A LAGRANGE-FÉLE MOZGÁSI EGYENLETEK THERMODYNAMIKAI ÉRTELMEZÉSÉRŐL.

Dr. Farkas Gyulától.

A thermodynamika második főtételének azt a három mozgástani analogonját, melyek egyike Boltzmann, egyike Clausius, egyike Szilytől származik, 1884-ben Helmholtz egy negyedikkel tetézte. [1]) Elmélete abban a tekintetben érintkezik a Szilyével, hogy ezé a Hamilton-féle elven, az övé pedig a Lagrange-féle egyenleteken alapszik. J. J. Thomson (a cambridgei tanár), egy ez idén német nyelven is megjelent munkájában [2]) ugyancsak a Lagrange-féle egyenletekből elmél ki thermodynamikai értelmezésre alkalmas relatiókat. Módszere arra nézve a lényeges pontra nézve a Helmholtzéval találkozik, hogy a Lagrange-féle egyenletekben szereplő coordináták czélszerű osztályozásán gyökeredzik. Attól való eltérésének, vagy egyéb rendbéli azzal való találkozásának öregéből való jellemzése is aránylag hoszszadalmas volna. Csak annyi legyen említve, hogy Helmholtz értekezése elején definiált igen speczialis rendszerről úgy emelkedik általánosabbhoz, hogy a coordináták egy osztályának változási sebességei s a coordináták közt invarians relatiókat tételez fel, míg Thomson arra az általánosságra törekszik, mely e complicatio analysise nélkül elérhető. — Époly kevéssé bocsátkozom egyszerüen egymás mellé állított ismertetésekbe, noha Thomson dús tartalmú művének azt a kis részét [3]), melyhez az itt előadandó elmélet leginkább símul, részint az összefüggés kedvéért, részint a külömbözések feltüntetésére legmegfelelőbb dolog volna legalább vázlatilag bemutatnom. A ren-

[1]) Principien der Statik monocyklisches Systeme. Journal f. d. r. u. aw. Math. 97. Band.

[2]) Anwendungen der Dynamik auf Physik u. Chemie.

[3]) Sechstes Kapitel (§ 45—§ 50).

delkezésemre álló tér szűk volta nem engedi s így annak a constatálására szorítkozom, hogy úgy vélem, tárgyi tekintetben csak küllerjileg különbözik a Thomsonétól ez az elmélet, péld. kifejezetten kapcsolatba lép a hydro- és aëro-mechanicával s a rugalmassági elmélettel, a mozgási erély kifejezését legalább az egyik coordinátaosztály általánosabb alakú functiójaként kezeli stb. Formai tekintetben sokszerüen elüt a Thomsonétól, a mi leginkább annak a törekvésnek a következménye, hogy a czélon tartott analogiák postulatumait analyticus definitiók adják ki. Ilyen postulatum pl. hogy a mozgási erély kifejezésének egy része ne tegyen számot.

Az előadás szövésének könnyítése végett már előre bevezetek néhány kevéssé használt vagy épen új elnevezést és szólásmódot. Ezek a Lagrange-féle egyenletekben előforduló mennyiségekre, illetőleg azoknak egymáshoz való viszonyára vonatkoznak. Jelentményük kidomborításáért a Lagrange-féle egyenleteknek a virtualis momentumok egyenletével való összefüggésére is vetek egy pillantást.

A virtualis momentumok egyenlete $SP\delta p = Smp''\delta p$. Itt p a végtelen kis m tömeg pont-affixumának egyik cartesiusi coordinátája; a P mennyiség a p coordináták, a p' sebességi componensek és az idő functiójának van feltételezve s aszerint, a mint poz. vagy neg., az m tömegpontra a p tengely poz. vagy neg. irányában ható az az erő, melynek megfelelően az m tömegpont p tengelyi vetülete az u. n. mozgási feltételek hiányában, vagyis szabadon mozogna; p'' a p coordináta változásának sebesedése; a δp variatiók a coordináták általában végtelen gyors incrementumainak oly rendszerébe tartoznak, mely a coordináták közt fennálló és általában az idővel változó feltételi egyenletekkel összefér; a summatio az összeségére kiterjesztendő legalább is oly tömegpontoknak, melyek mozgása a coordináták révén összefüggésben levő erőket és feltételeket ural.

