, P^I A_1^{IV} B_{11}^{III} C_{11}^{II}$$

egyeneseknek Y'_{56} metszőpontján megy keresztül. De e két egyenes $|P^I A_1^{IV}|_2$ $|B_1^{III} C_1^{II}|_2$, nem esik egybe.

Ugyanis egyrészt tudjuk a 63. pontból, hogy a P_1^I pont a $[\Sigma^{II, III} P^I]$ vonaldarabon kívül fekszik, tehát a $(P_1^I P_2^I \Sigma^{II, III} P^I) = -1$ relatio következtében P_2^I a $[\Sigma^{II, III} P^I]$ vonaldarabon van, de nem esik egybe a ${}_0P^I$ ponttal. Így $(P^I P_1^I \Pi P_2^I)$ nem harmonicus négyes. (Értéke különben = 4.)

Másrészt a

$$(P^I P_1^I \Pi P_2^I) \wedge (B_1^{III} B_{11}^{III} B_1 B_{12}^{III})$$

helyzeti viszonylat miatt

$$Y'_{56} (|P^I A_1^{IV}|_1 |P^I A_1^{IV}|_1 | \Pi A_1 | |P^I A_1^{IV}|_2) \wedge \\ Y'_{56} (B_1^{III} C_1^{II} | |B_1^{III} C_1^{II}|_1 | B_1 \Gamma_1 | |B_1^{III} C_1^{II}|_2),$$

és mert

$|P^I A_1^{IV}| \equiv |B_1^{III} C_1^{II}|_1$, $|P^I A_1^{IV}|_1 \equiv |B_1^{III} C_1^{II}|$, $| \Pi A_1 | \equiv |B_1 \Gamma_1 |$, azért a $|P^I A_1^{IV}|$, $|P^I A_1^{IV}|_1$ kapcsolt sugárpártól és a $| \Pi A_1 B_1 \Gamma_1 |$ kettősugárpártól meghatározott involutióban $|P^I A_1^{IV}|_2$, $|B_1^{III} C_1^{II}|_2$ szintén kapcsolt sugárpár lesz. De e két sugár nem esik egybe, mert $(P^I P_1^I \Pi P_2^I)$ nem harmonicus négyes, és így a $P^I P_1^I$, ΠP_2^I pontpárok nincsenek harmonikusán elválasztva.

Ennél fogva:

»A hatvan V_2 pont párosával kilenczven g_{23} egyenesen fekszik, melyek egymást párosával (g_{23}, g'_{23}) a negyvenöt Y -pontban metszik.

Ugyanegy Y -ponton keresztül menő g_{01} g'_{01} g_{23} g'_{23} σ ${}_0g$ egyenesekre nézve pedig

$$(g_{01} g'_{01} \sigma g_{23}) \wedge (g'_{01} g_{01} \sigma g'_{23}),$$

s mert $(g_{01} g'_{01} \sigma {}_0g) = -1$, azért a σ és ${}_0g$ kettős sugarai a $g_{01} g'_{01}$, $g_{23} g'_{23}$ sugárpontoktól meghatározott involutiónak.

72. Vizsgáljuk már most az

$$(a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II})_2 = (C_1^{II} C_2^{II} C_3^{II})_2, (a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III})_3 = (B_1^{III} B_2^{III} B_3^{III})_3$$

perspectivás háromszögeket, melyeknek oldalai a $\sigma^{\text{II}}, \text{III}$ egyenes $A_1 A_2 A_3$ pontjain keresztül menő v_2 egyenesek, szögpontjai pedig a következő g_{23} egyeneseken $| B_1^{\text{III}} C_1^{\text{II}} |_2$, $| B_2^{\text{III}} C_2^{\text{II}} |_2$, $| B_3^{\text{III}} C_3^{\text{II}} |_2$ fekvő V_2 pontok. Ez utóbbi g_{23} egyenesek tehát egymást egy pontban metszik. Minthogy azonban ezekén a g_{23} egyeneseken a kijelölt V_2 pontokon kívül más V_2 pontok nincsenek, ama három egyenes metszőpontja, P_3^{I} , nem esik egybe a P^{I} ponttal.

A hatvan v_2 egyenesből hatvan ily perspectivás háromszög képezhető, melyek a σ -egyenesekre, mint *collineatio-tengelyekre*, perspectivásak, mert minden σ -egyenes négy pár perspectivás háromszögnek *collineatio-tengelye*. A hatvan *collineatio-középpontot*, melyekhez ama háromszögek vezetnek, a KIRKMAN-pontokhoz rendeljük és általában V_3 -mal jelöljük; különös megjelölésük ellenben olyan legyen, mint a KIRKMAN-pontoké, melyekhez rendelvük, de még g_3 -mas mutatókkal is lássuk el őket.

A g_{23} egyenesek mindegyikén két V_3 pont fekszik, melyek az analogus g_{01} egyeneseken fekvő V_1 pontokhoz rendelvük. Mert a

$$(p^{\text{II}} a_2^{\text{II}} a_3^{\text{II}})_2 = (C_1^{\text{II}} B_1^{\text{II}} B_3^{\text{II}})_2, \quad (p^{\text{III}} a_1^{\text{III}} a_2^{\text{III}})_2 = (B_1^{\text{III}} \Gamma_1^{\text{III}} \Gamma_3^{\text{III}})_2,$$

háromszögek az A_{13}^{IV} *collineatio-középpontra* perspectivásak, mely pont a P_3^{I} ponttal együtt a $| B_1^{\text{III}} C_1^{\text{II}} |_2$ egyenesen fekszik.

Minthogy az

$$(a_1^{\text{II}} a_2^{\text{II}} a_3^{\text{II}})_2, (a_1^{\text{III}} a_2^{\text{III}} a_3^{\text{III}})_2, (b_1^{\text{III}} b_2^{\text{III}} b_3^{\text{III}})_2, (c_1^{\text{II}} c_2^{\text{II}} c_3^{\text{II}})_2$$

háromszögek közül az 1-ső és 2-ik a P_3^{I} , $\sigma^{\text{II}}, \text{III}$; a 2-ik és 3-ik a P_2^{III} , p_2^{III} ; a 3-ik és 4-ik a $\Sigma^{\text{II}}, \text{III}$, p_1^{I} a 4-ik és 1-ső a P_2^{II} pontra s a p_2^{II} egyenesre vonatkozólag perspectivás, és azok az egyenesek a P-ponton mennek keresztül, ezért ama pontok a p-egyenesen fekszenek.

Ugyanezt mondhatjuk a P_3^{II} , P_3^{III} pontokról, melyek *collineatio-középpontjai* a $(b_1^{\text{III}} b_2^{\text{III}} b_3^{\text{III}})_2$, $(b_1^{\text{I}} b_2^{\text{I}} b_3^{\text{I}})_2$ és $(c_1^{\text{I}} c_2^{\text{I}} c_3^{\text{I}})_2$, $(c_1^{\text{II}} c_2^{\text{II}} c_3^{\text{II}})_2$ perspectivás háromszögeknek.

Ennéltogva: »A hatvan V_3 pont hármásával a húsz CAYLEY-egyenesen fekszik«.

Minthogy a $| P^{\text{I}} A_1^{\text{IV}} |_3$, $| B_1^{\text{III}} C_1^{\text{II}} |_2$ egyenesek egybe esnek, a $| P^{\text{I}} A_1^{\text{IV}} |_3 = g'_{23}$, valamint a $| P^{\text{I}} A_1^{\text{IV}} | = g_{01}$, $| P^{\text{I}} A_1^{\text{IV}} |_1 = g'_{01}$, $| P^{\text{I}} A_1^{\text{IV}} |_2 = g_{23}$ egyenesek az Y'_{56} ponton mennek keresztül. Ezek az egyenesek a p-t a P^{I} , P_1^{I} , P_2^{I} , P_3^{I} pontokban metszik; és a II,

${}_0P^I$ pontok kettőspontjai a $P^I P_1^I, P_2^I P_3^I$ pontpároktól meghatározott involúciónak.

Ennek következtében

$$(P_2^I P_3^I \Pi {}_0P^I) = -1;$$

és mert a P_2^I nincs a $[\Pi {}_0P^I]$ vonaldarabon: a P_3^I pont a $[\Pi {}_0P^I]$ vonaldarabon, de a $[\Sigma^{II}, {}^{III} P^I]$ vonaldarabon kívül fekszik.

73. A hatvan V_3 pont hármasával a húsz CAYLEY-egyenesen kívül még más hatvan v_3 egyenesen is fekszik. Ezek a v_3 egyenesek hármasával a húsz STEINER-poton mennek keresztül és egy a $[Vv]_3$ -vel analogus $[Vv]_3$ configurációt képeznek

Ugyanis, minthogy a

$$\pi_3^{IV} = |A_1^{IV} B_1^{IV} C_1^{IV}|_2, \quad \pi_2^V = |A_2^V B_2^V C_2^V|_2, \quad \pi_2^{VI} = |A_3^{VI} B_3^{VI} C_3^{VI}|_2$$

egyenesek egymást a Π pontban metszik, az

$$\begin{aligned} (A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI})_2 &= (B_1^{II} \Gamma_1^{III} B_2^{II} \Gamma_2^{III} B_3^{II} \Gamma_3^{III})_3 \\ (C_1^{IV} C_2^V C_3^V)_2 &= (A_1^I B_1^{II} A_2^I B_2^{II} A_3^I B_3^{II})_3 \end{aligned}$$

háromszögek perspectívások, és megfelelő oldalaik metszőpontjai a $p_3^{II} = |B_1^{II} B_2^{II} B_3^{II}|_3$ egyenesen fekszenek.

Minthogy továbbá a $\Sigma^{II}, {}^{III}$ collineatio-középpontra perspectívás háromszögek,

$$(A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI})_1, (A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI})_2, \beta_1 \beta_2 \beta_3,$$

közül, az 1-ső és 2-ik az $|Y_{56} Y_{34} Y_{12}|$ tengelyre; a 3-ik az első kettővel a p^{II}, p_3^{II} , tengelyekre perspectívás, és megfelelő oldalaik egymást a p^{II} , illetve p_3^{II} egyeneseken fekvő

$$\begin{aligned} B_1^{II} &= (\beta_1, A_2^V A_3^{VI} B_1^{II} \Gamma_1^{III}), & B_2^{II} &= (\beta_2, A_3^{VI} A_1^{IV} B_2^{II} \Gamma_2^{III}), \\ B_3^{II} &= (\beta_3, A_1^{IV} A_2^V B_3^{II} \Gamma_3^{III}) \\ B_{13}^{II} &= (\beta_1, A_3^V A_2^{VI} B_{13}^{II} \Gamma_{13}^{III}), & B_{23}^{II} &= (\beta_2, A_3^V A_{12}^{IV} B_{23}^{II} \Gamma_{23}^{III}), \\ B_{33}^{II} &= (\beta_3, A_{12}^{IV} A_{23}^V B_{33}^{II} \Gamma_{33}^{III}) \end{aligned}$$

pontokban metszik, a p_3^{II} egyenes a $P = (p^{II}, Y_{56} Y_{34} Y_{12})$ ponton megy keresztül.

74. A hatvan v_3 egyenes egymást párosával az y -egyeneseken fekvő kilenczven G_{34} pontban metszi, úgy hogy minden G_{34} ponton két v_3 egyenes megy keresztül, s minden v_3 egyenesen három G_{34} pont fekszik, megfelelőleg a v_1 egyeneseknek és a G_{12} pontoknak.

Az $\alpha_{13} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_{23}^v \mathbf{B}_{33}^v \Gamma_{33}^v$, $\alpha_{23}^{IV} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_{13}^{IV} \mathbf{B}_{33}^{IV} \Gamma_{33}^{IV}$ v_3 -egyenesek egymást az $(\alpha_1^v \alpha_2^{IV})_3 = (34, 56)_3$ G_{34} -pontban, és a $\pi_3^{VI} = \Pi \mathbf{A}_{33}^{VI} \mathbf{B}_{33}^{VI} \mathbf{C}_{33}^{VI}$ $\alpha_{33}^I = \mathbf{A}_3 \mathbf{P}_3^I \mathbf{B}_{33}^I \mathbf{C}_{33}^I$ v_3 -egyenesek egymást a $(\pi^{VI} \alpha_3^I)_3 = (34, 56)'_3$ G'_{34} -pontban metszik, mely pontok az y''_{12} egyenesen fekszenek, mert Y_{12} , y''_{12} és Y'_{12} , y''_{12} átlóspontja és átlója az $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_{13}^{IV} \mathbf{A}_{23}^v$, $\Pi \mathbf{A}_3 \mathbf{P}_3^I \mathbf{A}_{33}^{VI}$ négyszögeknek.

Ugyanígy, ha

$$\alpha_{23}^{VI} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_{33}^{VI}, \quad \alpha_{33}^v = \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_{23}^v, \quad \alpha_{33}^{IV} = \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_{13}^{IV}, \quad \alpha_{13}^{VI} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_{13}^{IV},$$

$$\pi_3^{IV} = \Pi \mathbf{A}_{13}^{IV}, \quad \pi_3^v = \Pi \mathbf{A}_{23}^v, \quad \alpha_{13}^I = \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_3^I, \quad \alpha_{23}^I = \mathbf{A}_2 \mathbf{P}_3^I,$$

akkor a

$$(\alpha_2^{VI} \alpha_3^v)_3 = (12, 34)_3, \quad (\pi^{IV} \alpha_1^I)_3 = (12, 34)'_3,$$

$$(\alpha_3^{IV} \alpha_1^{VI})_3 = (56, 12)_3, \quad (\pi^v \alpha_2^I)_3 = (56, 12)'_3$$

pontok G_{34} pontok; és a

$$(\pi^{VI} \alpha_3^I)_3 = (34, 56)'_3, \quad (\pi^{VI} \beta_3^{II})_3 = (14, 25)'_3, \quad (\pi^{VI} \gamma_3^{III})_3 = (16, 32)'_3$$

a π_3^{VI} egyenesen fekvő G_{34} pontok.

Mínthogy

$$(\mathbf{A}_2^v \mathbf{A}_{21}^v \mathbf{A}_{23}^v \mathbf{A}_{23}^v) \overline{\wedge} (\mathbf{A}_3^{VI} \mathbf{A}_{31}^{VI} \mathbf{A}_{32}^{VI} \mathbf{A}_{33}^{VI}),$$

azért e négyeseket (melyeknek értéke különben = 1:16) az \mathbf{A}_1, Π pontokból projiciáló sugarakra is

$$(\alpha_1^v \alpha_{11}^v \alpha_{12}^v \alpha_{13}^v) \overline{\wedge} (\pi^{VI} \pi_1^{VI} \pi_2^{VI} \pi_3^{VI}),$$

valamint ezeknek metszéspontjaira y''_{12} -vel

$$((34, 56) (34, 56)_1 (34, 56)'_1 (34, 56)_3) \overline{\wedge}$$

$$((34, 56) (34, 56)'_1 (34, 56)_1 (34, 56)'_3);$$

vagy általánosan

$$(G G_{12} G'_{12} G_{34}) \overline{\wedge} (G G'_{12} G_{12} G'_{34}).$$

Ha pedig azt is tekintetbe vesszük, hogy $(G_{12} G'_{12} \Sigma G) = -1$, következik, hogy a Σ, G -pontok kettőspontjai a $G_{12} G'_{12}, G_{34} G'_{34}$ pontpároktól meghatározott involúciónak, és így $(G_{34} G'_{34} \Sigma G) = -1$.

»A negyvenöt Y -pont mind-egyikén négy l_{34} egyenes megy keresztül, melyeken a kilenczven G_{34} pont közül kettő-kettő van; az l_{34} egyenesek száma 180; minden G_{34} ponton keresztül megy négy «.

