A FELFELÉ MENŐ LÁNCZTÖRTEKROL.

Dr. Gerevich Emiltől.

1. §. Ámbár a felfelé menő láncztörtek nyomai a messze ókorba vezetnek vissza, koruk tehát jóval régibb, mint iker-testvérüké, a lefelé menő láncztörteké: általános elméletük fejlettsége messze áll mögötte emezekének, s jóformán csak Lagrange [1]) óta képezik a tudományos figyelem tárgyát. És jóllehet, hogy úgy analitikai szempontból, valamint gyakorlati alkalmazásuknál fogva kiválóan érdekesek, a fejlett mathematikai irodalommal biró nemzetek nagy gondolkodói sem méltatták őket arra a figyelemre, melyet joggal megérdemelnek. A mi irodalmunkban pedig épen nyomuk sincs.

Günther [2]) szerint már a régi zsidók irodalmában találkozni a fl. l.-törtek nyomaival, kik csillagászati számításaiknál (a hónap tartamának megállapításánál) jutottak ilynemű alakzatokhoz. Ismeretes, hogy a görögök következetesen csak olyan törtekkel számoltak, melyeknél az egység volt a számláló, s ha másnemű törtek kerültek kezük ügyébe, azokat csupa ilyen törzstörtekre bontották fel. E felbontásra különféle módszereik voltak, s ezek között több volt olyan, mely alapjában azonos azzal, mely szerint manap egy közönséges törtet fl. l.-törtté alakítunk át. Ámbár, mint Hankel [3]) megjegyzi, a görögök ezen számítási módja az Egyptomiakra vezethető vissza, kik a közönséges törteket mindig törzstörtek sora által fejezték ki.

A rómaiak mathematikájában szintén találkozunk alakzatokkal,

---

[1]) Lagrange: Essai d'analyse numérique sur la transformation des fractions. Journ. de l'école polytechn. Cahier V. 93. l.

[2]) Dr. S. Günther: Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 1876. 93. l.

[3]) Hankel: Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig. 1874. 62. l.

melyek a mai fl. l.-törtekkel analogok. Sőt — mint azt Günther megjegyzi [1]) — a Rómaiak, tágabb értelemben véve, tulajdonképen csak fl. l.-törtekkel számoltak; és pedig olyanokkal, melyekben a részletnevezők a következő számok voltak: 2, 3, 4, 6. Így pl. a római irásmód szerint:

I semuncia + III sicilici + V dimidiae sextulae + XI scripuli

$$=\frac{1}{2}+^{\frac{3}{2}+^{\frac{5}{3}+^{\frac{11}{2}}}}$$

A középkor legnagyobb mathematikusa Leonardo Fibonacci, bár a tárgynak nem mai értelmében, szintén ismerte a fl. l.-törteket: mert — mint azt Friedlein magyarázatából tudjuk [2]) — azon alakzatok, miket Leonardo „fractiones in gradibus“ névvel jelelt, nem egyebek, mint fl. l.-törtek. Azonban azon 500 év alatt, mely Leonardotól Lagrangeig telt el, a fl. l.-törtek majdnem teljesen letüntek a mathematikai irodalom teréről, a mennyiben senki sem foglalkozott velük. A fl. l.-törtek tudományos elméletének megalapítója Lagrange, bár ő maga — mint én hiszem, inkább szerénységből — a német Lambertet tekinti e téren mesterének. Ezeken kivül újabban Drückenmüller, Kunze, Schlömilch, Heis, Matthiessen, Lemkes s főleg a kiváló irodalmi termékenységégéről is nevezetes Günther azon mathematikusok, kiknek a fl. l.-törtek elmélete körül kiváló érdemeik vannak. A „felfelé menő láncztört“ elnevezést Kunze vezette be a tudományba [3]), Günther pedig ez elmélet terén kifejtett számos buvárlatával s értekezéseivel örökítette meg nevét a láncztörtek történetében.

Örömmel ragadom meg az alkalmat, hogy az utóbb említett két tudósnak (Kunze Eisenachban gymnasiumi, Günther pedig Münchenben egyetemi tanár) e helyütt is kifejezzem hálás köszönetemet

[1]) Dr. S. Günther: Vermischte Untersuchungen, stb. 96. l.