A feltételi egyenleteket akként fejezzük ki, hogy a coordinátákat épen elégséges számú paraméter — új coordináta — és az idő oly functioivá tegyük, miszerint a paraméterek eliminatiója a régi coordináták és az idő közt fennálló relatiókhoz vezessen. Az új coordináták általános jele q legyen. Változási sebességüket, illetőleg sebesedésüket q', q'' egyszerűen sebességük, illetőleg sebesedésüknek fogjuk nevezni. A p coordináták időderivátumainak és variatióinak az ő segedelmükkel való kifejezései

$$p' = \Sigma \frac{\partial p}{\partial q} q' + \frac{\partial p}{\partial t} , \qquad \delta p = \Sigma \frac{\partial p}{\partial q} \delta q ,$$

ahol a δq variatiók tetszőlegesek. Egynek kivételével tegyük zérussá a δq variatiókat, úgy hogy most $\delta p = \frac{\partial p}{\partial q} \delta q$. Beirva ezt a virtualis momentumok egyenletébe,

$$\boldsymbol{S} \, P \frac{\partial p}{\partial q} = \boldsymbol{S} \, m \, p'' \frac{\partial p}{\partial q}$$

egyenlethez jutunk és lényegileg ez már a Lagrange-féle egyenletek representánsa. Hogy formailag is azzá legyen, evégre még csak a következő azonosságlánczot kell alkalmaznunk reá:

$$p'' \frac{\partial p}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(p' \frac{\partial p}{\partial q}\right) - p' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right) = \frac{d}{dt}\left(p' \frac{\partial p'}{\partial q'}\right) - p' \frac{\partial p'}{\partial q} ,$$

Ezekkel a jelölésekkel:

$$\boldsymbol{S} \, P \frac{\partial p}{\partial q} = Q , \qquad \tfrac{1}{2} \boldsymbol{S} \, m \, p'^2 = T,$$

nyilvánvalólag

$$Q = \boldsymbol{S} \, m \, p'' \frac{\partial p}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} .$$

A Q-nak definitiójánál fogva $Q\delta q$ a pontokra ható erők az a munkája, mely a pontoknak a q coordináta δq megváltozásával járó elmozdulásához tartozik. Ebben az értelemben úgy beszélünk a Q-ról, mint erőről, mely a q coordinátára hat, és ennek δq megváltozásán $Q\delta q$ munkát végezi.

A következőkben fel fogjuk majd tenni, hogy a feltételi egyenletek az időtől függetlenek, minélfogva érvényesül az eleven erő elve. Tényleg, mivel most

$$p' = \Sigma \frac{\partial p}{\partial q} q' ,$$

így $\quad \Sigma S \mathrm{m}\, \mathrm{p}'' \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{q}} \mathrm{dq} = S \mathrm{m}\, \mathrm{p}'' \mathrm{dp} = \mathrm{dT}, \quad$ tehát

$$\Sigma \mathrm{Q} \mathrm{dq} = \mathrm{dT},$$

mely egyenlet az eleven erő elvét a Q erők munkájával fejezi ki. Igy szőjjük szavakba: a Q erők dt idő alatti munkájának eredménye a mozgási erélynek a dt idő alatti megváltozása. Az egyenletet erély-egyenletnek nevezzük.

A q coordinátákat és velök együtt a reájok ható Q erőket két osztályba fogjuk sorozni. Az egyik osztályba tartozókat φ, illetőleg $-\Phi$, a másikba tartozókat ψ, illetőleg Ψ jelöljék, mely jelöléseknek megfelelően definitióink

$$\mathrm{p}' = \Sigma \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \varphi} \varphi' + \Sigma \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \psi} \psi' \;,$$

$$-\Phi = \Sigma \mathrm{P} \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \varphi}, \qquad \Psi = \Sigma \mathrm{P} \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \psi} \;,$$

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2} S \mathrm{m} (\Sigma_\varphi \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \varphi} \varphi')^2 + \Sigma_\varphi \varphi' \Sigma_\psi \psi' \, S \mathrm{m} \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \psi} + $$

$$+ \tfrac{1}{2} S \mathrm{m} (\Sigma_\psi \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \psi} \psi')^2$$

és egyenleteink

$$-\Phi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\mathrm{dT}}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \varphi}, \qquad \Psi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \psi} \;,$$

melyek az eleven erő elvének kifejezéseként magukban foglalják

$$\Sigma \Psi \mathrm{d}\psi = \mathrm{dT} + \Sigma \Phi \mathrm{d}\varphi$$

erély-egyenletet.