»A negyvetöt y -egyenes mind-egyikén a kilenczven g_{23} egyenes közül négy pár metszi egymást; ez l_{23} metszéspontok száma 180; minden g_{23} egyenesen négy ily pont van «.

Mindkét tétel hasonló úton bizonyítható be, mint az 57. pontban foglalt tételek, csak az »₁« mutató cserélendő föl »₃«-mal.

75. A kilenczven $G_{3,4}$ pont hármásával a hatvan v_3 egyenesen kívül még hatvan v_4 egyenesen is fekszik, melyeket ezekhez és a PASCAL-, valamint v_1, v_2 egyenesekhez rendelhetünk.

Ugyanis a $\Sigma^{II, III}$ pontra vonatkozólag perspektívás háromszögek

$$(A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II})_3 = (c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II})_3, \quad (A_1^{III} A_2^{III} A_3^{III})_3 = (b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III})_3$$

oldalai egymást a

$$(c_1^{II} b_1^{III})_3 = (1\ 4, 2\ 3)_3, \quad (c_2^{II} b_2^{III})_3 = (1\ 6, 2\ 5)_3, \quad (c_3^{II} b_3^{III})_3 = (3\ 6, 4\ 5)_3$$

pontokban metszik; ezek egy p_4^I egyenesen fekszenek, mely a p_3^I egyenestől különbözik, mert p_3^I -en a

$$(p^I a_1^{IV})_3 = (1\ 4, 2\ 3)'_3, \quad (p^I a_2^{IV})_3 = (1\ 6, 2\ 5)'_3, \quad (p^I a_3^{IV})_3 = (3\ 6, 4\ 5)'_3$$

pontok fekszenek.

A kilenczven $G_{3,4}$ pont mindegyikén két v_3 és két v_4 egyenes megy keresztül, mert az

$$(A_2^{II} A_3^{II} P^{II})_3 = (c_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II})_3, \quad (A_2^{III} A_3^{III} P^{III})_3 = (b_1^{III} \gamma_1^{III} \gamma_3^{III})_3$$

perspektívás háromszögek collineatio-tengelye a_{14}^{IV} , a p_4^I egyenessel együtt a $(c_1^{II} b_1^{III})_3 = (1\ 4, 2\ 3)_3$ ponton megy keresztül, holott a

$$\left. \begin{aligned} (C_1^I A_2^I A_3^I)_3 &= (p^I b_3^I b_2^I) \\ (C_1^{IV} A_2^{IV} A_3^{IV})_3 &= (a_1^{IV} \gamma_2^{IV} \gamma_3^{IV})_3 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} (B_1^I A_2^I A_3^I)_3 &= (p^I c_3^I c_2^I)_3 \\ (B_2^{IV} A_2^{IV} A_3^{IV})_3 &= (a_1^{IV} \beta_2^{IV} \beta_3^{IV})_3 \end{aligned} \right\}$$

perspektívás háromszögpároknak megfelelő oldalai egymást a $b_{14}^{III}, c_{14}^{II}$ egyeneseken fekvő

$$\begin{aligned} (p^I a_1^{IV})_3 &= (1\ 4, 2\ 3)'_3, & (b_3^I \gamma_2^{IV})_3 &= (4\ 6, 2\ 5)'_3, & (b_2^I \gamma_3^{IV})_3 &= (6\ 3, 1\ 5)'_3 \\ (p^I a_1^{IV})_3 &= (1\ 4, 2\ 3)'_3, & (c_3^I \beta_2^{IV})_3 &= (1\ 6, 3\ 5)_3, & (c_2^I \beta_3^{IV})_3 &= (2\ 6, 4\ 5)_3 \end{aligned}$$

pontokban metszik, úgy, hogy

$$(c_{13}^{II} b_{13}^{III} p_4^I a_{14}^{IV}) = (1\ 4, 2\ 3)_3, \quad (c_{14}^{II} b_{14}^{III} p_3^I a_{13}^{IV}) = (1\ 4, 2\ 3)'_3.$$

Hasonló úton, mint a v_2 egyenesekre nézve, itt is kimutatható, hogy a hatvan v_4 egyenes hármásával a húsz STEINER-ponton megy keresztül.

Minthogy a $p_3^I p_4^I \pi p^I$ egyenesek az $(14, 23)_3, (14, 23)'_3$
 Σ^V, Σ^{VI} $(14, 23)$ harmonicus pontokat a P -pontból projiciálják:
 $(p_3^I p_4^I \pi p^I) = -1$.

A hatvan v_4 egyenes egymást hármásával a hatvan V_4 pontban és a húsz CAYLEY-pontban metszi; és épen úgy, mint a hatvan v_1, v_2, v_3 egyenes, hat DESARGUES-configurációra oszlanak.

Ugyanis az

$$(A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI})_3, (12, 34)_3 (56, 12)_3 (34, 56)_3 =$$

$$(\alpha_2^{VI} \alpha_3^V)_3 (\alpha_3^{IV} \alpha_1^{VI})_3 (\alpha_1^V \alpha_2^{IV})_3, A_1 A_2 A_3$$

háromszögek, mert oldalaik az $|Y_{56} Y_{34} Y_{12}|$ egyenes Y_{56}, Y_{34}, Y_{12} pontjain mennek keresztül, perspectivásak; a collineatio-középpontok a p -egyenesen fekszenek. Ebből pedig az következik, hogy az

$$A_1 (12, 34)_3 = \alpha_{14}^I, A_2 (56, 12)_3 = \alpha_{24}^I, A_3 (34, 56)_3 = \alpha_{34}^I$$

egyenesek egymást egy P_4^I pontban, és, hasonló úton kimutathatólag, a

$$B_1 (36, 52)_3 = \beta_{14}^{II}, B_2 (14, 36)_3 = \beta_{24}^{II}, B_3 (52, 14)_3 = \beta_{34}^{II}$$

$$\Gamma_1 (54, 16)_3 = \gamma_{14}^{III}, \Gamma_2 (32, 56)_3 = \gamma_{24}^{III}, \Gamma_3 (16, 32)_3 = \gamma_{34}^{III}$$

egyenesek egymást egy P_4^{II}, P_4^{III} pontban metszik, mely utóbbiak a P_4^I ponttal együtt a p -egyenesen fekszenek.

Minthogy $(\alpha_{13}^I \alpha_{14}^I a_1 \alpha_1^I) = -1$, azért a sugarak metszőpontjaira nézve p -vel $(P_3^I P_4^I \Sigma^{II, III} P^I) = -1$; és hasonló oknál fogva

$$(A_{13}^{IV} A_{14}^{IV} \Sigma^{II, III} A_1^{IV}) = (B_{13}^{III} B_{14}^{III} \Sigma^{I, IV} B_1^{III}) =$$

$$(C_{13}^{II} C_{14}^{II} \Sigma^{I, IV} C_1^{II}) = -1.$$

De a

$$|P^I A_1^{IV}| = g_{01}, |P^I A_1^{IV}|_3 = g_{23}, |B_1^{III} C_1^{II}| = g'_{01}, |B_1^{III} C_1^{II}|_3 = g'_{23}$$

egyenesek az Y'_{56} pontban metszik egymást, s így a

$$|P^I A_1^{IV}|_4 = g_{45}, |B_1^{III} C_1^{II}|_4 = g'_{45}$$

egyenesek is keresztül mennek az Y'_{56} ponton.

A két utóbbi g_{45}, g'_{45} egyenes azonban nem esik egybe.

Tudjuk ugyanis, hogy a P_3^I pont a $[\Sigma^{II, III} P^I]$ vonaldarabon kívül fekszik; tehát a $(P_3^I P_4^I \Sigma^{II, III} P^I) = -1$ relatio következtében, P_4^I a $[\Sigma^{II, III} P^I]$ vonaldarabon fekszik és a ${}_0P^I$ ponttal nem esik egybe. Ennélfogva $(P_2^I P_3^I \Pi P_4^I)$ nem harmonicus négyes. (Értéke = 56.) A

$$(P_2^I P_3^I \Pi P_4^I) \bar{\wedge} (B_{12}^{III} B_{13}^{III} B_1 B_{14}^{III})$$

helyzeti viszonylat következtében

$$Y'_{56} (| P^I A_1^{IV} |_2 \quad | P^I A_1^{IV} |_3 \quad | \Pi A_1 | \quad | P^I A_1^{IV} |_4) \bar{\wedge} \\ Y'_{56} (| B_1^{III} C_1^{II} |_2 \quad | B_1^{III} C_1^{II} |_3 \quad | B_1 \Gamma_1 | \quad | B_1^{III} C_1^{II} |_4),$$

s mert

$$| P^I A_1^{IV} |_2 \equiv | B_1^{III} C_1^{III} |_3, \quad | P^I A_1^{IV} | \equiv | B_1^{III} C_1^{II} |_2, \quad | \Pi A_1 | \equiv | B_1 \Gamma_1 |,$$

a $| P^I A_1^{IV} |_3$, $| P^I A_1^{IV} |_3$, kapcsolt sugárpár, valamint, a $| \Pi A_1 B_1 \Gamma_1 |$ kettős sugárból meghatározott involutióban, a $| P^I A_1^{IV} |_4$, $| B_1^{III} C_1^{II} |_4$ is kapcsolt sugárpár lesz. Ez utóbbiak azonban nem egyesülhetnek, mert $(P_2^I P_3^I \Pi P_4^I)$ nem harmonicus négyes, azaz a $P_2^I P_3^I$ pontpár a ΠP_4^I pontpártól nincsen harmonicusan elválasztva.

Ennélfogva mondhatjuk: A hatvan V_4 pont párosával kilenczven g_{45} egyenesen fekszik, melyek viszont párosával (g_{45} , g'_{45}) az Y -pontokon mennek keresztül.

Ugyanazon az Y -ponton keresztül menő g_{01} g'_{01} , g_{23} g'_{23} , g_{45} g'_{45} egyenesek involutiót képeznek, melynek kettős sugarai σ , σg .

76. Az $A_1 A_2 A_3$, $P A_2 A_3$ pontokon keresztül menő v_4 egyenesek következő perspektívás háromszögpároknak oldalai

$$(a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II})_4 = (C_1^{II} C_2^{II} C_3^{II})_4, \quad (a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III})_4 = (B_1^{III} B_2^{III} B_3^{III})_4; \\ (p^{II} a_2^{II} a_3^{II})_4 = (C_1 B_2^{II} B_3^{II})_4, \quad (p^{III} a_2^{III} a_3^{III})_4 = (B_1^{III} \Gamma_1^{III} \Gamma_3^{III})_4;$$

ezeknek megfelelő szögpontjai a

$$| C_1^{II} B_1^{III} |_4 \quad | C_2^{II} B_1^{III} |_4 \quad | C_3^{II} B_3^{III} |_4; \\ | C_1^{II} B_1^{III} |_4 \quad | B_2^{II} \Gamma_2^{III} |_4 \quad | B_3^{II} \Gamma_3^{III} |_4$$

g_{45} egyeneseken fekszenek, melyek egymást a P_5^I , illetve A_{15}^{IV} pontokban metszik. Ez utóbbi pontok azonban különböznek a $| P_4^I, A_{14}^{IV} |$ pontoktól, melyek nem fekszenek a $| B_1^{III} C_1^{II} |_4$ egyenesen.

A hatvan v_4 egyenes hatvan perspektívás háromszögpárt nyújt; a hozzájuk tartozó hatvan V_5 collineatio-középpont párosával a kilenczven g_{45} egyenesen fekszik.

Tekintettel arra, hogy az egymásra következő $(a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II})_4$, $(a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III})_4$, $(b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III})_4$, $(c_1^{III} c_2^{III} c_3^{III})_4$ háromszögpárok a P_5^I , P_4^{III} , $\Sigma^{II, III}$, P_4^{II} collineatio-középpontokra és a $\sigma^{II, III}$, p_4^{III} , p_3^I , p_4^{II} collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspektívások és ez

utóbbi egyenesek a P-ponton mennek keresztül, következésképpen, hogy a P_5^I pont a $p \equiv \Sigma^{II, III} P_4^{II} P_4^{III}$ CAYLEY-egyenesen fekszik.

Minden CAYLEY-egyenesen három V_5 pont van; így pl. a p CAYLEY-egyenesen a $P_5^I, P_5^{II}, P_5^{III}$, mely utóbbiak a $(b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III})_4, (b_1^I b_2^I b_3^I)_4; (c_1^I c_2^I c_3^I)_4, (c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II})_4$ perspectivás háromszögpárok-nak collineatio-középpontjai.

Mintfogya

$$a \quad (\Sigma^{II, III} P_1^I P_2^I \dots P_5^I) \wedge (\Sigma^{II, III} A_{11}^{IV} A_{12}^{IV} \dots A_{15}^{IV})$$

$$| P^I A_1^{IV} |, \quad | P^I A_1^{IV} |_1, \quad | P^I A_1^{IV} |_2 \dots | P^I A_1^{IV} |_5$$

egyenesek az Y_{56} ponton mennek keresztül.

A p CAYLEY-egyenes a

$$| B_1^{III} C_1^{II} |_2, \quad | B_1^{III} C_1^{II} |_3, \quad | B_1^{III} C_1^{II} |_4, \quad | \Pi A_1 B_1 \Gamma_1 |$$

egyeneseket a $P_3^I P_2^I P_5^I \Pi$ pontokban metszván,

$$(P_2^I P_3^I \Pi P_4^I) \wedge (P_3^I P_2^I \Pi P_5^I),$$

s így a P_5^I pont ebből, vagy pedig a $(P_4^I P_5^I \Pi o^{PI}) = -1$ relatióból is szerkeszthető.

A hatvan V_5 pont hármásával hatvan v_5 egyenesen fekszik, melyek viszont hármásával a húsz STEINER-ponton mennek keresztül. E hatvan v_5 egyenes egymást párosával a negyvenöt y -egyenesen fekvő negyvenöt G_{56}, G'_{56} pontpárban metszi, úgy, hogy e pontokból minden v_5 egyenesen három van. Így az

$$\alpha_{15}^V = | A_1 A_{25}^V B_{35}^V \Gamma_{35}^V |, \quad \alpha_{23}^{IV} = | A_2 A_{15}^{IV} B_{35}^{IV} \Gamma_{35}^{IV} |;$$

$$\pi_5^{VI} = | \Pi A_{35}^{VI} B_{35}^{VI} C_{35}^{VI} |, \quad \alpha_{35}^I = | A_3 P_5^I B_{35}^I C_{35}^I |$$

v_5 egyenespárok egymást az Y''_{12} egyenesen fekvő

$$(\alpha_1^V \alpha_2^{IV})_5 = (3\ 4, 5\ 6)_5, \quad (\pi^{VI} \alpha_3^I)_5 = (3\ 4, 5\ 6)'_5$$

(G_{56}, G'_{56}) pontpárookban metszik; az $Y''_{12}, Y''_{36}, Y''_{54}$ egyeneseken fekvő

$$(\pi^{VI} \alpha_3^I)_5 = (3\ 4, 5\ 6)'_5, \quad (\pi^{VI} \beta_3^I)_5 = (1\ 4, 2\ 5)'_5, \quad (\pi^{VI} \gamma_3^I)_5 = (1\ 6, 3\ 2)'_5$$

pontokat pedig a π_5^{VI} egyenes tartalmazza. A

$$(A_{23}^V A_{23}^V A_{24}^V A_{25}^V) \wedge (A_{32}^{VI} A_{33}^{VI} A_{34}^{VI} A_{35}^{VI}),$$

projectiós négyeseket az A_1 , illetve Π -pontból projectiál

$$(\alpha_{12}^V \alpha_{13}^V \alpha_{14}^V \alpha_{15}^V) \wedge (\pi_2^{VI} \pi_3^{VI} \pi_4^{VI} \pi_5^{VI})$$

sugarak metszései az Y''_{12} egyenessel

$$((34, 56)'_1 (34, 56)_3 (34, 56)'_3 (34, 56)_4) \wedge$$

$$((34, 56)_1 (34, 56)'_3 (34, 56)_3 (34, 56)'_5),$$

és általánosan

$$(G'_{12} G_{34} G'_{34} G_{54}) \wedge (G_{12} G'_{34} G_{34} G'_{56}).$$

Ez utóbbi helyzeti viszonylatból pedig az következik, hogy a $G_{12} G'_{12}, G_{34} G'_{34}, G_{56} G'_{56}$ pontpárok involutiót képeznek, s mert a Σ, G -pontok az első két pontpártól meghatározott involutióknak ket-tőspontjai, azért $(G_{56} G'_{56} \Sigma G) = -1$.