[2]) Friedlein: Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis. 13. Jahrhundert. Erlangen, 1869. 72. l.

[3]) Alf. Kunze: Die aufsteigenden Kettenbrüche. Eine Zugabe zu allen Lehrbüchern der Arithmetik. Weimar, 1857.

azon készségért, melylyel nekem a láncztörtekre vonatkozó tanulmányaim közben segítségemre lenni oly szivesek voltak. [1])

A felfelé menő láncztörtek elméletével s azok alkalmazásával most sajtó alatt levő munkámban („A felfelé menő lánczörtek analizise“) foglalkozom tüzetesen. E helyütt csak ez elmélet mai állását óhajtom röviden bemutatni.

1. §. Ha

$$F = a_0 + \frac{x_1}{a_1}$$

$$x_1 = b_1 + \frac{x_2}{a_2}$$

$$x_2 = b_2 + \frac{x_3}{a_3}$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_{n-1} = b_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}$$

egyenletrendszerből $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ értékeket kiküszöböljük

$$F = a_0 + \cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}{a_2}}{a_1}$$

alakú általános fl. l.-törtet kapunk, mely közönségessé válik, ha benne $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$. Minél több tagnak foglaljuk össze az értékét, annál jobban közelítjük meg magának az egész kifejezésnek a valódi értékét. Így jutunk a közelítő törtek fogalmához, mikkel már Lagrangenál találkoztunk; rendszeres tárgyalásuk érdeme azonban Lamberté.

Az n-ik közelítő törtnek meghatározására szolgáló s általánosan ismert rekurrens formula

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}\, a_n + b_n}{q_{n-1}\, a_n}. \qquad 1)$$

---

[1]) A mathematikai tudomány érdekében csak sajnálni lehet, hogy Dr. Günther, eme széles tudományú és hangyaszorgalmú mathematikus, újabban a math. és fizikai földrajz tanszékét foglalva el, irodalmi munkássága is most már ezen tárgyakra irányul. G. E.

Számítás szempontjából hátránya, hogy vele az n-ik közelítő tört értékét csak valamennyi megelőző közelítő tört ismerete után határozhatjuk meg. Konbinatorikus út az n-ik közelítő tört meghatározására következő independens alakhoz juttat:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{[a_0\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n]}{a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n}, \qquad 2)$$

hol a számláló symbolikus kifejezése egy oly összegnek, melynek egyes összeadandói egymás alá irva következő — könnyen megjegyezhető — csoportot alkotnak:

$$\begin{array}{r} a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots . a_n \\ b_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots . a_n \\ b_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots . a_n \\ b_3\, a_4\, a_5 \ldots . a_n \\ b_4\, a_5 \ldots . a_n \\ \ldots\ldots . \\ b_{n-1}\, a_n \\ b_n \end{array}$$

Ezen eljárás szerint, mely nagyon hasonlít ahhoz, melyet Stern a lefelé menő lánczörtek közelítő törtjeire állapíttatott meg [1]), minden nehézség nélkül, és azonnal, felirhatjuk valamely fl. l.-tört bár hányadik közelítő törtjét a nélkül, hogy az előzőket ismernünk kellene.

Günther a determinansok segélyével állított fel egy independens formulát [2]) mely sok esetben igen előnyösen alkalmazható. Ha u. i.

$$\cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{\ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}{}}{a_2}}{a_1}$$

fl. l.-törtre az 1) képlet szerint nyert $p_1 = b_1$, $p_2 = a_2\, p_1 + b_2$, $p_3 = a_3\, p_2 + b_3, \ldots .\; p_{n-1} = a_{n-1}\, p_{n-2} + b_{n-1}$, $p_n = a_n\, p_{n-1} + b_n$ kifejezésekből képezett:

---

[1]) Crelle: Journal für reine und angewandte Mathematik. 10. köt. 5. l.
[2]) Zeitschrift für Math. u. Physik. Leipzig, 1876. 21. évf. 178. l.