A p' kifejezésének alapján a pontok sebességét a kétféle coordináta-osztály szerinti két partialis sebességből összetettül fogjuk fel, melynek componenseit

$$\mathrm{p}'_\varphi = \Sigma \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \varphi} \varphi' \text{ illetőleg } \mathrm{p}'_\psi = \Sigma \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \psi} \psi'$$

jelölik. Ez által a mozgást minden időpillanatra két mozgás-részletből összetettként imagináljuk. Mint a mozgás φ, illetőleg ψ részletéről, vagy még rövidebben, mint φ, illetőleg ψ mozgásról beszélünk róluk. A mozgási erélynek azt a részét, mely csupán a φ' sebességeket tartalmazza, az ő φ-részének, azt a részét, mely csupán a ψ' sebességeket tartalmazza az ő ψ-részének, a hátralevő részét az ő $\varphi\psi$-részének nevezzük és T_φ, T_ψ, $T_{\varphi\psi}$ symbolumokkal jelöljük azokat:

$$T = T_\varphi + T_{\varphi\psi} + T_\psi \,.$$

---

1. §. A térnek egy véges kiterjedésü részéről tegyük fel, hogy a kezdő időpillanatban bármely és bármi kis véges része végtelen sok tömegpontot tartalmaz. Egy tömegpont cartasiusi coordinátáit x, y, z, kezdő coordinátáit a, b, c jelöljék.

2. §. x_0, y_0, z_0 a φ coordináták és a, b, c kezdő coordináták egyértékű, véges, folytonos functióit jelöljék, melyek bármely két szomszédos ponthoz tartozó értékkülönbözete folyvást épen egy rendű legyen a két szomszédos pont kölcsönös távolságával, f ugyancsak a φ coordináták és a, b, c kezdő coordináták egyértékü, véges és általában folytonos functiója legyen, melynek folytonossága legfeljebb egyes felületek a, b, c pontjaiban hiányozzék. g_a, g_b, g_c végtelen kis abs. értékű functióit jelöljék a ψ coordinátáknak s végtelen kis abs. értékeik maximumai is magasabb rendű végtelen kicsinyek legyenek, mint bármelyik tömegpontnak egy hozzá legközelebbi tömegponttól való kezdeti távolsága. A feltételi egyenletek

$$x = x_0 + f \cdot g_a \,, \quad y = y_0 + f \cdot g_b \,, \quad z = z_0 + f \cdot g_c$$

egyenletek legyenek.

Ezek szerint minden tömegpont folyvást végtelen közel van egy-egy olyan ponthoz, mely a maga helyét csak a φ coordinátákkal változtatja (t. i. a hozzá tartozó x_0, y_0, z_0 ponthoz). Ezt a pontot a x, y, z pont által végzett ψ-mozgás centrumának nevezem el. A ψ-mozgás centrumai a hydro- vagy aëro-mechanica, vagy a rugalmasság elméletének elvei szerint mozognak, mert a coordinátáik, mint a kezdő helyeik és (a φ parameterek közvetítésével), mint az idő folytonos, véges, egyértékű functiói definiálvák. Azok a tömegpontok, melyek a kezdő időpillanatban végtelen közel voltak egymáshoz, folyvást ugyanoly rendű végtelen közelségben maradnak. A ψ-mozgással az egymáshoz legközelebbi pontok kölcsönös távolságai is a maguk (végtelen kis) méretéhez képest elenyésző változásokban részesednek. Még oly kis véges tért elfoglaló tömegpontok csoportja az elfoglalta tér nagyságát, alakját, orientáltságát a ψ-mozgással bármekkora idő alatt is, csak elenyésző kis mértékben változtatja meg, nemkülönben tömegcentrumának a helyét és bármely tengelyre vonatkoztatott inertia momentumát, mégpedig a térfogata dimensioinak, a tömegcentruma coordinátáinak s az inertia-momentumainak a ψ-mozgás révén való megváltozása folyvást magasabb rendű végtelen kicsiny, mint az egymáshoz legközelebbi pontok kölcsönös távolsága, míg térfogat, alak, tömegcentrumi coordináták, inertia-momentumok a φ paraméterek változásával véges idő alatt véges változásokat szenvedhetnek (a ψ-mozgás centrumainak mozgása következtében).

3. §. A g functiókról felteszem, hogy változási sebességük általában véges (tehát a tömegpontok ψ-mozgásaikat az x_0, y_0, z_0 centrumok körűl véges sebességgel végezik). Ennélfogva a g functiók véges idő alatt végtelen sok maximum- és minimumot érnek el (a ψ-mozgásra véges idő alatt az x, y, z coordinátáknak végtelen sok maximuma és minimuma esik). Igy a $dg:dt$ hányados a dt időincrementum rendjének egy osztályánál elenyésző, és pedig bizonyosan elenyésző azoknál a dt incrementumoknál, melyek alacsonyabb rendűek, mint a g functio abs. értékeinek maximumai, mert a g-nek az a összes változása (s ezt jelöli a dg), melyet a dt idő alatt szenved, nem lehet nagyobb, mint átfutott abs. értékeinek legnagyobbika. Oly dt incrementumoknál, melyeknek rendje egyezik a g functio két szélső érték közti változásának rendjével, a $dg:dt$ hányados határozatlan, mert a dt incrementum részeihez tartozó részei a dg incrementumnak előbbiekkel általában különböző értékű hányadosokat képeznek. Csak oly dt incrementumoknál lehet a $dg:dt$ hányadosnak határozott értéke, mely magasabb rendű, mint a g-nek két-két szélső érték közti megváltozása. Ilyen dt incrementumokra vonatkozóknak jelentem ki a mozgási erély kifejezésében előforduló $p' = p'_\varphi + p'_\psi$ időderivátumokat, valamint a Φ és Ψ erők kifejezéseiben előforduló $d(\partial T:\partial\varphi'):dt$ illetőleg $d(\partial T:\partial\psi'):dt$ időderivatumokat.