A kilenczven G_{56} pontról végre megjegyezzük még, hogy párosával a negyvenöt Y -ponttal együtt 180 l_{56} egyenesen fekszenek, úgy, hogy minden G_{56} ponton négy l_{56} egyenes megy keresztül. Ugyanígy a negyvenöt y -egyenes mindegyikén a kilenczven g_{45} egyenes közül négy pár metszi egymást 180 L_{45} pontban, úgy, hogy minden g_{45} egyenesen négy L_{45} pont van.

77. A kilenczven G_{56} pont még hármasával hatvan v_6 egyenesen fekszik, úgy, hogy minden G_{56} ponton két v_5 és v_6 egyenes megy keresztül. E v_6 egyenesek egymást hármasával a húsz STEINER-pontban és más hatvan V_6 pontban metszik, mely utóbbiak szintén hármasával a húsz CAYLEY-egyenesen és párosával kilenczven g_{67} egyenesen, vagy negyvenöt $g_{67} g'_{67}$ egyenespáron fekszenek. Ezek az egyenespárok a negyvenöt G -ponton mennek keresztül és kapcsolt sugarai a $g_{01} g'_{01}, g_{23} g'_{23}, g_{56} g'_{56}$ sugárpároktól képezett involutióknak.

Minthogy a $p_5^I p_6^I \pi^I$ sugarak P -ből az $(14, 23)_5, (14, 23)'_5, \Sigma^V, VI, (14, 23)$ harmonicus pontokat projiciálják, $(p_5^I p_6^I \pi^I) = -1$.

Ha P_6^I az előbbi P_1^I pontokhoz rendelt V_6 pont, akkor P_6^I a $(P_5^I P_6^I \Sigma^{II, III} P^I) = -1$ relatióból is meg van határozva és a $[\Sigma^{II, III} P^I]$ vonaldarabon fekszik, mert P_5^I a $[\Pi_0 P^I]$ vonaldarabon van.

A hatvan v_6 egyenes hatvan perspectivás háromszögpárnak oldala, valamint a hatvan V_6 pont azoknak szögpontja; a hatvan V_7 collineatio-középpont párosával kilenczven g_{67} egyenesen, vagy, a mi ugyanazt fejezi ki, negyvenöt $g_{67} g'_{67}$ egyenespáron fekszik. Ha P_7^I az előbbi P_1^I pontokhoz rendelt V_7 pont, akkor ez vagy a

$$(P_4^I P_5^I \Pi P_6^I) \wedge (P_5^I P_4^I \Pi P_7^I),$$

vagy a $(P_6^I P_7^I \Pi_0^{PI}) = -1$ viszonylatból szerkeszthető és a $[\Pi_0^{PI}]$ vonaldarabon fekszik.

A hatvan V_7 pont hatvan v_7 egyenest, ezek megint a negyvenöt g -egyenesen fekvő negyvenöt $G_{78} G'_{78}$ pontpárt, melyekre nézve $(G_{78} G'_{78} \Sigma G) = -1$, és hatvan v_8 egyenest szolgáltatnak.

A v_8 egyenesek V_8 pontokhoz, ezek pedig $g_{89} g'_{89}$ egyenespárokhoz vezetnek, melyek a $g_{01} g'_{01}, g_{23} g'_{23}, \dots$ involútiós sornak kapcsolt sugarai, és így tovább.

16. Az ${}_iV$ pontokról és ${}_i v$ egyenesekről.

78. Hasonló úton, mint a hogy a V_i pontokat és v_i egyeneseket a V_1 pontokból és a v_1 egyenesekből származtattuk, a ${}_iV$ pontokból és ${}_i v$ egyenesekből új ${}_iV$ pontok és ${}_i v$ egyenesek nyerhetők. Ezek új ${}_i[V_i v_i] = {}_i[Vv]$ configurációkat fognak adni, melyek a STEINER-pontok és CAYLEY-egyenesek irányában ugyanúgy viselkednek, mint a már ismert $[Vv]_i$ configurációk.

A 63. pontban egy tételre jutottunk, mely szerint a hatvan ${}_iV$ pont párosával kilenczven ${}_{12}g$ egyenesben fekszik, úgy, hogy mindegyik ${}_iV$ pontból három ${}_{12}g$ egyenes sugárzik ki.

E kilenczven ${}_{12}g$ egyenes egymást hármasával még más hatvan ${}_2V$ pontban metszi, melyek szintén párosával fekszenek a ${}_{12}g$ egyeneseken.

Ugyanis az

$$\left. \begin{aligned} {}_1(a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II}) = {}_1(C_1^{II} C_2^{II} C_3^{II}) & \left\{ \begin{aligned} {}_1(p^{II} a_2^{II} a_3^{II}) = {}_1(C_1^{II} B_2^{II} B_3^{II}) \\ {}_1(a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III}) = {}_1(B_1^{III} B_2^{III} B_3^{III}) \end{aligned} \right\} \\ {}_1(p^{III} a_2^{III} a_3^{III}) = {}_1(B_1^{III} \Gamma_2^{III} \Gamma_3^{III}) & \end{aligned} \right\}$$

háromszögpárok oldalai, melyek ${}_{12}g$ egyenesek, a $\sigma^{II, III}$ egyenesen fekvő $A_1 A_2 A_3, P A_2 A_3$ pontokon mennek keresztül, s ezért a három ${}_1 | B_1^{III} C_1^{II} |, {}_1 | \Gamma_2^{III} B_2^{II} |, {}_1 | \Gamma_3^{III} B_3^{II} |$ egyenes egymást egy ${}_2A_1^{IV}$ pontban metszi, mely metszőpontok a ${}_1 P^I A_1^{IV}$ pontoktól különböznek, mert a ${}_1 | B_1^{III} C_1^{II} |, {}_1 | P^I A_1^{IV} |$ egyenespár a ${}_0 | P^I A_1^{IV} B_1^{III} C_1^{II} |$ $|\Pi A_1 B_1 \Gamma_1|$ egyenespárt harmonicusan választja el.

A hatvan ${}_i v$ egyenesből hatvan oly perspectivás háromszögpár alakítható, mint az előbbieket, és így hatvan ${}_2V$ collineatio-középpontot nyerünk, melyekben az ${}_{12}g$ egyenesek egymást hármasával

metszik, úgy, hogy minden ${}_{12}g$ egyenesen két ${}_1V$ és ${}_2V$ pont fekszik.

Mínt hogy a

$$\begin{aligned} {}_1(a_1^{\text{II}} a_2^{\text{II}} a_3^{\text{II}}) &= {}_1(C_1^{\text{II}} C_2^{\text{II}} C_3^{\text{II}}), & {}_1(a_1^{\text{III}} a_2^{\text{III}} a_3^{\text{III}}) &= {}_1(B_1^{\text{III}} B_2^{\text{III}} B_3^{\text{III}}), \\ {}_1(b_1^{\text{III}} b_2^{\text{III}} b_3^{\text{III}}) &= {}_1(A_1^{\text{III}} A_2^{\text{III}} A_3^{\text{III}}), & {}_1(c_1^{\text{II}} c_2^{\text{II}} c_3^{\text{II}}) &= {}_1(A_1^{\text{II}} A_2^{\text{II}} A_3^{\text{II}}) \end{aligned}$$

háromszögek közül

$$\begin{aligned} \text{az 1-ső a 2-dikkel } & \sigma^{\text{II}}, \text{ III}, {}_2P^{\text{I}}; & \text{a 2-dik a 3-dikkel } & {}_1P^{\text{III}}, {}_1P^{\text{III}}; \\ \text{a 3-dik a 4-dikkel } & {}_0P^{\text{III}}, \Sigma^{\text{II}}, \text{ III}; & \text{a 4-dik az 1-sővel } & {}_1P^{\text{II}}, {}_1P^{\text{II}} \end{aligned}$$

collineatio-tengelyre, illetőleg középpontra perspectivás és a tengelyek a P-ponton mennek keresztül; a ${}_2P^{\text{I}}$ pont a p-egyenesen fekszik. Mínt hogy továbbá a

$${}_{12}g = | {}_1P^{\text{I}} {}_1A_1^{\text{IV}} {}_2B_1^{\text{III}} {}_2C_1^{\text{II}} |, \quad {}_{12}g' = | {}_1B_1^{\text{III}} {}_1C_1^{\text{II}} {}_2P^{\text{I}} {}_2A_1^{\text{IV}} |$$

egyenesek a $|\Pi \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \Gamma_1|$, ${}_0|P^{\text{I}} A_1^{\text{IV}} B_1^{\text{III}} C_1^{\text{II}}|$ egyeneseket harmonicusan választják el, $({}_1P^{\text{I}} {}_2P^{\text{I}} \Pi {}_0P^{\text{I}}) = -1$.

A hatvan V_2 pont hármásával hatvan ${}_2v$ egyenesen fekszik, melyek szintén hármásával a húsz STEINER-ponton mennek keresztül.

Ugyanis az

$$\begin{aligned} {}_1(A_1^{\text{IV}} A_2^{\text{V}} A_3^{\text{VI}}) &= {}_2(B_1^{\text{II}} \Gamma_1^{\text{III}} \quad B_2^{\text{II}} \Gamma_2^{\text{III}} \quad B_3^{\text{II}} \Gamma_3^{\text{III}}), \\ {}_1(C_1^{\text{IV}} C_2^{\text{V}} C_3^{\text{VI}}) &= {}_2(A_1^{\text{I}} B_1^{\text{II}} \quad A_2^{\text{I}} B_2^{\text{II}} \quad A_3^{\text{I}} B_3^{\text{II}}) \end{aligned}$$

háromszögek, mert a

$${}_1\pi^{\text{IV}} = | {}_1A_1^{\text{IV}} {}_1B_1^{\text{IV}} {}_1C_1^{\text{IV}} |, \quad {}_1\pi^{\text{V}} = | {}_1A_2^{\text{V}} {}_1B_2^{\text{V}} {}_1C_2^{\text{V}} |, \quad {}_1\pi^{\text{VI}} = | {}_1A_3^{\text{VI}} {}_1B_3^{\text{VI}} {}_1C_3^{\text{VI}} |$$

egyenesek a II-ponton mennek keresztül, perspectivásak; ezért a megfelelő oldalak metszőpontjai a ${}_2p^{\text{II}} = {}_2|B_1^{\text{II}} B_2^{\text{II}} B_3^{\text{II}}|$ egyenesen fekszenek.

Mínt hogy továbbá a $\Sigma^{\text{II}}, \text{ III}$ középpontra perspectivás

$${}_0(A_1^{\text{IV}} A_2^{\text{V}} A_3^{\text{VI}}), \quad {}_1(A_1^{\text{IV}} A_2^{\text{V}} A_3^{\text{VI}}), \quad \beta_1 \beta_2 \beta_3$$

háromszögek közül az 1-ső a 2-dikkel, a 3-dik az 1-sővel és a 2-dikkel az $|Y_{56} Y_{34} Y_{12}|$, ${}_0p^{\text{II}} = {}_0|B_1^{\text{II}} B_2^{\text{II}} B_3^{\text{II}}|$, ${}_2p^{\text{II}} = {}_2|B_1^{\text{II}} B_2^{\text{II}} B_3^{\text{II}}|$ collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectivás: a ${}_2p^{\text{II}}$ egyenes a $P = (|Y_{56} Y_{34} Y_{12}|, {}_0p^{\text{II}})$ ponton megy keresztül.

*A hatvan v_2 egyenes egymást párosával az y-egyeneseken fekvő kilenczven ${}_{23}G, {}_{23}G'$ pontban metszi, melyek minden y-egyenesen a Σ - és G-pontokat harmonicusan választják el. E kilenczven

${}_{23}G, {}_{23}G'$ pont párosával az Y -pontokkal együtt 180 ${}_{23}l$ egyenesen fekszik, úgy, hogy minden Y -ponton és minden ${}_{23}G$ ponton négy ${}_{23}l$ egyenes megy keresztül.

Ugyanis az Y_{12}, y''_{12} és Y'_{12}, y''_{12} átlóspontja és átlója az

$$A_1 A_2 {}_2A_1^{IV} {}_2A_2^V \quad \text{II} \quad A_3 {}_2P^I {}_2A_3^{VI}$$

négyszögeknek, tehát

az $A_1 {}_2A_2^V = {}_2\alpha_1, A_2 {}_2A_1^{IV} = {}_2\alpha_2^{IV}$ egyenesek egymást a ${}_3(\alpha_1^V \alpha_2^{IV}) = {}_3(34, 56) = {}_{23}G$ pontban;

a $\text{II} {}_2A_3^{VI} = {}_2\pi^{VI}, A_3 {}_2P^I = {}_2\alpha_3^I$ egyenesek egymást a ${}_3(\pi^{VI} \alpha_3^I) = {}_3(34, 56) = {}_{23}G'$ pontban

metszik, melyek az y''_{12} egyenesen fekszenek.

Továbbá az

$$(A_2^V {}_0A_2^V {}_1A_2^V {}_2A_2^V) \wedge (A_3^{VI} {}_0A_3^{VI} {}_1A_3^{VI} {}_2A_3^{VI})$$

négyeseket az A_1, II -pontokból projiciáló

$$(\alpha_1^V {}_0\alpha_1^V {}_1\alpha_1^V {}_2\alpha_1^V) \wedge (\pi^{VI} {}_0\pi^{VI} {}_1\pi^{VI} {}_2\pi^{VI})$$

sugarak metszéspontjai y''_{12} -vel

$$(G {}_{01}G {}_{01}G' {}_{23}G) \wedge (G {}_{01}G' {}_{01}G {}_{23}G');$$

s mert $({}_{01}G {}_{01}G' \Sigma G) = -1$, azért $({}_{23}G {}_{23}G' \Sigma G) = -1$.

Végre a tétel utolsó része hasonló úton bizonyítható be, mint a 65. pontban levő tétel, csak fel kell az elől álló »o« mutatókat ${}_{23}l$ -vel cserélni.

*A kilenczven ${}_{23}G$ pont hármásával még más hatvan ${}_3v$ egyenesen is fekszik, úgy, hogy mindegyik ${}_{23}G$ ponton két ${}_2v$ és két ${}_3v$ egyenes megy keresztül. E ${}_3v$ egyenesek hármásával keresztül mennek a STEINER-pontokon.

Igy pl. a ${}_{23}G = {}_3(\alpha_1^V \alpha_2^{IV}) = {}_3(34, 56)$ ponton még a ${}_3\pi^{VI}, {}_3\alpha_3^I$; a ${}_{23}G' = {}_3(\pi^{VI} \alpha_3^I) = {}_3(34, 56)$ ponton még a ${}_3\alpha_1^V, {}_3\alpha_2^{IV}$ egyenesek is keresztül mennek és, mert $({}_{23}G {}_{23}G' \Sigma G) = -1$, azért $({}_2\alpha_1^V \alpha_1^V {}_1\alpha_1^V) = -1$, és hasonlóképp $({}_2P^I {}_3P^I \pi P^I) = -1$.

