ÜBER DIE AUFSTEIGENDEN KETTENBRÜCHE.

Von Dr. Emil Gerevich.

Darauf hinweisend, dass die Spuren der aufsteigenden Kettenbrüche schon im Alterthum aufzufinden sind, ihre allgemeine Theorie aber dennoch viel unentwickelter ist, als diejenige der absteigenden Kettenbrüche, schildert der Autor kurz die historische Entwicklung dieser Theorie.

Er erwähnt Lagrange als den Begründer der heutigen Theorie der aufsteigenden Kettenbrüche, und spricht mit Anerkennung von den Mathematikern der Neuzeit, unter andern von Dr. Sigm. Günther, der in seinen zahlreichen Abhandlungen mehrere Fragen über die aufsteigenden Kettenbrüche erledigte. Da sich der Autor in seinem zunächst erscheinenden Werke „A felfelé menő láncztörtek analizise“ („Analysis der aufsteigenden Kettenbrüche“) ausführlich mit der Theorie so wie auch mit der praktischen Anwendung derselben befasst, beschränkt er sich diesmal auf die Darlegung des heutigen Standpunktes dieser Theorie, indem er dieselben theilweise erweitert.

Nach Ableitung der üblichen Formel, welche zur Bestimmung der Näherungsbrüche dient, zeigt der Verfasser die von Günther in Determinantenform ausgedrückte independente Formel. Den Standpunkt des praktischen Rechnens verfolgend leitet er die entwickelte independente Formel ab. Diese Formel entspricht derjenigen, welche von Stern für die Näherungsbrüche der absteigender Kettenbrüche aufgestellt worden ist. (Crelle Journal 10. Bnd. 5. S.)

Fernerhin behandelt Autor die Eigenschaften der Näherungsbrüche auf analytischem Wege; zeigt die Entwickelung in Reihen der Näherungsbrüche, bespricht die Schlömilchsche Formel für die wechselseitige Umänderung der auf- und absteigenden Kettenbrüche; er zeigt das praktische Verfahren, mit welchen man den gemeinen

Bruch in gleichwertige aufsteigende Kettenbrüche umwandelt. Er behandelt die Methode, nach welcher Produkte in aufsteigende Kettenbrüche und diese in Produkte entwickelt werden können.

Auf den Zusammenhang, welcher zwischen den Sexagesimal- und Decimalsystem, und den periodisch aufsteigenden Kettenbrüchen besteht hinweisend, hebt er hervor, dass unter den letzteren für die Theorie ebenso, wie für die Praxis, besonders diejenigen wichtig sind, deren Partialnenner gleich sind. Diese behandelt er ausführlich. Er beweist, dass wenn unter den Primfactoren eines gemeinen Bruches auch ein solcher sich befindet, welcher in dem Partialnenner des aufsteigenden Kettenbruches nicht enthalten ist, so ist der aus diesem gemeinen Bruche enstandene aufsteigende Kettenbruch immer unendlich. (Dabei ist natürlich der aufsteigende Kettenbruch mit gleichen Partialnennern zu verstehen). Wenn aber der Nenner des umzuändernden gemeinen Kettenbruches nur solche Primfactoren enthält, welche zugleich auch Primfactoren des Partialnenners des aus dem gemeinen Bruch gewonnenen aufsteigenden Kettenbruches sind, so ist der letztere immer endlich. Aus diesen Angaben folgernd, weist er auf die Bedingungen hin, unter welchen aus einem gemeinen Bruche ein endlicher oder unendlicher Decimalbruch zu gewinnen ist. Er beweist, dass um aus einem gemeinen Bruche einen mit beliebigen Nennern versehenen, periodisch aufsteigenden Kettenbruch zu gewinnen, es nothwendig ist, dass unter den Primfactoren des Nenners des gemeinen Bruches und unter denjenigen des Nenners des Kettenbruches wenigstens einer gemeinschaftlich sei; ausserdem muss der Nenner des gemeinen Bruches wenigstens einen solchen Factor enthalten, welcher in dem Nenner des Kettenbruches nicht vorhanden ist. Auch beweist er, dass man aus einem gemeinen Bruche immer einen reinperiodisch aufsteigenden Kettenbruch mit einem solchen Nenner gewinnen kann, welcher eine relative Primzahl in Bezug auf den Nenner des angenommenen gemeinen Bruches ist.

Er weist darauf hin, dass die aufsteigenden Kettenbrüche auch aus dem Standpunkte der Zahlentheorie interessant sind, und erwähnt einige ihrer diesbezüglichen Eigenschaften. Z. B. Die Summe der Zahlen-Ziffer der Periode eines reinperiodischen und aus einem solchen gemeinen Bruche gewonnenen Decimalbruches, dessen Nenner mit 3 nicht theilbar ist, heilbar.ist immer mit 9 t

Zwei rein periodische aufsteigende Kettenbrüche, deren Perioden nur darin verschieden sind, dass dieselben nicht mit identischem Gliede beginnen, nennt er ähnliche rein periodisch aufsteigende Kettenbrüche; diesen entspricht eine Restreihe mit ähnlichen Eigenschaften. Zwei reinperiodische aufsteigende Kettenbrüche oder Restreihen, welche aus zwei mit gleichen Nennern, aber verschiedenen Zählern versehenen gemeinen Brüchen mit demselben Partialnenner zu gewinnen sind, sind entweder ähnlich, oder ist unter den Resten, welche dem zweiten aufsteigenden Kettenbruche entsprechen, keiner, welcher auch dem ersten Bruche entspricht, je nach dem der Zähler des zweiten Bruches aus den, dem ersten Bruche entsprechenden Resten ist, oder nicht.

Was die äussere Form des zu gewinnenden aufsteigenden Kettenbruches betrifft, beweist Verfasser, dass in jedem mit dem Nenner $N = \alpha\beta$ versehenen gemischtperiodischem aufsteigendem Kettenbruche, welcher aus einem gemeinen Bruche entstanden ist, so viele Partialbrüche der Periode vorangehen, aus wie vielen Partialbrüchen der aufsteigende Kettenbruch, welcher aus einem mit dem Nenner α versehenen gemeinen Bruche entstanden ist, besteht. (Natürlich ist hier auch ein aufsteigender Kettenbruch mit gleichen Partialnennern zu verstehen).

Auf die endlichen aufsteigenden Kettenbrüche übergehend, beweist er, dass wenn die Potenz einer Zahl mit dem Factor eines gemeinen Bruches teilbar ist, so ist dieser gemeine Bruch immer in einen solchen endlichen aufsteigenden Kettenbruch entwickelbar, dessen Partialnenner die betreffende Zahl ist. Er weist darauf hin, dass das Verhältniss der Gesamtsumme der Reste und der Partialzähler bei den endlichen aufsteigenden Kettenbrüchen — im Gegensatze zu den Unendlichen —von dem Zähler des gemeinen Bruches nicht unabhängig ist. U. s. w.

Kurz erwähnt er noch jene Theile der Mathematik, in welchen die aufsteigenden Kettenbrüche eine praktische Anwendung finden, und verspricht, dass er die Theorie dieser Anwendung bei nächster Gelegenheit ausführlich erörtern wird.