$$
\begin{aligned}
p_n - a_n p_{n-1} + b_n &= b_n \\
p_{n-1} - a_{n-1} p_{n-2} &= b_{n-1} \\
\cdots\cdots \\
p_3 - a_3 p_2 &= b_3 \\
p_2 - a_2 p_1 &= b_2 \\
p_1 &= b_1
\end{aligned}
$$

egyenletrendszerből p_n értékét kikeressük, ezt kapjuk:

$$
p_n = \begin{vmatrix}
b_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
b_3 & 0 & a_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & \ldots & . & . & . \\
b_{n-2} & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & -1 & 0 \\
b_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} & -1 \\
b_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_n
\end{vmatrix}, \qquad 3)
$$

mely kifejezés már teljesen alkalmas az n-ik közelítő tört számlálójának meghatározására. A nevező egyszerű szorzat lévén, felirása nehézséggel nem jár.

3. §. Legyen, hogy az egymásra következő közelítő törtek különbségeit képezzük; akkor, feltéve, hogy a részlettörtek valamenynyien valódiak 1. §. 1) alapján könnyű belátni, hogy az egymásra következő közelítő törtek között levő különbségek — a jeltől eltekintve — folyton fogynak, vagyis

$$
\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} > \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}}. \qquad 1)
$$

Feltéve, hogy a felvett fl. l.-tört minden részlettörtje valódi tört, s hogy a_{2n+1} tag tevőleges, s a_{2n} tag nemleges előjelű, akkor a közelítő törtek lehozási módjából azonnal következik, hogy minden páros rendű közelítő tört kisebb úgy az előttevalónál, valamint az utána következőnél; s minden páratlan rendű nagyobb úgy az előtte valónál, mint az utána következőnél is, azaz

$$
\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} > \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \qquad 2)
$$

Ha az említett feltétel mellett az 1) képletet vizsgáljuk, akkor könnyű belátni, hogy az ez által kifejezett szabály következtében

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} > \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}, \qquad 3)$$

a mi szavakban kifejezve azt jelenti, hogy a mondott feltételeknek megfelelő fl. l.-törtnél a páratlan rendű közelítő törtek értékei folyton fogynak.

Másrészt az 1) képlet szerint:

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} > \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} - \frac{q_{2n+1}}{q_{2n+1}},$$

de 2) szerint:

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} > \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}},$$

miből következik, hogy

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} \qquad 4)$$

az az: a mondott feltételek mellett a páros rendű közelítő törtek értékei folyton nőnek.

Miután az említett feltételeknek megfelelő fl. l.-tört páros rendű közelítő törtje nemcsak a következő páros rendűnél kisebb, hanem az utána következő páratlan rendű is nagyobb a következő páratlan rendűnél, ebből az következik, hogy a páros rendű közelítő tört kisebb, mint bármely utána következő. Hasonlóképen bármely páratlan rendű közelítő tört nagyobb, mint bármely utána következő. A mondottakból könnyű belátni, hogy az ilyen fl. l.-tört közelítő törtjei váltakozva nagyobbak és kisebbek magánál az fl. l.-tört valódi értékénél. Általában: a közelítő tört értéke nagyobb vagy kisebb magánál a fl. l.-tört értékénél, a szerint, a mint az utolsó részlet-számláló tevőleges vagy nemleges előjelű.

Azon feltétel alatt, hogy a felvett fl. l.-tört összes részlettörtjei valódiak, és hogy a részletszámlálók csak tevőleges értékek lehetnek, könnyű módon nyerhető a következő kifejezés:

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_r + 1}{q_r}, \qquad 5)$$

mely a fl. l.-tört értéke és egy tetszés szerinti közelítő törtje között levő viszonyt fejezi ki egyszerű alakban. E képletet figyelembe véve könnyű belátni, hogy ha $\frac{p_n}{q_n} = x$ egy tetszés szerinti irrationális számot jelent, akkor mindég képezhetünk oly közelítő törtet mely az x értéktől csak egy tetszés szerinti ε számnál kisebb értékkel különbözik.