*A hatvan ${}_3v$ egyenes egymást hármásával hatvan ${}_3V$ pontban metszi, melyek hármásával a CAYLEY-egyeneseken fekszenek. E ${}_3V$ pontok párosával kilenczven ${}_{34}g, {}_{34}g'$ egyenesen fekszenek, melyek párosával az Y -pontokon és hármásával a ${}_3V$ pontokon mennek keresztül; az egyes Y -pontokban a $\sigma, \sigma g$ egyeneseket pedig harmonicusan választják el.

A hatvan ${}_3V$ egyenes és azoknak hatvan ${}_3V$ metszőpontja oly ${}_3[Vv]$ konfigurációt képez, mint a ${}_2[Vv]$.

A $({}_2\alpha_1^V {}_3\alpha_1 \alpha_1 \alpha_1^V) = -1$ egyenletből következik, mert ${}_3P^I \equiv (p {}_3\alpha_1^V)$, hogy $({}_2P^I {}_3P^I \Sigma^{II, III} P^I) = -1$.

A kilenczven ${}_{34}g, {}_{34}g'$ egyenes egymást hármásával még hatvan ${}_4V$ pontban is metszi, úgy, hogy minden ${}_{34}g$ egyenesen két ${}_3V$ és két ${}_4V$ pont fekszik. Ezek az új ${}_4V$ metszőpontok hármásával más rendben még a húsz CAYLEY-egyenesen is fekszenek. Így

${}_{34}g = {}_3 | A_1^V A_2^{IV} | \equiv {}_4 | \Pi^{VI} A_3^I |$, ${}_{34}g' = {}_3 | \Pi^{VI} A_3^I | \equiv {}_4 | A_1^V A_2^{IV} |$
s mert $({}_{34}g {}_{34}g' \sigma \circ g) = -1$, azért $({}_3A_1^V {}_4A_1^V A_1 \circ A_1^V)$ is $= -1$, s hasonlóképp $({}_3P^I {}_4P^I \Pi \circ P^I) = -1$.

A hatvan ${}_4V$ pont hármásával hatvan ${}_4v$ egyenesen fekszik, melyek ugyancsak hármásával a STEINER-pontokon mennek keresztül. A hatvan ${}_4v$ egyenes a ${}_3[Vv]$ -vel analogus ${}_4[Vv]$ konfigurációt képez.

A P STEINER-ponton keresztül menő ${}_4p^I$ egyenesre áll, hogy

$$({}_3p^I {}_4p^I \sigma^{II, III} \circ p^I) = -1, \text{ stb.}$$

17. Általános tételek a Pascal-hatszöggel kapcsolatos konfigurációkról.

79. Eddigi fejtegetéseink eredményét a következő tételbe foglalhatjuk össze:

Ha a PASCAL-hatszög képezte konfigurációban

v_0 a hatvan PASCAL-egyenes,

V_0 a hatvan KIRKMAN-pont,

S a húsz STEINER-pont,

s a húsz CAYLEY-egyenes,

σ a tizenöt STEINER-egyenes,

Σ a tizenöt SALMON-pont

egyikét jelenti, akkor minden s-egyenesen három V_0 - és három Σ -pont bizonyos módon egymáshoz van rendelve, és minden S-ponton három v_0 -egyenes és három σ -egyenes megy keresztül, melyek ugyanazon módon vannak egymáshoz rendelve.

(Így a p CAYLEY-egyenesen: a $P^I, \Sigma^{II, III}; P^{II}, \Sigma^{III, I}; P^{III}, \Sigma^I, II$ KIRKMAN- és SALMON-pontok; a P STEINER-ponton keresztül menő egyenesek közül a $p^I, \sigma^{II, III}; p^{II}, \sigma^{III, I}; p^{III}, \sigma^I, II$ PASCAL- és STEINER-egyenesek vannak egymáshoz rendelve.)

Ha a tizenöt s egyenesen a hatvan ${}_0V, V_1, V_2 \dots V_i, \dots, V_{15}, V_2, V_3 \dots V \dots$ pontot a következő egyenletekből (64)

$$({}_0V \Sigma V_0) = \frac{1}{3}$$

$$({}_0V_1 S_0V) = -1, \quad (V_1 V_2 \Sigma V_0) = -1$$

$$({}_{2i}V_{2i+1} S_0V) = -1, \quad (V_{2i+1} V_{2i+2} \Sigma V_0) = -1$$

$$({}_1V_2 V S_0V) = -1, \quad ({}_0V_1 V \Sigma V_0) = -1$$

$$({}_{2i+1}V_{2i+2} V S_0V) = -1, \quad ({}_{2i+2}V_{2i+3} V \Sigma V_0) = -1$$

meghatározzuk, akkor a $V_0 V_1, V_2 V_3, \dots, V_{15} V_{16}, V_2 V_3, V_4 V_5, \dots$ pontpárok egy involutiós sort képeznek, melynek kettőspontjai $S, {}_0V$, és a $V_1 V_2, V_3 V_4, \dots, {}_0V_1 V_2, V_3 V_4, \dots$ pontpárok egy másik involutiós sort képeznek, melynek kettőspontjai Σ, V_0 . Az a $V_\infty \infty V$ pontpár, mely az $S, {}_0V, \Sigma V_0$ pontpárokat harmonicusan elválasztja, az első és második involutiós pontsornak kapcsolt pontpárja; e pontpárhoz közelednek, a végtelenig nagyobbodó i -vel, az első és második involutiós sornak $V_{2i} V_{2i+1}$, illetve ${}_{2i+1}V_{2i+2} V$ kapcsolt pontpárjai.

A hatvan V_i pont mindegyikében a hatvan v_i egyenes közül három-három metszi egymást, és minden v_i egyenesen, három-három V_i pont fekszik. A hatvan

Ha a tizenöt S -ponton keresztül menő hatvan ${}_0v, {}_1v, {}_2v, \dots, v_i, \dots, {}_{15}v, {}_2v, {}_3v, \dots, {}_i v, \dots$ egyenest a következő egyenletekből

$$({}_0v \sigma v_0) = \frac{1}{3}$$

$$({}_0v_1 S_0v) = -1, \quad (v_1 v_2 \sigma v_0) = -1$$

$$({}_{2i}v_{2i+1} S_0v) = -1, \quad (v_{2i+1} v_{2i+2} \sigma v_0) = -1$$

$$({}_1v_2 v S_0v) = -1, \quad ({}_0v_1 v \sigma v_0) = -1$$

$$({}_{2i+1}v_{2i+2} v S_0v) = -1, \quad ({}_{2i+2}v_{2i+3} v \sigma v_0) = -1$$

meghatározzuk, akkor a $v_0 v_1, v_2 v_3, \dots, v_{15} v_{16}, v_2 v_3, v_4 v_5, \dots$ sugárpárok egy involutiós sort képeznek, melynek kettőssugarai $S, {}_0v$, és a $v_1 v_2, v_3 v_4, \dots, {}_0v_1 v_2, v_3 v_4, \dots$ sugárpárok egy másik involutiós sort képeznek, melynek kettőssugarai σ és v_0 . Az a $v_\infty \infty v$ sugárpár, mely az $s, {}_0v, \sigma v_0$ sugárpárokat harmonicusan elválasztja, az első és második involutiós sugársornak kapcsolt sugárpárja; e sugárpárhoz közelednek, a végtelenig nagyobbodó i -vel, az első és második involutiós sornak $v_{2i} v_{2i+1}$, illetve ${}_{2i+1}v_{2i+2} v$ kapcsolt sugárpárjai.

A hatvan v_i egyenes mindegyikében a hatvan v_i pont közül három-három fekszik, és az v_i pont mindegyikében három-három v_i egyenes metszi egymást.

V_i pont és a hatvan v_i egyenes egy $[Vv]_i$ configuratiót képez, mely 6 DESARGUES-configurációra ($10_3, 10_3$) oszlik.

A hatvan V_i pont és a hatvan v_i egyenes hatvan perspectivás háromszögpárnak collineatio-középpontja és tengelye; e háromszögpároknak oldalai és szögpontjai a $[Vv]_i$ configurációnak egyenesei és pontjai.

Ezenkívül minden v_{2i} egyenes collineatio-tengelye és egy Σ pont collineatio-középpontja egy perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $[Vv]_{2i-1}$ configurációhoz tartoznak; és minden V_{2i+1} pont collineatio-középpontja és egy σ egyenes collineatio-tengelye egy perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $[Vv]_{2i}$ configurációhoz tartoznak.

Ha $i=0$, akkor minden v_0 egyenes collineatio-tengelye és egy Σ pont collineatio-középpontja egy perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $[Vv]_0$ configurációhoz tartoznak; ha pedig $i=\infty$, akkor v_∞ és egy bizonyos Σ , valamint egy σ és V_∞ collineatio-tengelye, illetve középpontja oly perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $[Vv]_\infty$ configurációhoz tartoznak.

A hatvan V_{2i} és V_{2i+1} pont páronként kilenczven $g_{2i, 2i+1}$

A hatvan v_i egyenes és a rajtuk fekvő hatvan iV pont egy $[Vv]_i$ configuratiót képez, mely hat DESARGUES-configurációra ($10_3, 10_3$) oszlik.

A hatvan v_i egyenes és hatvan iV pont hatvan perspectivás háromszögpárnak collineatio-tengelye és középpontja; e háromszögpároknak oldalai és szögpontjai az $[Vv]_i$ configuratio egyenesei és pontjai. Ezen kívül minden v_{2i} V pont collineatio-középpontja és egy σ -egyenes collineatio-tengelye egy perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai $a_{2i-1}[Vv]$ configurációhoz tartoznak; és minden v_{2i+1} egyenes collineatio-tengelye és egy Σ -pont collineatio-középpontja egy perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $a_{2i}[Vv]$ configurációhoz tartoznak.

Ha $i=0$, akkor minden v_0 V pont collineatio-középpontja és egy σ -egyenes collineatio-tengelye egy perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $a_0[Vv]$ configurációhoz tartoznak; ha pedig $i=\infty$, akkor v_∞ és egy bizonyos σ , valamint Σ és v_∞ collineatio-középpontja, illetve tengelye oly perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $[Vv]_\infty$ configurációhoz tartoznak.

egyenesen fekszik, még pedig akkép, hogy minden ily egyenesen két V_{2i} és két V_{2i+1} pont van. E kilenczven egyenes egymást párosával $(g_{2i, 2i+1} \ g'_{2i, 2i+1})$ negyvenöt, hármasával a σ -egyeneseken fekvő és *az i értékétől független Y-pontban metszi.*

A hatvan ${}_{2i+1}V$ és ${}_{2i+2}V$ pont páronként kilenczven ${}_{2i+1, 2i+2}g$ egyenesen fekszik, még pedig akkép, hogy minden ily egyenesen két ${}_{2i+1}V$ és két ${}_{2i+2}V$ pont van. E kilenczven egyenes egymást párosával $({}_{2i+1, 2i+2}g, {}_{2i+1, 2i+2}g')$ az előbbi negyvenöt Y-pontban metszi.

A hatvan ${}_0V$ pont *négyesével* ${}_0g$ egyenesen fekszik, melyek szintén az Y-pontokon mennek keresztül és tizenöt D-háromszögnek oldalai.

A hatvan V_∞ és hatvan ${}_\infty V$ pont hasonlóképpen kilenczven, páronként a Y-pontokon keresztül menő, $({}_\infty g_\infty, {}_\infty g'_\infty)$ egyenesen fekszik, még pedig minden ily egyenesen két V_∞ és két ${}_\infty V$ pont van.

Ugyanazon az Y-ponton keresztül menő egyenesekre nézve:

$$\begin{aligned} (g_{2i, 2i+1} \ g'_{2i, 2i+1} \ \sigma \ {}_0g) &= -1, \\ ({}_{2i+1, 2i+2}g \ {}_{2i+1, 2i+2}g' \ \sigma \ {}_0g) &= -1, \\ (g'_{2i, 2i+1} \ g_{2i+2, 2i+3} \ \Sigma \ g_{01}) &= -1, \\ ({}_{2i+1, 2i+2}g' \ {}_{2i+3, 2i+4}g \ \Sigma \ g_{01}) &= -1. \end{aligned}$$

A jobb oldalon álló tétel negy-

A hatvan ${}_{2i}v$ és ${}_{2i+1}v$ egyenes páronként kilenczven ${}_{2i, 2i+1}G$ ponton megy keresztül, még pedig akkép, hogy minden ily pontban két ${}_{2i}v$ és két ${}_{2i+1}v$ egyenes metszi egymást. A metszőpontok párosával $({}_{2i, 2i+1}G, {}_{2i, 2i+1}G')$ negyvenöt, hármasával a Σ -pontokon keresztül menő és *az i értékétől független y-egyenesen vannak.* A hatvan v_{2i+1} és v_{2i+2} egyenes egymást kilenczven $G_{2i+1, 2i+2}$ pontban metszi, még pedig akkép, hogy minden ily pontból két v_{2i+1} és két v_{2i+2} egyenes sugárzik ki. E kilenczven pont párosával $(G_{2i+1, 2i+2}, G'_{2i+1, 2i+2})$ az előbbi negyvenöt y-egyenesen fekszik.

A hatvan v_0 egyenes-négyesével negyvenöt G-pontban metszi egymást, melyek szintén az y-egyeneseken fekszenek és tizenöt Δ -háromszögnek szögpontjai.

A hatvan ${}_\infty v$ és hatvan ${}_\infty V$ egyenes egymást szintén kilenczven, páronként az y-egyeneseken fekvő, $({}_\infty G_\infty, {}_\infty G'_\infty)$ pontban metszi, még pedig minden ily pontból két v_∞ és két ${}_\infty v$ egyenes sugárzik ki.

Ugyanazon az y-egyenesen fekvő pontokra nézve:

$$\begin{aligned} ({}_{2i, 2i+1}G \ {}_{2i, 2i+1}G' \ \Sigma \ G) &= -1, \\ (G_{2i+1, 2i+2} \ G'_{2i+1, 2i+2} \ \Sigma \ G) &= -1, \\ ({}_{2i, 2i+1}G' \ {}_{2i+2, 2i+3}G \ \sigma \ {}_{01}G) &= -1, \\ (G'_{2i+1, 2i+2} \ G_{2i+3, 2i+4} \ \sigma \ {}_{01}G) &= -1. \end{aligned}$$

venőt y -egyenesén a kilenczven $g_{2i, 2i+1}$ egyenesből és a kilenczven $_{2i+1, 2i+2}g$ egyenesből négy-négy pár metszi egymást $L_{2i, 2i+1}$, illetve $_{2i+1, 2i+2}L$ pontokban. E pontoknak száma külön-külön 180, úgy, hogy minden $g_{2i, 2i+1}$ egyenesen négy $L_{2i, 2i+1}$, és minden $_{2i+1, 2i+2}g$ egyenesen négy $_{2i+1, 2i+2}L$ pont fekszik.

A negyvenöt og egyenes egymás hatáival a fenti tizenöt D -háromszög tizenöt szögpontjában metszi, melyekben az y -egyenesek is hármásával találkoznak; e pontok mindegyike tizenként incidens L -pontnak tekinthető.

A baloldalon álló tétel negyvenöt Y -pontjából négy-négy $_{2i, 2i+1}l$ és négy-négy $_{2i+1, 2i+2}l$ egyenes sugárzik ki, melyeken a $_{2i, 2i+1}G$ és a $_{2i+1, 2i+2}G$ pontokból négy-négy fekszik. Ezeknek az egyeneseknek száma 180, úgy, hogy minden $_{2i, 2i+1}G$ pontban négy $_{2i, 2i+1}l$ és minden $_{2i+1, 2i+2}G$ pontban négy $_{2i+1, 2i+2}l$ egyenes metszi egymást.