4. §. **Felteszem, hogy a g functiók által directe csak végtelen közeli pontok mozgásai függnek egymástól számot tevőleg**, nevezetesen, hogy a ψ parameterek egy csoportja fordul elő csak számbamenőleg egy tömegpont helyhatározóinak kifejezéseiben (e kifejezések g-iben) és ugyanez a ψ paramétercsoport még csak azoknak a tömegpontoknak a g-iben van meg számbamenőleg, melyek azokhoz végtelen közel vannak.

5. §. **Felteszem, hogy csak azok a Ψ erők vannak adirecte számot tevő összefüggésben egymással, melyek egy csoportba tartozó ψ coordinátákra hatnak.** Nevezetesen a $\Psi_i = SP\frac{\partial p}{\partial \psi_i}$ kifejezésben már a 4. §. következményeként csak azok a tagok tesznek számot, melyek a ψ_i paraméter csoport-társait tartalmazó p-kre vonatkoznak, de most még az is fel van tételezve, hogy a megmaradt tagok P erő-factorai csak a hatásaik alatti pontok és ezekhez végtelen közeliek p coordinátáit és p' sebességi componenseit tartalmazzák számot tevőn.

Ekként lánczolatosan az egész rendszer ψ-mozgása összefügg ugyan és pedig úgy a g functiók, mint a P erők tekintetében, de minden egyes pont ψ-mozgása directe csak a hozzá végtelen közeli pontok ψ-mozgásával van számot tevő összeköttetésben.

6. §. **Felteszem, hogy a rendszer bármily kis terjedelmü véges részéhez tartozó tömeg-czentrumi coordinátáknak és valamennyi inertia-momentumoknak a ψ-mozgáshoz tartozó változási sebessége folyvást elenyésző**, tehát, hogy ha

$$
\begin{array}{lll}
S\,m\,x = \xi, & S\,m\,y = \eta, & S\,m\,z = \zeta, \\
S\,m\,x^2 = I_{xx}, & S\,m\,y^2 = I_{yy}, & S\,m\,z^2 = I_{zz}, \\
S\,m\,yz = I_{yz}, & S\,m\,zx = I_{zx}, & S\,m\,xy = I_{xy}
\end{array}
$$

irjuk, a hol a summálások a rendszer bármely igen kis terjedelmű (végtelen sok tömegpontból álló végtelen kis) részére vonatkoztatvák,

$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial \psi}\psi' = 0\ ,\ .\ ,\ .$$

$$\Sigma \frac{\partial I_{xx}}{\partial \psi}\psi' = 0\ ,\ .\ ,\ .$$

$$\Sigma \frac{\partial I_{yz}}{\partial \psi}\psi' = 0\ ,\ .\ ,\ .$$

Könnyű meggyőződni a felől, hogy oly igen kis terjedelmű rendszerrészekre nézve, melyekben az f functiónak nincs folytonosság-szakadása, ezeknek az egyenleteknek teljesülése, elenyésző kis eltéréssel a következő kifejezések eltünésére reducálódik

$$\Sigma S m \frac{\partial g_a}{\partial \psi} \psi' , . . ,$$

$$\Sigma S m \frac{\partial (g_a g_a)}{\partial \psi} \psi' , . . ,$$

$$\Sigma S m \frac{\partial (g_b g_c)}{\partial \psi} \psi' , . . ,$$

Ennek a feltevésnek corollariuma, hogy a mozgási erély $\varphi\psi$ részének bármely igen kis rendszer-részbe tartozó része eltünik. Ugyanis a rendszer olyan igen kis terjedelmű $\mathfrak{d}M$ részére vonatkozólag, melyben az f functio folytonos, elenyésző kis különbözettel, minden φ-re nézve

$$S m \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{1}{2} f \frac{\partial f}{\partial \varphi} S m \frac{\partial (g_a g_a)}{\partial \psi} + f \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} S m \frac{\partial g_a}{\partial \psi} \text{ stb.}$$