4. §. A tiszta szakaszos fl. l.-törtek értékét legkényelmesebben az által nyerhetjük, ha a szakaszokat összevonjuk. Legyen a fl. l.-tört teljes értéke S, és a szakasz értéke az összevonás után $\frac{B}{A}$, akkor

$$S = \frac{B + \frac{B + \frac{B + \cdots}{A}}{A}}{A} = \frac{B + S}{A}, \text{ miből}$$

$$S = \frac{B}{A-1}, \qquad 1)$$

mely képlet a tiszta szakaszos fl. l.-tört értékének meghatározási módját adja.

Ha a fl. l.-tört vegyes szakaszos, akkor értékét hasonló eljáéással határozhatjuk meg; csakhogy itt külön-külön kell meghatározni a szakasz előtt álló részlettörtek értékét és a szakasz értékét. Legyen a szakasz előtt álló részlettörtek értéke $\frac{B_0}{A_0}$ és a szakasz értéke $\frac{B_1}{A_1}$, akkor a vegyes szakaszosz fl. l.-tört redukált alakja ez lesz:

$$S = \frac{B_0 \pm \frac{B_1 + \frac{B_1 + \cdots}{A_1}}{A_1}}{A_0}$$

s az 1) képlet figyelembevétele után:

$$S = \frac{B_0 \pm \frac{B_1}{A_1 + 1}}{A_0} = \frac{B_0 (A_1 - 1) \pm B_1}{A_0 (A_1 - 1)}. \qquad 2)$$

Az 1) képlet segélyével könnyen megállapíthatjuk valamely tiszta szakaszos fl. l.-tört egész értéke s egy periodusának értéke közötti különbséget. E különbség a következő kifejazés által lesz adva:

$$\frac{B}{A-1} - \frac{B}{A} = \frac{B}{A(A-1)}. \qquad 3)$$

5. §. A fl. l.-törtek elméletében kiváló érdekkel bir azon mód, melylyel valamely fl. l.-törtet vele egyenlő értékű sorrá alakíthatunk át. Nesselmann tanusága szerint [1]) már Eutakiusnál találkozunk ennek nyomaival, Én e törvény precziz levezetését s czéltudatos meghatározását Kunze-nél találtam először. Fentebbbi independens első kifejezésünk alapján közetlenűl felírható

$$\cfrac{b_1+\cfrac{b_2+\cfrac{b_3+\cdot\cdot\,+\cfrac{b_n}{a_n}}{a_3}}{a_2}}{a_1}=\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_1\,a_2}+\frac{b_3}{a_1\,a_2 a_2}+\ldots+\frac{b_n}{a_1 a_2 a_3\ldots a_n} \qquad 1)$$

Ha a fl. l.-tört tagjai az első kivételével negativek, akkor értéke a következő sor által lesz adva:

$$\frac{b_1}{a_1}-\frac{b_2}{a_1\,a_2}+\frac{b_3}{a_1\,a_2\,a_3}-\frac{b_4}{a_1\,a_2\,a_3\,a_4}+\ldots\ldots\pm\frac{b_n}{a_1\,a_2\,a_3\ldots a_n}. \qquad 2)$$

E képleteknek nemcsak a fl. l.-törtek elméletében van tágkörű alkalmazásuk, hanem haszonnal lehet őket alkalmazni az analizis más terén is. Igy pl. általuk lehet oly egyenlő értékü sorokat képezni, melyek egyenlő számú tagokból állanak. Mely kérdés a sorok elméletében nem kis fontosságu.

6. §. Ámbár úgy a Görögök, mint a Rómaiak, valamint az ókor többi müvelt népei is ismertek különféle fogásokat, melyek segélyével valamely közönséges törtet több vagy kevesebb tagu fl. l.-törtté alakitottak át; ez az eljárás nálunk inkább ötletszerü volt s esetről-esetre hol így, hol amugy jártak el; általános törvényük vagy módszerük azonban az átalakításra nem volt.

A német iskola-mesterek azon műfogásokat, melyek segélyével valamely közönséges törtet legegyszerübben változtathatni át két vagy több tagu fl. l.-törtté „Welszi praktiká-"nak (Wälsche Praktik) nevezték el. [2]) Lényege e számolási módnak általában abban áll, hogy

[1]) Nesselmann: Die Algebra der Griechen. Berlin, 1842. 113. l.