A negyvenöt G -pont hatáival a fenti tizenöt Δ -háromszög tizenöt oldalán fekszik, melyeken az Y -pontok is hármásával rajta vannak; e háromszögoldalok mindegyike tizenkét incidens l -egyenesnek tekinthető.

18. Nehány, a konfigurációval kapcsolatos involutiós helyzetű pontról és sugárról.

80. A konfigurációban az előbbieken ismertetett involutiós pontokon és sugarakon kívül még más involutiós pontok és sugarak is rejlenek, melyek akkép szerkeszthetők, hogy a konfigurációban előforduló négyszögek szögpontjait bizonyos pontokból projiciáljuk és a négyoldalak oldalait bizonyos egyenesekkel metszszük. Ezek az involutiók többnyire közös tartón hármásával lépnek fel és részben közös elemei vannak. Együttes tárgyalásuk kedvéért czélszerűnek tartjuk előre bocsátani a következő tételt:

»Ha $a b, c d, x y; b c, d a, y z$ két involutiós sornak kapcsolt elemei, akkor $a c a, b d, z x$ elempárok is kapcsolt elemei egy involutióknak, és a z, x, y elemekhez kapcsolt elemek e három involutióban incidensek«.

Ugyanis a feltétel szerint

$$(a c b x) \wedge (b d a y), \quad (b d a y) \wedge (c a d z),$$

ennél fogva $(a c b x) \wedge (c a d z)$, azaz az $a c$, $c d$, $z x$ elemek kapcsolt elemei egy involúciónak. Másrészt abból, hogy

$$(a c x z') \wedge (b d y z'), \quad (a c x z) \wedge (d b x' y),$$

következik, hogy

$$(b d y z') \wedge (d b x' y) \wedge (b d y x'),$$

vagyis $z' \equiv x'$, és, hasonló úton kimutatva, $z' \equiv y'$.

Az $a b c d x y z$ elemeket úgy tekinthetjük, mint egy négyoldal oldalainak metszőpontjait egy egyenessel, vagy mint vetítő sugarait egy négyszög szögpontjainak, valamint átlóháromszöge szögpontjainak egy pontból. Ennél fogva:

»Egy általános helyzetű egyenes egy négyoldalnak és átlóháromszögének oldalait hét pontban metszi. A négy első metszőpont háromszor bontható két-két párra, melyek három involúció kapcsolt pontjainak tekinthetők. Ez involúciók mindegyikében a három utóbbi metszőpont közül kettő kapcsolt pontpár, és a kimaradt harmadik ponthoz a három kapcsolt pont az egyenes involúciókban incidens«.

Ezt a segédtételt és dualis tételét fogjuk a következőkben alkalmazni.

81. A P STEINER-pont összekötő egyenesei

$$\begin{array}{lll} p^I p^{II} & p^{II} \pi & \sigma^{II, III} \sigma^{III, I} \\ p^{II} p^{III} & p^I \pi & \sigma^{III, I} \sigma^{I, II} \\ p^{III} p^I & p^{II} \pi & \sigma^{I, II} \sigma^{II, III} \end{array}$$

az

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \beta_1 a_1^{II} b_1^I \equiv A_1^I B_1^{II} \quad (14, 56) \Sigma^{V, VI} A_1 B_1 \\ \beta_2 \gamma_2 b_2^{III} c_2^{II} \equiv B_2^{II} \Gamma_2^{III} \quad (16, 52) \Sigma^{VI, IV} B_2 C_2 \\ \gamma_3 \alpha_3 c_3^I a_3^{III} \equiv \Gamma_3^{III} A_3^I \quad (12, 45) \Sigma^{IV, V} C_3 A_3 \end{array}$$

négyoldalak szemben fekvő szögpontjaival egy-egy involúciót képeznek. A $\sigma^{I, II}$, $\sigma^{II, III}$, $\sigma^{III, I}$ -hez kapcsolt sugár az egyes involúciókból ugyanegy sugár.

Továbbá a p CAYLEY-egyenes az

$$A_1 B_1 \circ A_1^{II} \circ B_1^I, \quad B_2 \Gamma_2 \circ B_2^{III} \circ C_2^{II}, \quad \Gamma_3 A_3 \circ C_3^I \circ A_3^{III}$$

négyszögek szemben fekvő oldalait a

$$\begin{array}{ccc}
 {}_0P^I & {}_0P^{II} & {}_0P^{III} \text{ II} & \Sigma^{II, III} \Sigma^{III, I} \\
 {}_0P^{II} & {}_0P^{III} & {}_0P^I \text{ II} & \Sigma^{III, I} \Sigma^I \text{ II} \\
 {}_0P^{III} & {}_0P^I & {}_0P^{II} \text{ II} & \Sigma^I \text{ II} \Sigma^{II, III}
 \end{array}$$

pontpárokban metszi, melyek egy-egy involutiót képeznek. Ezekben az involutiókban a $\Sigma^I, II, \Sigma^{II, III}, \Sigma^{III, I}$ sugarakhoz kapcsolt három sugár egybeesik.

Ennélfogva :

»Minden STEINER-pontból három PASCAL-, egy CAYLEY- és három STEINER-egyenes sugárzik ki. A négy első egyenes, páronként egyesítve, három involutiót határoz meg. — Ez involutiók mindegyikében két STEINER-egyenes kapcsolt, és a kimaradt harmadik STEINER-egyeneshez kapcsolt három sugár egybeesik«.

»Minden CAYLEY-egyenesen három ${}_0V$ -, egy STEINER- és három SALMON-pont fekszik. A négy első pont páronként egyesítve három involutiót határoz meg. — Ez involutiók mindegyikében két SALMON-pont kapcsolt, és a kimaradt harmadik SALMON-pont-hoz kapcsolt három sugár egybeesik«.

82. A ${}_0V^{II, III} = {}_0[P^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}]$ négyoldal és $D^{II, III} = D_{12} D_{34} D_{56}$ átlóháromszögének oldalai a $\sigma^{II, III}$ egyenest a $P, A_1, A_2, A_3, Y''_{12}, Y''_{34}, Y''_{56}$ pontokban metszik. Továbbá a $V_1^{II, III} = [P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}]_1$ négyszög és $\Delta^{II, III}$ átlóháromszöge szögpontjainak összekötő egyenesei a $\Sigma^{II, III}$ ponttal a $p a_1 a_2 a_3 y''_{12} y''_{34} y''_{56}$ egyenesek.

Ennélfogva a :

$$\begin{array}{ccc}
 P A_1 & A_2 A_3 & Y''_{12} Y''_{34} & p a_1 & a_2 a_3 & y''_{12} y''_{34} \\
 P A_2 & A_3 A_1 & Y''_{56} Y''_{12} & p a_2 & a_3 a_1 & y''_{56} y''_{12} \\
 P A_3 & A_1 A_2 & Y''_{34} Y''_{56} & p a_3 & a_1 a_2 & y''_{34} y''_{56}
 \end{array}$$

elempárok involutiós alakzatok.

Igy tehát :

Egy STEINER-egyenesen fekvő négy STEINER-pont, páronként egyesítve, négy involutiót határoz meg. Ez involutiók mindegyikében két Y-pont kapcsolt,¹

»Egy SALMON-pontból kisugárzó négy STEINER-egyenes páronként egyesítve négy involutiót határoz meg. Ez involutiók mindegyikében két y-egye-

¹ VERONESE, id. m. 37. old. XXV. és XXVII. teorema.

és a STEINER-egyenes harmadik Y-pontjához kapcsolt pontjai az egyes involutióknak egybeesnek«.

nes kapcsolt, és a SALMON-pontból kisugárzó harmadik y-egyeneshez kapcsolt sugarai az egyes involutióknak egybeesnek«.

Ha ellenben ama $\circ V^{II, III}$ négyoldalnak és $D^{II, III}$ átlóháromszögének oldalait a π CAYLEY-egyenessel metszszük, valamint a $V_1^{II, III}$ négyszög és $\Delta^{II, III}$ átlóháromszögének szögpontjait a Π STEINER-pontból projiciáljuk, akkor ama metszőpontok és eme projiciáló sugarak

$$\begin{array}{cccc} {}_1II^V, {}_1II^{VI} & {}_1II^{IV} P & \circ II^V & \circ II^{VI}, \\ {}_1II^{VI}, {}_1II^{IV} & {}_1II^V P & \circ II^{VI} & \circ II^{VI}, \\ {}_1II^{IV}, {}_1II^V & {}_1II^{VI} P & \circ II^V & \circ II^V, \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \pi_1^V & \pi_1^{VI} & \pi_1^{IV} p & \pi^V \pi^{VI} \\ \pi_1^{VI} & \pi_1^{IV} & \pi_1^V p & \pi^{VI} \pi^{IV} \\ \pi_1^{IV} & \pi_1^V & \pi_1^{VI} p & \pi^{IV} \pi^V \end{array}$$

involutiós alakzatok. Ennélfogva:

»Minden CAYLEY-egyenesen három $\circ V$ -, egy STEINER- és három $\circ V$ -pont fekszik; ezek közül az első négy páronként egyesítve három involutiót határoz meg. Ez involutiók mindegyikében két $\circ V$ -pont kapcsolt, és a kimaradt harmadik $\circ V$ pont-hoz kapcsolt pontok egybeesnek«.

»Minden STEINER-ponton három v_1 , egy CAYLEY- és három PASCAL-egyenes megy keresztül; ezek közül az első három páronként egyesítve három involutiót határoz meg. Ez involutiók mindegyikében két PASCAL-egyenes kapcsolt, és a kimaradt harmadik PASCAL-egyeneshez kapcsolt egyenesek egybeesnek«.

83. A p CAYLEY-egyenes a

$$B_1 \Gamma_1 B_1^{III} C_1^{II} \quad \Gamma_1 A_1 C_1^I A_1^{III} \quad A_1 B_1 A_1^{II} B_1^I$$

négyszögek szemben fekvő oldalait következő pontpárokban metszi, és a P STEINER-pontból a

$$\beta_1 \gamma_1 b^{III} c^{II} \quad \gamma_1 \alpha_1 c^I a^{III} \quad \alpha_1 \beta_1 a^{II} b^I$$

négyszögek szemben fekvő szögpontjai a következő sugárpárokkal vetíthetők:

$$\begin{array}{cccc} p^{II} p^{III} & \Sigma^I, III & \Sigma^I, II & \Pi P_1^I, \\ p^{III} p^I & \Sigma^{II}, I & \Sigma^{II}, III & \Pi P_1^{II}, \\ p^I p^{II} & \Sigma^{III}, II & \Sigma^{III}, I & \Pi P_1^{III}, \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \circ p^{II} & \circ p^{III} & \sigma^I, III & \sigma^I, II & \pi_1 p^I \\ \circ p^{III} & \circ p^I & \sigma^{II}, I & \sigma^{II}, III & \pi_1 p^{II} \\ \circ p^I & \circ p^{II} & \sigma^{III}, II & \sigma^{III}, I & \pi_1 p^{III} \end{array}$$

melyek involutiós helyzetűek.

Ezért:

»Minden CAYLEY-egyenesen három KIRKMAN-, három SALMON-, három V_1 - és egy STEINER-pont fekszik. Két KIRKMAN-pont és a két hozzárendelt SALMON-pont egy involutiót határoz meg, melyben a STEINER-ponthez egy V_1 pont van kapcsolva«.

»Minden STEINER-pontból kisugárzik három σ_V -, három STEINER-, három ν_1 - és egy CAYLEY-egyenes. Két σ_V egyenes és a hozzá rendelt két STEINER-egyenes egy involutiót határoz meg, melyben a CAYLEY-egyeneshez egy ν_1 egyenes van kapcsolva«.

II. NÉGY KÜLÖNÖS PASCAL-HATSZÖGRŐL.

Az előbbi fejezetben láttuk volt, hogy egy általános PASCAL-hatszög hatvan PASCAL-egyenesre és hatvan KIRKMAN-pontja mind különböző. Lehet azonban oly PASCAL-hatszögeket is szerkeszteni, melyeknek a PASCAL-egyenesei és KIRKMAN-pontjai közül többen egyestülnek. Ugyanis, ha a PASCAL-hatszög körül írt kúpszeleten a hatszög szögpontjai egy-, két-, három- vagy négyféleképp képeznek involutiót, akkor ezekben az esetekben megfelelőleg egyszer négy, kétszer négy, háromszor négy és egyszer három, végre háromszor négy és egyszer hat PASCAL-egyenes és ugyanannyi KIRKMAN-pont egy-egy egyenesben, illetve pontban egyesül, a mint azt a következőkből be fogjuk láthatni.

1. Oly Pascal-hatszögről, melynek szögpontjai involutiót képeznek.

1. Egy kúpszeleten felvesszünk három pontpárt, az 1 2, 3 6, 5 4-et, melyek involutiót képeznek; e pontok egy különös PASCAL-hatszögnek 1 2 3 4 5 6-nak szögpontjai, melynek négy KIRKMAN-pontja az involutio-középpontba, $T=(1\ 2, 3\ 6, 5\ 4)$ -be és négy PASCAL-egyenesre a t involutio-tengelybe kerül.

Megtartván az általános PASCAL-hatszöghöz használt jelölést, az I. és III. táblázatból azonnal kitűnik, mert a T -nek polárisa a t -egyenes, hogy

$$t \equiv \alpha_3^I \beta_3^{II} \gamma_3^{III} \pi^{VI}, \quad T \equiv A_3^I B_3^{II} \Gamma_3^{III} \Pi^{VI};$$

továbbá, hogy a $b_3^I c_3^I c_3^{II} a_3^{III} b_3^{III} p^I p^{II} p^{III} a_3^{VI} b_3^{VI} c_3^{VI}$ PASCAL-egyenesek a T-ponton mennek keresztül és a

$$B_3^I C_3^I C_3^{II} A_3^{III} B_3^{III} P^I P^{II} P^{III} A_3^{VI} B_3^{VI} C_3^{VI}$$

KIRKMAN pontok a t-egyenesen fekszenek.

A 2 3 1 6, 4 6 3 5 négyszögeknek szemben fekvő oldalpárjai 2 3, 1 6; 4 6, 3 5 harmonicusan vannak elválasztva a T-től s a t-től, s ugyanígy ezeknek (2 3, 4 6) (1 6, 3 5) metszéspontjai, valamint e pontokat az A_3^{VI} pontból projiciáló $\alpha_1^{VI} \alpha_2^{VI}$ egyenesek is.

Hasonló úton bizonyítható be, hogy a t-egyenes

$$B_3^{VI} C_3^{VI} P^I P^{II} P^{III} B_3^I C_3^I C_3^{II} A_3^{III} B_3^{III} (3 5, 4 6) (1 5, 2 4) \\ (1 3, 6 2) (3 4, 5 6) (1 4, 2 5) (1 6, 3 2) \text{ II } \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3 \Gamma_3$$

pontjaiból kisugárzó

$$\beta_1^{VI} \beta_2^{VI}, \gamma_1^{VI} \gamma_2^{VI}, \alpha_1^I \alpha_2^I, \beta_1^{II} \beta_2^{II}, \gamma_1^{III} \gamma_2^{III}, c_1^I c_2^I, b_1^I b_2^I, \\ a_1^{II} a_2^{II}, c_1^{II} c_2^{II}, b_1^{III} b_2^{III}, a_1^{III} a_2^{III}, a_1^{IV} a_2^{IV}, b_1^{IV} b_2^{IV}, c_1^{IV} c_2^{IV}, \\ \alpha_2^{IV} \alpha_1^V, \beta_2^{IV} \beta_1^V, \gamma_2^{IV} \gamma_1^V, \pi^{IV} \pi^V, \alpha_3^{IV} \alpha_3^V, \beta_3^{IV} \beta_3^V, \gamma_3^{IV} \gamma_3^V$$

egyenespárok harmonicusan vannak elválasztva a T-től s a t-től.