minélfogva

$$\Sigma S m \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \psi} \psi', \quad \Sigma S m \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} \psi', \quad \Sigma S m \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \psi} \psi'$$

eltünnek. Ámde a $T_{\varphi\psi}$ definitiójában előforduló

$$\Sigma \psi' S m \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\partial p}{\partial \psi}$$

factoroknak $\mathfrak{d}M$-re vonatkozó része annak a három kifejezésnek az összege. E szerint a mozgási erély kifejezése a φ és ψ-tagokra reducálódik,

$$T = T_\varphi + T_\psi .$$

7. §. A mozgási erélynek azt a $\mathfrak{d}T$ részét, mely a pontrendszer igen kis terjedelmű (végtelen sok tömegpontból álló végtelen kis) részének a mozgási erélye, osszuk el a hozzá tartozó tömegpontok összes $\mathfrak{d}M$ tömegével és egy a $\mathfrak{d}M$-hez rendelt az idővel számot tevően nem változó pos. k számmal, melyről legyen feltéve, hogy

$\mathfrak{d}M$-ről-$\mathfrak{d}M$-re folytonosan változik, és folytonossága legfeljebb egyes felületek pontjaiban szakad meg. A hányadost jelöljük ϑ-val,

$$\vartheta = \frac{\mathfrak{d}T}{k\mathfrak{d}M}$$

Az eleven erő $\mathfrak{d}M$-beli fokának nevezem. Altalában határozotlan, és pedig végtelen sok értékü functiója a $\mathfrak{d}M$ helyhatározóinak, mert a $\mathfrak{d}M$ rész nagysága s az elfoglalta tér alakja szerint általában különböző.

Azonban felteszem, hogy ha a φ coordináták nem változnak, a ϑ fokok időhaladtával egyenletesen közös constans érték felé convergálnak, vagyis, hogy a g functiók és ψ' sebességek eleget tesznek

$$\text{Lim.} \left(\frac{\mathfrak{d}T_\psi}{k\mathfrak{d}M}\right)_{t \longrightarrow \infty} \longrightarrow \text{const.} \ (\dddot{\varphi} = \text{const.})$$

typusú határegyenleteknek is.

Mielőtt az összes limesek a 0 határértékek közelébe jutnának, előbb (könnyen beláthatólag) a ϑ fokok az illető $\mathfrak{d}M$ részek helyhatározóira nézve folytonos sokaságot tevőkké válnak, úgy, hogy a ϑ fok a hozzá tartozó $\mathfrak{d}M$ rész helyhatározóinak folytonos egyértékű functiójává lesz. Ekkor már ϑ az eleven erő $\mathfrak{d}M$ helyi fokának egyértelmüleg nevezhető. Véges idő mulva nagy megközelítéssel minden pontban ugyanazzá válik (a convergentia egyenletességénél fogva) az eleven erő foka, és aztán, hacsak a φ coordináták továbbra sem változnak, egyenletes volta még egyre tökélyesedik.

Ekkor az erély-egyenlet, a differentiálás bármily interpretátiójával $\Sigma\Psi d\psi$ eltűnésére reducálódik, vagyis akkor a Ψ erőknek a ψ coordináták bármily rendű megváltozásán végzett munkája elenyésző.

8. §. Ha két ekként definiált rendszer úgy közelíttetik egymáshoz, hogy felületeik egy-egy véges része pontról-pontra végtelen közel jut egymáshoz, egyetlen összetartó rendszerré válhatnak. Ez úgy fogható fel, hogy minden rendszer ψ-mozgása összefügg egymással, vagyis, hogy minden rendszer-párhoz tartoznak közös ψ paraméterek, azonban a különböző rendszereknek csak azokra a pontjaikra

nézve érvényesülhetnek számot tevően, melyek végtelen közel, — és miután végtelen közel, — jutottak egymáshoz, úgy, hogy függenek a pontok távolságaitól és csak ezeknek végtelen kicsinynyé váltával tesznek számot.

Két rendszernek, az ő közelségi felületük pontjaiban a ψ paraméterek révén egy rendszerré való összekapcsolódását egyszerűen kapcsolódásnak nevezem. A kapcsolódás helye (vagyis a közelségi felület) az f functiókra nézve általában folytonosság-szakadási felület.

Lehetségesek rendszerek, melyek az ő g és Ψ functióik minőségénél fogva más rendszerekkel számot tevően nem kapcsolódnak.