[2]) H. Szemkes: Thaoria fractionum coutinuarum ascendentium. Monasterii. 1870. 31. l.

valamely törtszorzó csupa törzstörtre bontatik, vagyis olyanokra, melyekben a számláló az egység; mi által a szorzás formális osztásokká s összeadásokká változik át. Ilynemü számításokkal a régieknél sűrüen találkozunk. A kereskedelmi világban e praktikát ma is használják. Angliában „Practice" a neve, innen a „welszi praktika." [1]) Az egyetemes átalakítási törvény megállapítása szintén az új kór matematikusainak dicsősége.

A fel- és a lefelé menő láncztörtekké alakítás között egyik lényeges különbség abban van, hogy mig minden valódi tört, csak egy módon alakítható át közönséges lefelemenő l.-törtté (tehát olyanná, melynél valamennyi részletszámláló az egység), addig a fl. l.-törteket illetőleg több e feltételnek megfelelő alakzat lehetséges. E külömbségre Lambert utalt először.

A törvény, mely szerint bármely köz. tört fl. ltörtté alakitható át, az előbbeni §-ban mondottak segélyével állapítható meg. A kimért tér nem engedi meg, hogy e módszer hosszadalmas levezetését itt tárgyaljam, sajtó alatt levő könyvemben ugy is tüzetesen foglalkozom e kérdéssel úgy a közönséges, mint az általános fl. l.-törteket illetőleg, s csak azon gyakorlati mód rövid felemlítésére szorítkozom, mely szerint valamely köz. tört köz. fl. l.-törtté alakítható át. Az átalakítandó köz. tört nevezője két tényezőre bontatik, s ezen tényezők egyike a számlálóba iratik osztóképen, másika pedig lesz a nevező. A végrehajtott osztás után fenmaradó köz. törttel folytatva az eljárást tovább, végre oly törthez jutunk, melynek számlálója az egység. A talált értékeknek egymásba való helyettesítése után nyerjük a keresett köz. fl. l.-törtet. Ez eljárás azon esetben, ha az átalakítandó köz. tört nevezője törzsszám, némi könnyen kitalálható módosítást szenved.

7. §. A soroknak és láncztörteknek egymásba való átalakítása Schlömilchet azon összefüggésre vezette, mely a felfele és a lefelé menő láncztörtek között van. Ez összefüggésre már Lagrange utalt, szabatos formulázása azonban Schlömilchtől származik. [2]) A kétféle láncztörtek közötti összefüggés legegyszerübben az 5. §. alapján vezethető le. Ott u. i. láttuk, hogy

---

[1]) Cantor: Zeitschrift f. Math. u. Physik. 20 évf. 68. l.

[2]) Schlömilch: Rezension zu Kunze's Schrift. Zeitschrift f. math. u. Phys. III. évf. Literaturzeitung 63. l.

$$\cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{b_3 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}{a_3}}{a_2}}{a_1} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \frac{b_3}{a_1 a_2 a_3} + \cdots + \frac{b_n}{a_1 a_2 a_3 a_n}$$

de a lefelé menő l.-törtek elméletéből tudjuk,[1] hogy

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \frac{b_3}{a_1 a_2 a_3} + \frac{b_n}{a_1 a_2 a_3 \ldots a^n} = \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{a_1 b_2}{a_2 b_1 + b_2 - \cfrac{a_2 b_1 b_3}{a_3 b_2 + b_3 - \cdots - \cfrac{a_{n-1} b_{n-2} b_n}{a_n b_{n-1} + b_n}}}}$$

Tehát:

$$\cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{b_3 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}{a_3}}{a_2}}{a_1} = \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{a_1 b_2}{a_2 b_1 + b_2 - \cfrac{a_2 b_1 b_3}{a_3 b_2 + b_3 - \cdots - \cfrac{a_{n-1} b_{n-2} b_n}{a_n b_{n-1} + b_n}}}}$$

mely egyenlet a fl. l.-törtnek lefelemenővé való átalakítását adja.