Míthogy az $\mathbf{A}_1^{VI} = (\beta_2^{VI} \gamma_2^{VI})$, $\mathbf{A}_2^{VI} = (\beta_1^{VI} \gamma_1^{VI})$ és a $\beta_1^{VI} \beta_2^{VI}$, $\gamma_1^{VI} \gamma_2^{VI}$ egyenespárok harmonicusan vannak elválasztva a T- és t-től, azért az $\mathbf{A}_1^{VI} \mathbf{A}_2^{VI}$ pontpár és, hasonló úton bebizonyítva, mind az előbbi PASCAL-egyenespárokhoz rendelt KIRKMAN-pontpárok harmonicusan lesznek elválasztva a T- és t-től.

2. A STEINER-pontok és CAYLEY-egyenesek helyzete szintén egyszerűbbé lesz.

Ugyanis $P A_3 B_3 C_3 \equiv T$, $p a_3 b_3 c_3 \equiv t$, $\text{II } \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3 \Gamma_3$ pontok a t-egyenesen fekszenek, és a $\pi \alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ egyenesek a T-ponton mennek keresztül. Míthogy a T- és t-től harmonicusan elválasztott $a_1^{II} a_2^{II}$, $a_1^{III} a_2^{III}$ és $\alpha_1^V \alpha_2^V$, $\alpha_1^{VI} \alpha_2^{VI}$ egyenespárok egymást az $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$ pontpárokban metszik, e pontpárok és hasonlóképp $B_1 B_2, \dots$ $a_1 a_2, b_1 b_2, \dots$ pont- és egyenespárok harmonicusan vannak elválasztva T- és t-től.

A STEINER-egyenesekek közül hat a T-pontból sugárzik ki és involutiót képez, négy pár a $\text{II } \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3 \Gamma_3$ pontokból sugárzik ki s a T- és t-től harmonicusan van elválasztva, végre egy a t-egyenesben fekszik. Ugyanez mondható, a változtatandók megváltoztatásával, a SALMON-pontokról.

3. Nézzük most, mikép viselkednek a $[Vv]_j$, ${}_j[Vv]$ konfigurációk pontjai és egyenesei a T és t irányában.

Az általános PASCAL-hatszögről láttuk, hogy egy tetszőleges $[Vv]$ konfigurációhoz tartozó és bármily felső mutatóval ellátott $p a_3 b_3 c_3$ egyenesek megfelelőleg a $P A_3 B_3 C_3$ STEINER-pontokon mennek keresztül, melyek jelenleg a T -ben egyesülnek. Ezek az összes egyenesek tehát jelenleg a T -ponton mennek keresztül. Ámde ama konfigurációnak $b_3^{VI} c_3^{VI}$, $b_3^I c_3^I$, $c_3^{II} a_3^{II}$, $a_3^{III} b_3^{III}$ egyenespárjai egymást annak $II^{VI} A_3^I B_3^{II} \Gamma_3^{III}$ pontjaiban metszik; ennél fogva minden $[Vv]$ konfigurációnak $II^{VI} A_3^I B_3^{II} \Gamma_3^{III}$ pontjai a T -ben vannak.

Továbbá a konfigurációnak bármily felső mutatóval ellátott $P A_3 B_3 C_3$ pontjai megfelelőleg a t -vel egybeeső $p a_3 b_3 c_3$ CAYLEY-egyeneseken fekszenek, s mert a $B_3^{VI} C_3^{VI}$, $B_3^I C_3^I$, $C_3^{II} A_3^{II}$, $A_3^{III} B_3^{III}$ pontpároknak összekötő egyenesei a konfigurációnak $\pi^{VI} \alpha_3^I \beta_3^{II} \gamma_3^{III}$ egyenesei, azért ezek az egyenesek a t -vel összeesnek.

Az $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $\Gamma_1 \Gamma_2$ STEINER-pontpárok harmonicusan lévén elválasztva a T - és t -től, a tekintetbe vett konfigurációnak $a_1^{II} a_2^{II}$, $a_1^{III} a_2^{III}$, $b_1^I b_2^I$, $b_1^{III} b_2^{III}$, $c_1^I c_2^I$, $c_1^{II} c_2^{II}$, $\alpha_1^I \alpha_2^I$, $\alpha_1^{VI} \alpha_2^{VI}$, $\beta_1^{II} \beta_2^{II}$, $\beta_1^{VI} \beta_2^{VI}$, $\gamma_1^{III} \gamma_2^{III}$, $\gamma_1^{VI} \gamma_2^{VI}$ egyenespárjai, melyek ama pontpárokat a konfigurációnak a t -egyenesen fekvő $C_3^{II} B_3^{III} C_3^I A_3^{III} B_3^I A_3^{III} P^I A_3^{VI} P^{II} B_3^{VI} P^{III} C_3^{VI}$ pontjaiból projiciálják, szintén harmonicusan vannak elválasztva a T - és t -től.

A j -dik konfigurációnak, akár $[Vv]_j$, akár ${}_j[Vv]$ -nek, $a_1^{IV} a_2^V$ egyenesei a $(j+1)$ -dik vagy $(j-1)$ -dik konfiguráció $\beta_3^{II} \beta_3^{III}$ egyenesének G_{jk} vagy ${}_{kj}G$ metszéspontján mennek keresztül s, mert ez utóbbi egyenesek a t -ben egyesültek, azért valamennyi konfigurációnak $a_1^{IV} a_2^V$ egyenespárjai és, hasonlóképp következtetve, $b_1^{IV} b_2^V$, $c_1^{VI} c_2^V$, $\alpha_1^V \alpha_2^{IV}$, $\beta_1^V \beta_2^{IV}$, $\gamma_1^V \gamma_2^{IV}$ egyenespárjai egymást a t -ben metszik. Ámde e hat egyenespár az előbb felírt hat STEINER-pontpárt projiciálja; ennél fogva a hat egyenespár is harmonicusan van elválasztva a T - és t -től.

Eddig egy tetszőleges konfigurációnak tizenhét egyenespárjáról mutattuk ki, hogy a T -ést- t -től harmonicusan vannak elválasztva. De ha ezeknek az egyenespároknak megjelölésére szolgáló kis betűket nagy betűkkel cseréljük fel, akkor az így származott tizenhét

pontpárról ugyanazon az úton kimutatható, hogy azok a T - és t -től harmonicusan vannak elválasztva. És ha e pontpárokból az $A_1^{IV} A_2^V$, $A_1^{IV} A_2^V$, $B_1^{IV} B_2^V$, $C_1^{IV} C_2^V$ -öt a t -egyenes $\Pi A_3 B_3 \Gamma_3$ pontjaiból projiciáljuk, akkor a projiciáló egyenesek $\pi^{IV} \pi^V$, $\alpha_3^{IV} \alpha_3^V$, $\beta_3^{IV} \beta_3^V$, $\gamma_3^{IV} \gamma_3^V$, valamint az ezekhez rendelt $\Pi^{IV} \Pi^V$, . . . pontpárok, szintén harmonicusan lesznek elválasztva a T és t -től.

Ezzel kimutattuk, hogy egy tetszés szerinti $[Vv]$ configuratio egyenesei és pontjai akképp viselkednek a T - és t irányában, mint a $[Vv]_0$ configuratióknak azokhoz rendelt PASCAL-egyenesei és KIRKMAN-pontjai. Ki mondhatjuk tehát, hogy:

Ha egy PASCAL-hatszög szögpontjai involutiót képeznek a rajtuk keresztül menő kúpszeleten a T involutio-középpontra és a t involutio-tengelyre, akkor e hatszögnek négy KIRKMAN-pontja és négy azokhoz rendelt PASCAL-egyenes a T illetve t -ben egyesül. Tizenkét PASCAL-egyenes a T -ponton megy keresztül és az ezekhez rendelt KIRKMAN-pont a t -egyenesen fekszik; végre a többi huszonekét pár PASCAL-egyenes és KIRKMAN-pont a T - és t -től harmonicusan van elválasztva.

Ugyanígy viselkednek az összes $[Vv]_j$, ${}_j[Vv]$ configuratióknak pontjai és egyenesei a T - és a t irányában.

A STEINER-pontok közül négy a T -ben van és azoknak ellenpontja a t -n fekszik; a CAYLEY-egyenesek közül négy a t -ben fekszik és azoknak ellenegyenes a T -n megy keresztül; a többi négy pár STEINER-pont és CAYLEY-egyenes a T - és t -től harmonicusan van elválasztva.

A STEINER-egyenesekből és SALMON-pontokból egy a t -ben, illetve T -ben van; hat a T -ből sugárzik ki, illetve a t -n fekszik és involutiót képez; végre négy pár STEINER-egyenes és SALMON-pont a T - és t -től harmonicusan van elválasztva.

2. Oly Pascal-hatszögről, melynek szögpontjai kétféleképp képeznek involutiót.

1. Egy kúpszeleten felvesszünk egy pontpárt, 12 -t, és szerkesztünk azon oly két pontpárt, 35 , 46 -ot, mely az 12 -t harmonicusan elválasztja. Az 123456 hatszög egy különös PASCAL-hatszög lesz,

melynek négy KIRKMAN-pontja és négy PASCAL-egyenesé kétszer egyesül egy-egy ponttá, illetve egyenessé.

A 3 4 5 6 négyszög átlóháromszögének, tehát a kúpszelet egyik poláris háromszögének szögpontjait és oldalait következőkép jelöljük :

$$T = (3\ 4, 5\ 6), \quad T_1 = (3\ 6, 5\ 4), \quad U_1 = (3\ 5, 4\ 6), \\ t = T_1 U_1, \quad t_1 = U_1 T, \quad u_1 = T T_1.$$

Minthogy a szerkesztés következtében a 3 5, 4 6 pontpárok az 1 2-t harmonicusan választják el,

$$u_1 = 1\ 2, \quad T = (1\ 2, 3\ 6, 5\ 4), \quad T_1 = (1\ 2, 3\ 4, 5\ 6);$$

tehát az 1 1, 2 2, 3 5, 4 6; 1 2, 3 6, 5 4; 1 2, 3 4, 5 6 pontpárok involutiót képeznek, melynek involutio középpontja illetőleg tengelye $U_1, u_1; T, t; T_1, t_1$.

Ebből, tekintettel az előbbi §-ra, következik, hogy a $\pi^{VI} \alpha_3^I$ $\beta_3^{II} \gamma_3^{III}$, $p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}$ PASCAL-egyenesek a t, t_1 -gyel és a $\Pi^{VI} A_3^I B_3^{II} \Gamma_3^{III}$, $P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}$ KIRKMAN-pontok a T, T_1 -gyel egyesülnek; továbbá, hogy a $b_3^I c_3^I c_3^{II} a_3^{III} a_3^{III} b_3^{III} p^{III} b_3^{VI} c_3^{VI}$ és az $\alpha_1^{VI} \alpha_2^{VI} \alpha_2^{IV} \alpha_3^{IV} \alpha_1^V \alpha_3^V \pi^{IV} \pi^V \alpha_1^I \alpha_2^I$ PASCAL-egyenesek a T , illetve T_1 ponton mennek keresztül, holott a $B_3^I C_3^I C_3^{II} A_3^{III} A_3^{III} B_3^{III} p^{III} p^{III} B_3^{VI} C_3^{VI}$ és az $A_1^{VI} A_2^{VI} A_2^{IV} A_3^{IV} A_1^V A_3^V \Pi^{IV} \Pi^V A_1^I A_2^I$ KIRKMAN-pontok a t , illetve t_1 egyenesen vannak; végre az

$$\alpha_1^{VI} \alpha_2^{VI}, \beta_1^{VI} \beta_2^{VI}, \gamma_1^{VI} \gamma_2^{VI}, \alpha_1^I \alpha_2^I, \beta_1^{II} \beta_2^{II}, \gamma_1^{III} \gamma_2^{III}, c_1^I c_2^I, \\ b_1^I b_2^I, a_1^{II} a_2^{II}, c_1^{II} c_2^{II}, b_1^{III} b_2^{III}, a_1^{III} a_2^{III}, b_1^{IV} b_2^V, c_1^{IV} c_2^V, \\ \alpha_2^{IV} \alpha_1^V, \beta_2^{IV} \beta_1^V, \gamma_2^{IV} \gamma_1^V, \pi^{IV} \pi^V, \alpha_3^{IV} \alpha_3^V, \beta_3^{IV} \beta_3^V, \gamma_3^{IV} \gamma_3^V, \\ \text{és a } b_3^I c_3^I, b_1^I c_1^I, b_2^I c_2^I, b_3^{VI} c_3^{VI}, b_1^{IV} c_1^{IV}, b_2^V c_2^V, \beta_2^{VI} \gamma_2^{VI}, \\ \beta_1^{VI} \gamma_1^{VI}, \beta_2^{IV} \gamma_2^{IV}, \beta_3^{IV} \gamma_3^{IV}, \beta_3^V \gamma_3^V, \beta_1^V \gamma_1^V, \beta_1^{II} \gamma_1^{III}, \beta_2^{II} \gamma_2^{III}, \\ a_3^{II} a_3^{III}, b_1^{III} c_1^{II}, b_2^{III} c_2^{II}, p^{II} p^{III}, c_3^{II} b_3^{III}, a_1^{II} a_1^{III}, a_2^{II} a_2^{III}$$

egyenespárok harmonicusan vannak elválasztva a T, t , illetve T_1, t_1 -től. Ugyanez mondható amaz egyenespárokhoz rendelt KIRKMAN-pontokról is.

Az U_1, u_1 -től harmonicusan vannak elválasztva: a T -ből kisugárzó $b_3^I c_3^I, b_3^{III} c_3^{II}, a_3^{II} a_3^{III}, b_3^{VI} c_3^{VI}, p^{II} p^{III}$ és a T_1 -ből kisugárzó $\alpha_1^{VI} \alpha_2^{VI}, \alpha_3^V \alpha_3^{IV}, \alpha^{IV} \alpha_1^V, \alpha_1^I \alpha_2^I, \pi^{IV} \pi^V$, valamint a $b_1^I c_2^I, b_2^I c_1^I, a_1^{II} a_2^{III}, a_1^{III} a_2^{II}, b_1^{III} c_2^{II}, b_2^{III} c_1^{II}, b_1^{IV} c_2^V, b_2^V c_1^{IV}, \beta_1^{VI} \gamma_2^{VI}, \beta_2^{VI} \gamma_1^{VI}, \beta_3^{IV} \gamma_3^V, \beta_3^V \gamma_3^{IV}, \beta_2^{IV} \gamma_1^V, \beta_1^V \gamma_2^{IV}, \beta_1^{II} \gamma_2^{III}, \beta_2^{II} \gamma_1^{III}$ egyenespárok, valamint az ezekhez rendelt KIRKMAN-pontpárok. Ugyanis pl. ez utóbbi csoport első két egyenespárja

azért van harmonicusan elválasztva U_1 , u_1 -től, mert a tőlük meghatározott négyoldal átlóháromszöge TT_1U_1 .

2. A STEINER-pontok és CAYLEY-egyenesek helyzete a következő:

$PA_3B_3C_3 \equiv T$, $\Pi A_1A_2A_3 \equiv T_1$; $B_3\Gamma_3$ a t -n, A_1A_2 a t_1 -en fekszik;
 $pa_3b_3c_3 \equiv t$, $\pi \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \equiv t_1$; $\beta_3\gamma_3$ a T -n, a_1a_2 a T_1 -en megy keresztül.

Az A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 , B_1B_2 , $\Gamma_1\Gamma_2$ pontpárok és az a_1a_2, \dots
 egyenespárok T - és t -től,

a $B_1\Gamma_1$, $B_2\Gamma_2$, $B_3\Gamma_3$, B_1C_1 , B_2C_2 pontpárok és a $\beta_1\gamma_1, \dots$
 egyenespárok T_1 - és t_1 -től,

az A_1A_2 , B_1C_2 , B_2C_1 , $B_3\Gamma_3$, $B_1\Gamma_2$, $B_2\Gamma_1$ pontpárok és az a_1a_2, \dots
 egyenespárok U_1 - és u_1 -től

vannak harmonicusan elválasztva.