Legyen, hogy két összekapcsolt rendszerben az összekapcsolásuk előtt egyenletes volt, de mindegyikben más volt az eleven erő foka. Az összekapcsolás után megzavarodik a külön-külön való egyenletessége, hogy (a φ coordináták most is folyvást változatlanoknak tételeztetvén fel) közös egyenletesség felé convergáljon. Minthogy csak végtelen közeli tömegpontok ψ mozgása függ számot tevőleg directe össze, a megzavarodás csak a közelségi felület tájékán kezdődik és successive terjed át az egész rendszerre. Az eleven erő fokának ily módon való megváltoztatását közlés általi megváltoztatásnak nevezem. Ha a két rendszer eleven erejének foka végtelen kicsit különbözött, akkor az egyenletesség számot tevő megzavarodása nélkül megy végbe a közlés.

9. §. Nemkülönben egyenletességének számot tevő megzavarodása nélkül változik meg egy rendszer eleven erejének foka, hogyha a φ coordináták végtelen lassan változnak, vagyis ha a φ' sebességek végtelen kicsinyek. Ekkor a 6. §. végső egyenletének alapján a ψ-kre vonatkozó Lagrange-féle egyenletekben T helyett T_ψ jegyezhető és nemkülönben az erély-egyenletben. Ha aztán még a φ'' sebesedések is végtelen kicsinyek, akkor a φ-kre vonatkozó Lagrange-féle egyenletekben is T_ψ jegyezhető T helyett.

10. §. A következőkben felteszem, hogy az φ coordináták változásának úgy a sebessége, mint a sebesedése végtelen kicsiny, hogy a rendszer eleven erejének foka egyenletes és megváltoztatása csak φ coordináták által, s oly rendszerrel való kapcsolás által történik, melyben szintén egyenletes az eleven erő foka, s végtelen kicsit kü-

lönbözik az eredeti rendszerétől. A T_{ψ} eleven erőt rövidebben $\boldsymbol{T}$ betűvel fogom jelölni. Az előző §. szerint

$$\mathrm{T} = T, \qquad \Psi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi'},$$

$$\Phi = \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \qquad \Sigma\Psi\delta\psi = \delta T + \Sigma\Phi\delta\varphi.$$

Az erély egyenletben a differentiálás d jelét δ jellel váltottam fel; azt az értelmet kötöm hozzá, hogy véges időnek megfelelő változásokat is jelenthessen (a mik a suppositiók szerint szintén végtelen kicsinyek). A Ψ erők munkájának a jelzésére ezentúl $\delta'\Omega$ symbolumot használom; a δ jel melletti hiányjel azt tartja evidentiában, hogy a $\delta'\Omega$ nem teljes differentiális. Tényleg (be írva $\delta'\Omega$ kifejezésébe Φ helyett $\partial T : \partial\varphi$),

$$\delta'\Omega = \delta T + \Sigma \frac{\partial T}{\partial \varphi} \delta\varphi$$

a hol a jobboldal második tagja szembetűnően nem teljes differentiális, míg az első tagja az.

11. §. A $\delta'\Omega : \vartheta$ hányados teljes differentiális, azaz az erélyegyenletnek integráló divisora a ϑ. Ugyanis vessünk ügyet $\delta'\Omega$-nak arra a $\mathfrak{d}\delta'\Omega$ részére, mely a rendszer igen kis terjedelmű $\mathfrak{d}M$ tömegrészének $\mathfrak{d}T$ eleven erejével van meghatározva,

$$\mathfrak{d}\delta'\Omega = \delta\mathfrak{d}T + \Sigma \frac{\partial\mathfrak{d}T}{\partial\varphi} \delta\varphi$$

részére a $\delta'\Omega$-nak. A $\mathfrak{d}M$ oly rész legyen egyszersmind, melynek belsejében az f functiónak nincs folytonosság szakadása. Ugy, számot nem tevő kis eltéréssel $\mathfrak{d}T : f^2$ független a φ coordinátáktól és következőleg $\partial\mathfrak{d}T : \partial\varphi$ helyett számot nem tevő eltéréssel

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} f^2\left(\frac{\mathfrak{d}T}{f^2}\right) = 2\,\frac{\mathfrak{d}T}{f}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi}$$

vihető calculusba. Ennek eszközlése és $\mathfrak{d}T$-nek $\vartheta k\mathfrak{d}M$-mel való substituálása után (7. §.)

$$\mathfrak{d}\delta'_{\Omega} = \delta\vartheta\,.\,\mathrm{k}\mathfrak{d}\mathrm{M} + 2\vartheta\delta\log f\,.\,\mathrm{k}\mathfrak{d}\mathrm{M}\,.$$