Ehhez hasonló képlet nyerhető a lf. l.-törtnek felfelé menővé való átalakítására, melyet azonban e helyütt, a levezetés hosszúsága miatt mellőznöm kell.

8. §. Érdekes azon összefüggés is, mely a fl. l.-törtek s a szorzatok között van. Ha

$$P_m = (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_4) \ldots (1 + a_m)$$

szorzatot, hol $a_1, a_2, \ldots a_m$, tetszésszerinti kifejezések, $(1 + a_{1,m})$-el jelöljük, akkor

$$(1 + a_{1,2}) = (1 + a_1)(1 + a_2) = 1 + a_1 + a_2 (1 + a_{1,1}),$$

$$(1 + a_{1,3}) = (1 + a_{1,2})(1 + a_3) = 1 + a_1 + a_2 (1 + a_{1,1}) + a_3 (1 + a_{1,2})$$

. . . .

[1]) Gerevich Emil: A lefelé menő láncztörtekről. M.-Sziget, 1885. 86. l.

$$(1+a_{1,\,m}) = 1 + a_1 + a_2\,(1 + a_{1,\,1}) + a_3\,(1 + a_{1,\,2}) +$$
$$+ a_4\,(1 + a_{1,\,3}) + \ldots + a_m\,(1 + a_{1,\,m-1}).$$

Téve most az

$$\frac{(1 + a_{1,\,m})}{(1 + b_{1,\,m})} = \frac{(1 + a_1)\,(1 + a_2)\,(1 + a_3),\,(1 + a_4)\ldots(1 + a_m)}{(1 + b_1)\,(1 + b_2)\,(1 + b_3)\,)1 + b_4)\ldots(1 + b_m)}$$

kifejezés hasonló tárgyalása czéljából

$$\frac{1 + a_1}{1 + b_1} = 1 + c_1,\ \frac{1+a_2}{1+b_2} = 1 + c_2, \ldots\ldots \frac{1 + a_m}{1 + b_m} = 1 + c_m,\ \text{lesz}$$

$$\frac{(1 + a_{1,m})}{(1 + b_{1,m})} = (1 + c_{1,\,m}) = 1 + c_1 + c_2\,(1 + c_{1,\,1}) + c_3(1 + c_{1,\,2}) +$$
$$+ \ldots + c_m\,(1 + c_{1\ m-1}),$$

vagy $c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots c_m$ értékeinek helyettesítése után, $1 + a_1 + A_1$, $1 + a_2 = A_2$, $1 + a_3 = A_3, \ldots\ldots 1 + a_m = A_m$ és $1 + b_1 = B_1$, $1 + b_2 = B_2, \ldots 1 + b_m = B_m$ rövidítések használatával, lesz:

$$\frac{A_1.\,A_2.\,A_3.\ldots\ldots A_m}{B_1.\,B_2.\,B_3.\ldots\ldots B_m} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2-B_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1\,B_2}\cdot\frac{(A_3-B_3)A_2}{B_3} + \ldots$$
$$+ \frac{A_1}{B_1 B_2 B_3 \ldots B_{m-1}} \cdot \frac{(A_m - B_m)\,A_2.\,A_3.\ldots A_{m-1}}{B_m}$$

$$= A_1 \cdot \frac{1}{B_1} + \frac{A_2-B_2}{B_2} + A_2.\,\frac{A_3-B_3}{B_3} + A_3.\,\frac{A_4-B_4}{B_4} + \cdots$$

Ha a szorzók száma végtelen, úgy a szorzat convergentiájának esetén a hozzá tartozó fl. l.-tört is közelítői révén convergens. Legyen megjegyezve, hogy az emitti egyenlőségsorozat balfelének és középfelének azonossága a zárjelek közti különbségek szétirása után közetlenül kiadódik.