Ennélfogva

az $\left. \begin{array}{l} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} B_1 B_2 B_3 \\ \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \\ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \end{array} \right\}$
 háromszögpárok a T - és t -re, illetve T_1 - és t_1 -re,

az $\left. \begin{array}{l} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 C_2 B_2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 c_2 b_2 \end{array} \right\}; \left. \begin{array}{l} B_3 B_1 B_2 \\ \Gamma_3 \Gamma_2 \Gamma_1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \beta_3 \beta_1 \beta_2 \\ \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1 \end{array} \right\}$
 háromszögpárok az U_1 - és u_1 -re

vonatközöleg perspectivások.

A tt_1u_1 egyenesek STEINER-egyenesek és a TT_1U_1 pontok SALMON-pontok; a T , T_1 -ből kisugárzó STEINER-egyenesek és a t , t_1 -en fekvő SALMON-pontok kétszeresen képeznek involutiót.

3. Az előbbi §. szerint a $[Vv]_j$, $j[Vv]$ konfigurációknak viselkedése a Tt és T_1t_1 irányában megegyezik a $[Vv]_0$ configuratio viselkedésével. Jelenleg tehát csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a $[Vv]_0$ konfigurációnak az U_1 , u_1 -től harmonicusan elválasztott pontjaihoz és egyeneseihez rendelt pontok és egyenesek a $[Vv]_j$, $j[Vv]$ konfigurációban szintén harmonicusan vannak-e elválasztva az U_1 - és u_1 -től.

Egy tetszés szerinti $[Vv]$ konfigurációnak az a tizenhat egyenespárja (és az azokhoz rendelt pontpárja), melyet a 2. pont végén felírtunk, azért lesz harmonicusan elválasztva az U_1 , u_1 -től, mert az egymásra következő párok oly négyoldalnak oldalai, melynek

átlóháromszöge a $T T_1 U_1$. A konfigurációnak többi kétszer öt egyenespárja, mely a $[Vv]_0$ konfigurációnak az U_1 - és u_1 -től harmonicusan elválasztott egyenespárjaihoz van rendelve, azért van az U_1 - és u_1 -től harmonicusan elválasztva, mert mindig olyan pontpárját projiciálja a konfigurációnak a T vagy T_1 pontból, a melyről már tudjuk, hogy az U_1 - és u_1 -től harmonicusan van elválasztva. Így a konfigurációnak $b_3^1 c_3^1$ vagy $p^{II} p^{III}$ egyenespárjai az U_1 - és u_1 -től harmonicusan elválasztott $C_2^1 B_1^1$, $B_1^{II} T_2^{III}$ pontpárjait projiciálják a T -pontból.

Ezzel kimutattuk, hogy egy tetszés szerinti $[Vv]$ configuratio ép úgy viselkedik az U_1 , u_1 iránt, mint a $[Vv]_0$ configuratio.

Összefoglalva fejtegetésünk eredményét, kimondhatjuk, hogy

Ha egy PASCAL-hatszögnek szögpontjai kétszeresen képeznek involutiót a rajtuk keresztül menő kúpszeleten a T és a T_1 involutio-középpontra és a t és t_1 tengelyre, akkor e hatszögnek négy-négy KIRKMAN-pontja a T -vel és a T_1 -gyel, és négy-négy azokhoz rendelt PASCAL-egyenes a t -vel és t_1 -gyel egyesül. Ezekon kívül öt-öt pár PASCAL-egyenes a T és a T_1 ponton megy keresztül és az azokhoz rendelt KIRKMAN-pontpárok a t és a t_1 egyenesen fekszenek. Mindezek az egyenes- és pontpárok és a még hátra levő tizenhat egyenes- és pontpár az $U_1 = (t t_1)$ -től s az $u_1 = |T T_1|$ -től harmonicusan van elválasztva.

Ugyanígy viselkednek e hatszöggel kapcsolatos $[Vv]_j$, $j[Vv]$ konfigurációknak pontjai és egyenesei a T, t s a T_1, t_1 irányában.

A STEINER-pontok közül négy-négy a T, T_1 -ben, egy-egy pár a t, t_1 -en van és az U_1, u_1 -től, a hátralevő négy pár pedig a $T, t; T_1, t_1$ és az U_1, u_1 -től harmonicusan van elválasztva. Az utóbbi tizenkét STEINER-pont tehát két háromszögparnak szögpontja, melyek a T és az U_1 , illetve a T_1 és az U_1 collineatio-középpontokra és a t és az u_1 ,

A CAYLEY-egyenesekből négy-négy a t, t_1 -ben van, egy-egy pár a T, T_1 -en megy keresztül és az U_1, u_1 -től, a hátralevő négy pár pedig a T, t, T_1, t_1 és az U_1, u_1 -től harmonicusan van elválasztva. Ez utóbbi tizenkét CAYLEY-egyenes tehát két háromszögparnak oldala, melyek a T és az U_1 , illetve a T_1 és az U_1 collineatio-

illetve t_1 és az u_1 collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspectivásak.

A STEINER-egyenesek közül hat-hat a T - és T_1 -ből sugárzik ki és involutiót képez, ezeken kívül még két-két pár a T - és t -től és ugyanannyi a T_1 - és t_1 -től harmonicusan van elválasztva. A t, t_1, u_1 egy-egy STEINER-egyenes.

középpontokra és a t és az u_1 , illetve a t_1 és az u_1 collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspectivásak.

A SALMON-pontok közül hat-hat a t - és t_1 -en fekszik és involutiót képez, ezeken kívül még két-két pár a T - és t -től és a T_1 - és t_1 -től harmonicusan van elválasztva. A T, T_1, U_1 egy-egy SALMON-pont.

3. Oly Pascal-hatszögről, melynek szögpontjai háromfélekép képeznek involutiót.

1. Egy kúpszeleten felvesszünk három pontot, az 135-öt, és megszerkesztjük azt a t egyenest, melyben az 135 pont érintői megfelelőleg a 35, 51, 13 egyeneseket metszik; a t egyenes tetszés szerinti T_1 pontjából az 135 pontokat a kúpszeletre projiciáljuk 246-ba. Az 123456 hatszög egy különös PASCAL-hatszög lesz, melynek bizonyos PASCAL-egyenesei coincidálnak (3. ábra).

A 415633, 123654 egyszerű PASCAL-hatszögek PASCAL-egyenesei a t egyenesen fekszenek, mert az első hatszög PASCAL-egyenesének t -vel két közös pontja van és az még a $T_2=(14, 36)$ ponton is keresztül megy; a második hatszög PASCAL-egyenesé pedig a T_1, T_2 pontot köti össze. A $T_3=(23, 45)$ pont tehát a t -egyenesen fekszik.

Ugyanígy a 613455, 163452 és a 253411, 143256 PASCAL-hatszögek PASCAL-egyenesei is a $t = |T_1 T_2 T_3|$ egyenesen fekszenek, tehát

$$T_1 \equiv (12, 34, 56), \quad T_2 \equiv (14, 36, 52), \quad T_3 \equiv (16, 32, 54).$$

Ebből következik, hogy az 12, 34, 56; 14, 36, 52; 16, 32, 54 pontpárok a kúpszeleten involutiót képeznek, melynek involutiós középpontja T_1, T_2, T_3 , tengelye pedig t_1, t_2, t_3 ; továbbá, hogy az 135, 246; 135, 462; 135, 624 háromszögek a T_1, T_2, T_3 , collineatio-középpontra és a t_1, t_2, t_3 tengelyre vonatkozólag per-

spectivásak; ¹ végre, hogy a t_i, t_j egyenesek és a T_i, T_j pontok a t_k, t_k -tól harmonícusan vannak elválasztva.

Az 1 2 3 4 5 6 teljes hatszög PASCAL-egyenesei közül

$$\pi^{IV} \pi^V \pi^{VI} \equiv t, a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI} p^I \equiv t_1, b_1^{IV} b_2^V b_3^{VI} p^{II} \equiv t_2, c_1^{IV} c_2^V c_3^{VI} p^{III} \equiv t_3;$$

az $\alpha_j^i, \beta_j^i, \gamma_j^i$ PASCAL-egyenések rendre a T_1, T_2, T_3 ponton mennek keresztül, az A_j^i, B_j^i, Γ_j^i KIRKMAN-pontok pedig a t_1, t_2, t_3 egyeneseken fekszenek; végre a $\Pi^{IV} \Pi^V \Pi^{VI}, A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI} P^I, B_1^{IV} B_2^V B_3^{VI} P^{II}, C_1^{IV} C_2^V C_3^{VI} P^{III}$ KIRKMAN-pontok rendre a $T=(t_1 t_2 t_3), T_1, T_2, T_3$ pontokkal coincidálnak.

Minthogy az 1 2 3 4 5 6 pont háromszorosan involutiós helyzetű a T_i középpontra és a t_i tengelyre vonatkozólag, a következő PASCAL-egyenespárok

$$a_i^{II} a_i^{III}, b_i^I c_i^I, b_i^{III} c_i^{II}, \beta_i^{III} \gamma_i^{III}, \beta_i^{IV} \gamma_i^{IV}, \beta_i^V \gamma_i^V, \beta_i^{VI} \gamma_i^{VI} \text{ a } T_1, t_1\text{-től,}$$

$$b_i^{III} b_i^I, c_i^I a_i^{II}, c_i^I a_i^{III}, \gamma_i^{III} \alpha_i^I, \gamma_i^{IV} \alpha_i^{IV}, \gamma_i^V \alpha_i^V, \gamma_i^{VI} \alpha_i^{VI} \text{ a } T_2, t_2\text{-től,}$$

$$c_i^I c_i^{II}, a_i^{III} b_i^{III}, a_i^{II} b_i^I, \alpha_i^I \beta_i^{II}, \alpha_i^{IV} \beta_i^{IV}, \alpha_i^V \beta_i^V, \alpha_i^{VI} \beta_i^{VI} \text{ a } T_3, t_3\text{-től,}$$

valamint az ezekhez rendelt KIRKMAN-pontok harmonícusan vannak elválasztva.

Ezzel megállapítottuk az összes PASCAL-egyenések és KIRKMAN-pontok különös helyzetét a $T_1 T_2 T_3 t_1 t_2 t_3$ alakzat irányában és áttérhetünk a STEINER-pontok és egyenesek, valamint a CAYLEY-egyenések és SALMON-pontok képezte HESSE-configurációkra.

2. A STEINER-pontokból és CAYLEY-egyenesekből a Π a t_n fekszik, a π a T -n megy keresztül, de mindkettő határozatlan;

¹ »Ha két háromszög háromféleképp perspectivás helyzetű és a hozzá tartozó collineatio-középpontok egy egyenesen fekszenek, akkor a háromszögek szögpontjai egy kúpszeletnek pontjai«.

Ugyanis, ha az

$$\left. \begin{array}{l} M_1 M_2 M_3 \\ N_1 N_2 N_3 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} M_1 M_2 M_3 \\ N_2 N_3 N_1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} M_1 M_2 M_3 \\ N_3 N_1 N_2 \end{array} \right\}$$

perspectivás háromszögek collineatio-középpontjai O_1, O_2, O_3 , akkor és csak akkor lesz az $M_1 N_1 M_2 N_2 M_3 N_3$ hatszög PASCAL-hatszög, ha a szemben fekvő oldalainak metszőpontjai

$(M_1 N_1, N_3 M_3) = O_1, (N_1 M_2, M_3 N_2) = O_2, (M_2 N_3, N_2 M_1) = O_3$
egy egyenesen fekszenek.

$$P \equiv T, A_1 A_2 A_3 \equiv T_1, B_1 B_2 B_3 \equiv T_2, \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \equiv T_3,$$

$$p \equiv t, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \equiv t, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \equiv t_2, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \equiv t_3;$$

az $A_1 A_2 A_3, B_1 B_2 B_3, C_1 C_2 C_3$ pontok rendre a t_1, t_2, t_3 egyeneseken fekszenek és az $a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3, c_1 c_2 c_3$ egyenesek megfelelőleg a T_1, T_2, T_3 pontokon mennek keresztül.

Ama háromszögeknek oldalai és a t_i egyenesek egyszeres, a t pedig háromszoros STEINER-egyenesek; ugyanígy a következő három háromszög szögpontjai és a T_i pontok egyszeres, a T pedig háromszoros SALMON-pontok.

Az általános PASCAL-hatszögben a két HESSE-configuratio három, ugyanarra a középpontra, de különböző tengelyre, illetve ugyanarra a tengelyre, de különböző középpontokra perspectivás háromszög; a jelen hatszögben azonban mindkét HESSE-configuratio három-három, ugyanarra a középpontra és ugyanarra a tengelyre perspectivás háromszögből áll.

3. Láttuk a két előbbi § ban, hogy a $[Vv]_j, j[Vv]$ configuratiók pontjai és egyenesei az involutio-középpontok és tengelyek irányában akkép viselkednek, mint a $[Vv]_0$ configuratio pontjai és egyenesei; ennél fogva ez a jelen hatszögben is ugyanígy lesz. Ezért:

Ha egy kúpszeleten hat pontot veszünk fel, melyek háromféleképp képeznek involutiót a $T_1 T_2 T_3$ középpontokra és a $t_1 t_2 t_3$ tengelyekre, mely középpontok és tengelyek tehát egy t -egyenesen fekszenek, illetve egy T -ponton mennek keresztül, akkor ama hat pont oly PASCAL-hatszögnek szögpontja, melynek négy-négy KIRKMAN-pontja a T_1, T_2, T_3 -mal és három KIRKMAN-pontja a T -vel egyesül és négy-négy PASCAL-egyenes a t_1, t_2, t_3 -mal és három PASCAL-egyenes a t -vel egyesül. Tizennyolczpár KIRKMAN-pont és ugyanannyi PASCAL-egyenes a T_i, t_i -től harmonicusan van elválasztva. Ugyanígy viselkednek a többi $[Vv]_j, j[Vv]$ configuratiók is a $T_i t_i$ alakzat irányában.

A STEINER-pontok közül egy határozatlan, ennek ellenpontja a T -vel, három-három STEINER-pont a T_1, T_2, T_3 -mal egyesül; ez utóbbiaknak ellenpontjai három perspectivás háromszögnek szögpontjai, melyeknek megfelelő oldalai és szögpontjai a T_i pontokon mennek keresztül, illetve a t_i egyeneseken fekszenek.

A CAYLEY-egyenesek közül egy határozatlan, ennek ellenegyenesé a t-vel, három-három CAYLEY-egyenes a t_1, t_2, t_3 -mal egyesül; ez utóbbiaknak ellenegyenesei három perspektívás háromszögnek oldalai, melyeknek megfelelő oldalai és szögpontjai a T_i pontokon mennek keresztül, illetve a t_i egyeneseken fekszenek.

4. Oly Pascal-hatszögről, melynek szögpontjai négyféleképp képeznek involutiót.

1. Az imént tárgyalt két hatszögben a kúpszeleten oly hat pontot vettünk fel, melyek az elsöben kétszeresen, a másodikban háromszorosan képeztek involutiót. E két esetet azonban egyesíteni is lehet, azaz: lehet a kúpszeleten oly hat pontot felvenni, melyek négyszeresen képeznek involutiót. Ily hat pont egy különös PASCAL-hatszögnek szögpontja, mely az előbbi két hatszögnek különleges tulajdonságait egyesíti. E hatszög a következőképp szerkeszthető:

Egy kúpszeleten felvesszünk három pontot, 1 3 5-öt; ezeknek érintői a 3 5, 5 1, 1 3 egyeneseket az U_1, U_2, U_3 pontokban metszik, melyek egy t-egyenesen fekszenek. Az 1, 3, 5 pontoknak projectiói a t-egyenesnek abból a T_1 pontjából, mely az U_1 -et az U_2, U_3 -tól harmonicusan elválasztja, 2, 4, 6; az 1 2 3 4 5 6 hatszög már a keresett.