Ezt a kifejezést az egész rendszert constituáló $\mathfrak{d}M$ részek összeségére nézve megszerkesztettnek imagináljuk. Valamennyit tagróltagra összeadva, annak a megfontolásával, hogy a praemissák szerint ϑ és $\delta\vartheta$ valamennyiben ugyanaz, és

$$(1) \qquad \int_{\mathrm{M}} \mathrm{k}\log f^{2}\,.\,\mathfrak{d}\mathrm{M} = \mathrm{MK}\log \mathfrak{f}\;, \qquad \int_{\mathrm{M}} \mathrm{k}\,\mathfrak{d}\,\mathrm{M} = \mathrm{MK}$$

jelölés használatával

$$\delta'_{\Omega} = \mathrm{KM}\,(\delta\vartheta + \vartheta\delta\log \mathfrak{f})$$

egyenletünk vagyon, mely ezzel a jelöléssel:

$$(2) \qquad \log \vartheta\mathfrak{f} = \sigma\,,$$

így jelenik meg:

$$(3) \qquad \delta'_{\Omega} = \mathrm{KM}\vartheta\delta\sigma$$

Nyilvánvaló, hogy $T = KM\vartheta$ lévén, T is integráló divisor.

12. §. Nemkülönben integráló divisor

$$(4) \qquad \mathrm{t} = \vartheta\,\mathrm{F}(\sigma)\,,$$

tetszőleges F functio esetén, és pedig

$$(5) \qquad \int\frac{d\sigma}{\mathrm{F}(\sigma)} = \mathrm{S}$$

téve,

$$(6) \qquad \delta'\Omega = \mathrm{K\,M\,t\,\delta\,S}$$

Vegyük észre, hogy ha a k appendix s az f functio, a rendszer minden pontjában ugyanaz, — s ez az eset felel meg Thomson elméletének, — akkor t és $\delta\mathrm{S}$ is a rendszer bármely $\mathfrak{d}M$ részére való vonatkoztatásban ugyanazok, vagyis azonazt értve t és $\delta\mathrm{S}$ alatt, mint (6)-ban, $\mathfrak{d}\delta'_{\Omega} = \mathrm{k}\mathfrak{d}M\,.\,\mathrm{t}\delta\mathrm{S}$; továbbá, ha most az elevenerő foka és vele együtt a t nem volna egyenletes a rendszerben, ez azzal együtt mindenütt egyenlő constans érték felé convergál stb.

A $\delta'\Omega$ munka (6) alatti kifejezésében lévő *KMt* ott formálisan mint erő szerepel, melynek az S megváltozásán végezett munkája a $\delta'\Omega$.

13. §. A tömegpontokra ható *P*-erők közt legyenek olyanok, melyek az x_0, y_0, z_0 centrumok kölcsönös helyzetétől függenek. Ezeket belső erőknek nevezzük és feltesszük, hogy erőfüggvényes erők. Az összeségükhöz tartozó erőfüggvényt *V*-vel jelölöm. Minthogy a x_0, y_0, z_0 coordináták csak a φ paraméterekkel változnak (2. §.) ennél fogva

$$\delta V = \Sigma \frac{\partial V}{\partial \varphi} \delta\varphi$$

és így a $\partial V : \partial\varphi$ erők partialisan a $\Phi\left(= \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)$ erőkben foglaltatnak.

A következő jelelésekkel:

$$\frac{\partial (T - V)}{\partial \varphi} = \Phi', \tag{7}$$

$$T + V = U, \tag{8}$$

az erély-egyenlet ezt az alakot ölti (10. §.):

$$\delta'\Omega = \delta U + \Sigma \Phi' \delta\varphi \tag{9}$$

14. §. A Φ' erőket külső erőknek nevezzük. Ezekről felteszem, hogy egyenkint ismeretes viselkedésű erők (minők pl. a rendszer felületére ható nyomó, nyujtó, csavaró erők lehetnek,) melyek hatását esetleg tetszésre változtathatjuk és számon tarthatjuk, illetőleg kormányozhatjuk a φ paraméterek változásait (milyenek pl. térfogat-változás, megnyúlás, elcsavarodás). Az efféle paramétereket J. J. Thomson controllálható coordinátáknak, mig a ψ-féléket nem controllálhatóknak nevezi. Helmholtz az olyan mozgást, milyenné itt a ψ-mozgás a reá szabott követelményekkel definiálva lőn, rendezetlen mozgásnak, az olyant aminő itt egy-egy φ coordináta változásának felel meg, rendezett mozgásnak nevezi.