A törvény, mely szerint

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots}}$$

végtelen fl. l.-tört vele egyenlő végtelen szorzattá alakítható át, a következő kifejezés által lesz adva:

$$\underset{r=\infty}{\overset{r=1}{P}} \left\{ \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{a_{r+1} p_r + b_{r+1}}{a_{r+1} p_r} \right\}.$$

9. §. A periodikus fl. l.-törtek nyomaival már az Indusoknál találkozunk, kik tudvalevőleg hatvanas számrendszer szerint számoltak. Bajos volna eldönteni, kiktől származik eredetileg e számrendszer; bizonyos, hogy a babiloniaiak is használták[1]) és hogy a chaldeiaktól a görögök is átvették, kik számításaiknál évszázadokon át e rendszerrel éltek. Ismeretes, hogy ezen rendszer majdnem a 15 századig uralkodott, főleg a csillagászati számításoknál. E kornak főleg csillagászati irodalmában imitt-amott találhatók oly számítási eredmények, melyek megegyeznek a 60 részletnevezővel biró periodikus fl. l.-törtekkel. Tudatosan használva azonban ez utóbbi alakzatok nem voltak. Itt-ott az egyptomiaknál a kettős számrendszer is használtatván, erre vonatkozó oly alakzatoknak is jövünk nyomára, melyek a periodikus fl. l.-törtekre emlékeztetnek. Így Lepsius[2]) egy hieroglif feliratban a következő fl. l.-törtekre akadt:

$$68 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

A 11 század második felében lépnek fel a tizedes törtek (Johannes Hispalensis), de a 16 századig leginkább csak asztronomiai és trigonometriai alkalmazásban. Csak Cardanus fellépte után szorítják ki egyetemlegesen a hatvanas rendszert. E század irodal-

[1]) H. Martin: Les signes numéreaux et l'arithmetique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-âges. Annali di matematica pura ed applicata. Tomo V. Roma 1863. 265. l.

[2]) Lepsius: Ueber eine hieroglyphische Inschrift am Tempel zu Edfu. Abhandl. d. phil. hist. Klasse d. Akademie Berlin, 1855. 75. l.

mában is akadunk oly alakzatokra, melyek a 10 részlet nevezőjü periodikus fl. l.-törtekkel egy értéküek. Tudományos s rendszeres használatukról azonban Lagrange-ig szó sem volt.

A szakaszos fl. l.-törtek közül úgy a tiszta elmélet, mint az alkalmazás tekintetéből azok birnak kiváló fontossággal, melyek részletnevezői egyenlők. Az $\frac{S}{N}$ közönséges tört, hol S és N relativ törzsszámok és $S < N$,

$$\frac{S}{N} = \frac{s}{X} + \frac{r_1}{NX},$$

$$\frac{r_1}{N} = \frac{s_1}{X} + \frac{r_2}{NX},$$

$$\frac{r_2}{N} = \frac{s_2}{X} + \frac{r_3}{NX}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{r_{n-1}}{N} = \frac{s_{n-1}}{X} + \frac{r_n}{XN}$$

egyenletrendszer alapján, hol $s, s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ az egyes hányadosokat és $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ a maradékokat jelentik, az 5. §. figyelembevételével, könnyen alakítható át

$$\frac{S}{N} = \cfrac{s}{X + \cfrac{s_1}{X + \cfrac{s_2}{X + \cfrac{s_3}{X + \cdots}}}}$$

alakú periodikus fl. l.-törtté, hol a részlettörtek szintén valódi törtek.

Ha a fenti egyenletrendszerből r_n kivételével az összes maradékokat kiküszöböljük, akkor

$$sX^{n-1} + s_1X^{n-2} + s_2X^{n-3} + \ldots + s_{n-1} = R$$

rövidítés bevezetésével, a következő egyenletet nyerjük:

$$SX^n = NR + r_n,$$

miből, ha $r_n = o$, lesz:

$$\frac{SX^n}{N} = R,$$

a mi azt jelenti, hogy — mivel S és N rel. törzsszámok — X^n osztható N által; de mivel ez csak akkor lehetséges, ha N minden törzstényezője egyúttal X-nek is törzstényezője, világos, hogy ha az átalakítandó közönséges tört nevezőjének törzstényezői között van olyan is, mely a fl. l.-tört részletnevezőjében nem foglaltatik, akkor az ezen köz. törtből nyerhető fl. l.-tört mindig végtelen. (Itt természetesen mindig egyenlő részletnevezővel biró fl. l.-tört értendő.