Ugyanis az $U_2 U_3, U_1 T_1$ pontpárok harmonicusan lévén elválasztva, az U_1 polárisa $T_1 1 2 = u_1$, és a 3 5, 4 6 pontpárok harmonicusan vannak elválasztva az 1 2-től; a 4 6 egyenes az U_1 ponton megy keresztül és az $(1 2, 3 6) = T$ pont a t-nek polusa. Ebből következőleg a 2 4, 3 6 egyenesek az U_2, U_3 ponton mennek keresztül, az 1 4, 2 5, 3 6 és az 1 6, 2 3, 4 5 egyenesek egymást a t-nek T_2, T_3 pontjában metszik. Összefoglalva,

$$T = (1 2, 3 6, 4 5), \quad T_1 = (1 2, 3 4, 5 6), \quad T_2 = (1 4, 3 6, 5 2), \\ T_3 = (1 6, 3 2, 5 4)$$

és az $U_1 U_2 U_3 T_1 T_2 T_3 T$ pontok polárisai a

$$1 2 = T_1 T = u_1, \quad 3 6 = T_2 T = u_2, \quad 5 4 = T_3 T = u_3, \quad U_1 T = t_1, \quad U_2 T = t_2, \\ U_3 T = t_3, \quad U_1 U_2 U_3 T_1 T_2 T_3 = t.$$

Ebből következnek: 1.) az 1 2, 3 6, 5 4; 1 2, 3 4, 5 6; 1 4, 3 6, 5 2; 1 6, 5 2, 5 4 pontpárok a kúpszeleten involutiót képeznek, melynek középpontja, illetőleg tengelye $T, t; T_1, t_1; T_2, t_2; T_3, t_3$; 2.) a $T_1 U_1, T_3 U_3, T_2 U_2; T_1 U_1, T_3 T_2, T_2 U_3; T_1 U_2, T_3 U_3, T_2, U_1; T_1 U_3, T_3 U_1, T_2 U_2$ pontpárok, mint amazoknak projectiói a 2 pontból involutiót képeznek a t egyenesen; 3.) az 1 1, 2 2, 5 3, 4 6; 3 3, 6 6, 1 5, 2 4; 5 5, 4 4, 3 1, 6 2 pontpárok a kúpszeleten és a $T_1 T_1, U_1 U_1, T_2 T_3, U_2 U_3; T_3 T_3, U_3 U_3, T_1 T_2, U_1 U_2; T_2 T_2, U_2 U_2, T_3 T_1, U_3 U_1$ pontpárok a t egyenesen involutiót képeznek, tehát 4.) nemcsak a $T_1 U_1, U_2 U_3$ pontpárok vannak harmonicusan elválasztva, hanem általában a $T_i U_i$, pontpár harmonicusan választja el az $U_j U_k, T_j T_k$ pontpárokat; végre 5.) az

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & \{ \\ 2 & 6 & 4 & \} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & \{ \\ 2 & 4 & 6 & \} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & \{ \\ 4 & 6 & 2 & \} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & \{ \\ 6 & 2 & 4 & \} \end{array}$$

háromszögpárok perspectivásak a $T, t; T_1 t_1; T_2 t_2; T_3 t_3$ collineatio-középpontokra és tengelyekre vonatkozólag.

Az 1 2 3 4 5 6 PASCAL-hatszögre nézve pedig azt látjuk, hogy a PASCAL-egyenesek közül

$$\begin{array}{l} \pi^{IV} \pi^V \pi^{VI} \alpha_3^I \beta_3^{II} \gamma_3^{III} \equiv t, \quad p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI} \equiv t_1, \\ p^{II} b_1^{IV} b_2^V b_3^{VI} \equiv t_2, \quad p^{III} c_1^{IV} c_2^V c_3^{VI} \equiv t_3, \end{array}$$

az a_3^i, b_3^i, c_3^i , egyenesek a T -n, az $\alpha_j^i, \beta_j^i, \gamma_j^i$ egyenesek pedig a T_1, T_2, T_3 ponton mennek keresztül; a KIRKMAN-pontok közül

$$\begin{array}{l} \Pi^{IV} \Pi^V \Pi^{VI} A_3^I B_3^{II} \Gamma_3^{III} \equiv T, \quad P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI} \equiv T_1, \\ P^{II} B_1^{IV} B_2^V B_3^{VI} \equiv T_2, \quad P^{III} C_1^{IV} C_2^V C_3^{VI} \equiv T_3, \end{array}$$

az A_3^i, B_3^i, C_3^i pontok a t -n, az A_j^i, B_j^i, Γ_j^i pontok pedig a t_1, t_2, t_3 egyeneseken fekszenek.

A T pontból kisugárzó $a_3^i b_3^i c_3^i$ egyenesek háromszor képeznek involutiót, mégpedig a: $b_3^I c_3^I, a_3^{II} a_3^{III}, c_3^{II} b_3^{III}; c_3^{II} a_3^{II}, b_3^{III} b_3^I, a_3^{III} c_3^I; a_3^{III} b_3^{III}, c_3^I c_3^{II}, b_3^I a_3^{II}$ párok, melyeknek kettős-sugarai $t_1 u_1, t_2 u_2, t_3 u_3$; ugyanígy képeznek az ezekhez rendelt KIRKMAN-pontok is egy-egy involutiót a t egyenesen, a $T_i U_i$ kettős-pontokkal.

Hasonlóképp involutiót képeznek a T_i pontokból kisugárzó: $\alpha_1^I \alpha_2^I, \alpha_1^{VI} \alpha_2^{VI}, \alpha_1^V \alpha_2^{IV}, \alpha_3^{IV} \alpha_3^V; \beta_1^{II} \beta_2^{II}, \beta_1^{VI} \beta_2^{VI}, \beta_1^V \beta_2^{IV},$

$\beta_3^{IV} \beta_3^V$; $\gamma_1^{III} \gamma_2^{III}$, $\gamma_1^{VI} \gamma_2^{VI}$, $\gamma_1^V \gamma_2^{IV}$, $\gamma_3^{IV} \gamma_3^V$ PASCAL-egyenesek, melyeknek kettős sugarai $t u_1$, $t u_2$, $t u_3$ és az ezekhez rendelt KIRKMAN-pontok a t_i egyeneseken, a $T U_i$ kettőspontokkal.

A t egyenes $C_3^I B_3^I A_3^{II} C_3^{II} B_3^{III} A_3^{III}$ pontjaiból kisugárzó $b_1^I b_2^I$, $c_1^I c_2^I$, $c_1^{II} c_2^{II}$, $a_1^{II} a_2^{II}$, $a_1^{III} a_2^{III}$, $b_1^{III} b_2^{III}$ egyenespárok és a T ponton keresztülmenő $c_3^I b_3^I a_3^{II} c_3^{II} b_3^{III} a_3^{III}$ egyeneseken a $B_1^I B_2^I$, $C_1^I C_2^I$, $C_1^{II} C_2^{II}$, $A_1^{II} A_2^{II}$, $A_1^{III} A_2^{III}$, $B_1^{III} B_2^{III}$ pontpárok harmonikusán vannak elválasztva a T , t -től.

A következő sorokban felírt egyenespárok harmonikusán vannak elválasztva az U_1 , u_1 , illetve U_2 , u_2 és U_3 , u_3 -tól

$$\begin{aligned} & b_1^I c_2^I, c_1^I b_2^I, a_1^{II} a_2^{III}, a_1^{III} a_2^{II}, b_1^{III} c_2^{II}, b_2^{III} c_1^{II}; \beta_1^{VI} \gamma_2^{VI}, \\ & \beta_2^{VI} \gamma_1^{VI}, \beta_3^{IV} \gamma_3^V, \beta_3^V \gamma_3^{IV}, \beta_2^{IV} \gamma_1^V, \beta_1^V \gamma_2^{IV}, \beta_1^{II} \gamma_2^{III}, \beta_2^{II} \gamma_1^{III}; \\ & c_1^{II} a_2^{II}, c_2^{II} a_1^{II}, b_1^{III} b_2^I, b_1^I b_2^{III}, c_1^I a_2^{III}, c_2^I a_1^{III}, \gamma_1^{VI} \alpha_2^{VI}, \\ & \gamma_2^{VI} \alpha_1^{VI}, \gamma_3^{IV} \alpha_3^V, \gamma_3^V \alpha_3^{IV}, \gamma_2^{IV} \alpha_1^V, \gamma_1^V \alpha_2^{IV}, \gamma_1^{III} \alpha_2^I, \gamma_2^{III} \alpha_1^I; \\ & a_1^{III} b_2^{III}, a_2^{III} b_1^{III}, c_1^I c_2^{II}, c_2^I c_1^{II}, a_1^{II} b_2^I, a_2^{II} b_1^I, \alpha_1^{VI} \beta_2^{VI}, \\ & \alpha_2^{VI} \beta_1^{VI}, \alpha_3^{IV} \beta_3^V, \alpha_3^V \beta_3^{IV}, \alpha_2^{IV} \beta_1^V, \alpha_1^V \beta_2^{IV}, \alpha_1^I \beta_2^{II}, \alpha_2^I \beta_1^{II}; \end{aligned}$$

és ezeknek az egyenespároknak metszőpontjai, a mint azok egymásra következnek, harmonikusán vannak elválasztva a T - és t -től. Ugyanez mondható, a változtatandók megváltoztatásával, a megfelelő KIRKMAN-pontpárokról is.

2. A szóban levő hatszög STEINER-pontjai és CAYLEY-egyenesei közül Π és π határozatlan a t -n, illetve a T körül;

$$\begin{aligned} P A_3 B_3 C_3 &\equiv T, A_1 A_2 A_3 \equiv T_1, B_1 B_2 B_3 \equiv T_2, \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \equiv T_3, \\ p a_3 b_3 c_3 &\equiv t, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \equiv t_1, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \equiv t_2, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \equiv t; \end{aligned}$$

a többi STEINER-pont és CAYLEY-egyenes két háromszögpárnak $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$; $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$ -nek szögpontja és oldala, melyek a T , t ; U_i , u_i collineatio-középpontokra és tengelyekre, tehát négyszeresen perspectivásak.

Ez utóbbi állításunk igazolására csak ki kell mutatnunk, hogy az $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$; $A_1 B_1 C_1$, $A_2 C_2 B_2$ háromszögpárok szögpontjai a T , t , illetve az U_1 , u_1 -től harmonikusán vannak elválasztva. De a T , t -től harmonikusán elválasztott $a_1^{II} a_2^{II}$, $b_1^{III} b_2^{III}$, $c_1^I c_2^I$ egyenespárok a $t_1 = a_1^{IV} a_2^V$, illetve $t_2 = b_1^{IV} b_2^V$, $t_3 = c_1^{IV} c_2^V$ egyeneseket az $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ pontpárokbán metszik; és az U_1 - és u_1 -től harmonikusán elválasztott $a_1^{II} a_2^{III}$, $b_1^I c_2^I$, $c_1^I b_2^I$ egyenes-

párok közül az első a t_1 et az $A_1 A_2$ -ben, a második és harmadik pedig az U_1 - és u_1 -től harmonicusan elválasztott $t_2 t_3$, $t_3 t_2$ egyenespárt a $B_1 C_2$, $C_1 B_2$ pontpárookban metszi.

A STEINER-egyenesek és SALMON-pontok közül a t és T egy háromszoros, a t_i , u_i és a T_i , U_i egy-egy egyszeres; végre az $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ háromszögeknek oldalai és az $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$ háromszögeknek szögpontjai egyszeres STEINER-egyenesek, illetve SALMON-pontok.

3. Hátra volna még a $[Vv]_j$ és ${}_j[Vv]$ konfigurációk helyzetének megvizsgálása a szilárd $T T_1 t t_1$ alakzat irányában. Ámde, mint már említettük, e PASCAL-hatszög az előbb tárgyalt két PASCAL-hatszögnek különös esete, úgy, hogy mindkettőnek különleges mi voltát önmagában egyesíti. Az előbbi két hatszög felől azonban kimutattuk volt, hogy a $[Vv]_j$, ${}_j[Vv]$ konfigurációk a $T T_1 t t_1$ alakzat irányában ép úgy viselkednek, mint a $[Vv]_0$ configuratio; ennél fogva e körülménynek elég bizonyító ereje van annak kimutatására, hogy a hatszög $[Vv]_j$, ${}_j[Vv]$ konfigurációinak helyzete a $T T_1 t t_1$ iránt megegyezik a $[Vv]_0$ configuratioéval.

Ezért kimondhatjuk, hogy

Ha egy kúpszeleten hat pontot veszünk fel, melyek négy-félékép képeznek involutiót, még pedig a T , t ; T_1 , t_1 ; T_2 , t_2 ; T_3 , t_3 középpontra, illetőleg tengelyre nézve, akkor e hat pont egy különös PASCAL-hatszögnek szögpontja.

Ha $T=(t_1 t_2 t_3)$, $t=(T_1 T_2 T_3)$, $U_1=(t t_1)$, $u_1=(T T_1)$, akkor ama hatszög

PASCAL-egyeneséből hat a t -vel és négy-négy a t_i -vel egyesül; nyolcz-nyolcz a t_i pontokon megy keresztül és oly involutiót képez, melynek kettőssugarai $t u_i$; hat a T -ponton megy keresztül és háromszorosan képez involutiót, melynek kettőssugarai a $t_i u_i$ egyenespárok. A t egyenesen fekvő hat KIRKMAN-pontból kisugárzó

KIRKMAN-pontjaiból hat a T -vel és négy-négy a t_i -vel egyesül; nyolcz-nyolcz a t_i egyeneseken fekszik és involutiót képez, melynek kettőspontjai $T U_i$; hat a t egyenesen fekszik és háromszorosan képez involutiót, melynek kettőspontjai a $T_i U_i$ pontpárok. A T ponton keresztül menő hat PASCAL-egyenesen hat KIRKMAN-pont-

hat PASCAL-egyenespár a T -és t -től és tizennégy-tizennégy egyenespár az U_i -és u_i -től harmonicusan van elválasztva.

A STEINER-pontokból egy határozatlan a t egyenesen; a T négyszeres, a T_i pontok pedig háromszoros STEINER-pontok; a többi hat egy oly háromszögpárnak szögpontja, melyek a T és U_i collineatio-középpontokra és és t és u_i tengelyekre vonatkozólag, tehát négyszeresen perspectivásak.

E háromszögpárnak hat oldala és a t_i , u_i egyenesek egyszeres, a t pedig háromszoros STEINER-egyenes.

A hatszög $[Vv]_i$, ${}_i[Vv]$ configurációinak egyenesei és pontjai akkép viselkednek a T T_i t t_i iránt, mint a hozzájuk rendelt PASCAL-egyenesek és KIRKMAN-pontok.

pár fekszik, mely T - és t -től és tizennégy-tizennégy pontpár az U_i - és u_i -től harmonicusan van elválasztva.

A CAYLEY-egyenesekből egy határozatlan, de a T ponton megy keresztül; a t négyszeres, a t_i egyenesek pedig háromszoros CAYLEY-egyenesek; a többi hat egy oly háromszögpárnak oldala, melyek a T és U_i collineatio-középpontokra és a t és u_i tengelyekre vonatkozólag, tehát négyszeresen perspectivásak.

E háromszögpárnak hat szögpontja és a T_i , U_i pontok egyszeres, a T pedig háromszoros SALMON-pont.