15. §. Egy másik, egyenlő foku, rendszerrel való kapcsolás által elérhető, hogy noha változnak (igen lassan) a φ coordináták, az eleven erő foka számot tevőleg nem változik. Ehhez a Φ erők és φ co-

oordináták közti relatiók tartoznak, melyek más-más ϑ- foknál általában mások és mások és a ϑ fokkal általában folytonosan változók lehetnek, úgy, hogy a Φ' erők, az U, a σ, mint a φ coordináták és a ϑ, vagy ugyanazok és a t általában folytonos functioi jelentkezhetnek. Ekkor aztán, rövidség kedvéért $KM = 1$ téve, (6) és (9)-nek összevetéséből folyólag

$$(10) \qquad t\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \Phi' + \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad t\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t},$$

vagy, ha

$$(11) \qquad U - tS = H$$

tesszük (Massieu therm. dyn. functiójának analogjaként) amiatt, hogy innen ez van:

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} - t\frac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} - t\frac{\partial S}{\partial t} - S,$$

a (10) alattiak alapján

$$(12) \qquad \Phi' = -\frac{\partial H}{\partial \varphi},$$

$$(13) \qquad S = -\frac{\partial H}{\partial t},$$

és az utóbbinak tekintetbe vételével a (11) szerint

$$(14) \qquad U = H - t\frac{\partial H}{\partial t}.$$

16. §. Rendszerünkben $\mathfrak{d}T = \vartheta\, k\, \mathfrak{d}M$, tehát $T = KM\vartheta$. Egy másik, hasonlóan definiált rendszerben $T' = K'M'\vartheta'$. Legyen hogy ez a két rendszer egybe lőn kapcsolva. Ha a φ coordináták változatlanok, ϑ és ϑ', közös ϑ_0 érték felé convergál, minek megfelelően T és T' megváltozott értékei T_0 és T'_0 legyenek. Az energia elve szerint $T + T' = T_0 + T_0'$. Elfogadásával

$$KM\vartheta + K'M'\vartheta' = KM\vartheta_0 + K'M'\vartheta_0 .$$

Igy irva:

$$KM(\vartheta-\vartheta_0) + K'M'(\vartheta'-\vartheta_0) = 0$$

feltűnik, hogy ha $\vartheta > \vartheta_0$, úgy $\vartheta' < \vartheta_0$ tehát egyszersmind $\vartheta > \vartheta'$, vagyis, hogy a kapcsolás után a nagyobbik ϑ fok csökkenik, a kisebbik emelkedik s közbűl eső értéket vállalnak.

17. §. Ha a kiegyenlődés felé convergálást nem a ϑ-nak, hanem

$$t = \vartheta F(\vartheta f^2)$$

functiónak tulajdonítjuk, úgy, hogy t legyen az a változó mennyiség, mely változatlan φ paraméterek esetén idő haladtával egy minden pontban azonos constans érték felé convergál, akkor, ha t. i. az f functio nem minden pontban ugyanaz, a convergálás czéljánál ϑ helyről-helyre változó, és így

$$\delta'\Omega = \delta\int_M \vartheta\, k\, \mathfrak{d}M + \int_M \vartheta\, k\, \delta \log f^2 . \mathfrak{d}M .$$

Könnyű meggyőződni, hogy a már mindenütt ugyanazzá váltnak feltételezett t integráló divisora a $\delta'\Omega$-nak. E végre csak az egyenletünk jobb oldalát ebbe az alakba kell átfordítani:

$$\int_M \vartheta\, \delta \log (\vartheta f^2)\, k\, \mathfrak{d}M .$$

18. §. A t defintiojából folyólag a ϑ

$$\vartheta = t\, G(t f^2)$$

alakban függ t-től és a φ paraméterektől.

Most, hogy a ϑ általában helyről-helyre változó, általánosabban

$$T = \int_M \vartheta\, k\, \mathfrak{d}M,$$

és két rendszer kapcsolódásához $T + T' = T_0 + T_0'$ erély-egyenlőségnek megfelelően

$$\int_M (t\,G - t_0\,G_0)\,k\,\mathfrak{d}M + \int_{M'} (t'\,G' - t_0 G_0')\,k'\,\mathfrak{d}\,M' = 0\,.$$

egyenlet tartozik. Legalább, ha t és t_0 pos.-úl és G és S functiók a maguk argumentumaikkal egyértelemben változókul választvák, $t > t_0$ egyenlőségre $t' < t_0$ felel.

Ha a t választatik a temperatura analogonjáúl, akkor az állandó φ páraméterekhez tartozó fajhő-analogon

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

a φ coordinátákkal és a t-vel változó mennyiség, még pedig $t\,f^2 = u$ irtával

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_M K\left(G + u\,\frac{d\,G}{du}\right)\mathfrak{d}M.$$

Azonban ha speciálisan a ϑ választatik temeratura analogonjául, akkor (mint Thomson elméletében) ez a fajhő-analogon constans.