Innét van, hogy mivel minden oly fl. l.-tört részlettörtjei, melyben a részletnevező 10, nem egyéb, mint egy tizedes tört tizedes számjegyei: az oly közönséges tört, melynek nevezője a 2-n s az 5-ön kivül más törzstényezőt is foglal magában, mindig végtelen tizedes törtet ad.

Ehhez hasonlóan könnyen bebizonyítható, hogy ha az átalakítandó köz. tört nevezője csak oly törzstényezőket foglal magában, melyek egyúttal a belőle nyert fl. l.-tört részletnevezőjének is törzstényezői, akkor a köz. törtből nyert szak. fl. l.-tört mindig véges. E törvényben magyarázatát leli azon tény, hogy mindazon köz. törtek, a melyeknél a nevezők törzstényezői között a 2-n s az 5-ön kivül mások nem fordúlnak elő, mindég véges tizedes törtekké alakíthatók át.

10. §. Minthogy a maradékok mind kisebbek az átalakítandó köz. tört nevezőjénél, ilyenekül csak a következő számok nyerhetők: 1, 2, 3. 4 . . . (N—1.) Végtelen fl. l.-törteknél tehát bizonyos számu osztás után a már egyszer előfordult maradékok egyikének ismétlődnie kell; és pedig vagy az első (N—1) maradék között lesz már két egyenlő, vagy pedig ezek mind különbözők, és csak az N-ik maradék lesz olyan, mely már egyszer előfordult.

Egy m szakaszból álló. x nevezővel biró, tisztán szakaszos fl l.-tört értéke sorban kifejezve következő:

$$\frac{s}{x} + \frac{s_2}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \ldots + \frac{s_{m-}}{x^m} +$$

$$\frac{s}{x^{m+1}} + \frac{s_1}{x^{m+2}} + \frac{s_2}{x^{m+3}} +, \ldots + \frac{s_{m-1}}{x^{2m}} +$$

$$\frac{s}{x^{2m+1}} + \frac{s_1}{x^{2m+2}} + \frac{s_2}{x^{2m+3}} + \ldots + \frac{s_{m-1}}{x^{3m}} + \ldots$$

mi $sx^{m-1} + s_1x^{m-2} + s_2x^{m-3} + \ldots + s_{m-2}\,x + s_{m-1} = Q$

rövidités után így is irható $\dfrac{Q}{x^{m-1}}$

Feltéve, hogy az $\frac{S}{N}$ köz. tört oly tisztán szakaszos fl. l.-törtet ad, melynek nevezője x, akkor

$$\frac{S}{N} = \frac{Q}{x^m-1}, \text{ vagy } \frac{S(x^m-1)}{N} = Q;$$

mely utóbbi kifejezés azt mondja, hogy $S(x^m-1)$ a köz. tört nevezőjével osztható. De mivel S és N feltételünk szerint rel. primszámok, azért kell hogy x^m-1 legyen N-el és ennek minden tényezőjével osztható. Ez azonban csak akkor lehetséges, ha N-ek az x-el nincs közös tényezője, miből már most következik, hogy ahhoz, hogy valamely köz. törtből tetszés szerinti nevezővel biró, vegyesen szakaszos fl. törtet nyerhessünk, szükséges, hogy a köz. tört s a l.-tört nevezőinek tényezői között legyen egy közös s ezen kivül a köz. tört nevezőjének legalább egy olyan tényezője legyen, mely a l.-tört nevezőjének nem tényezője.

11. §. Egy oly vegyesen szakaszos fl. l.-törtnek, melyben a szakasz előtt n tag van, értéke sorban kifejezve, így irható:

$$\frac{s}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \ldots + \frac{s_{n-1}}{x^n} + \frac{s_n}{x^{n+1}} + \frac{s_{n+1}}{x^{n+1}} + \ldots + \frac{s_{n+m-1}}{x^{n+m}}$$

$$+ \frac{s_n}{x^{n+m+1}} + \frac{s_{n+1}}{x^{n+m+2}} + \ldots + \frac{s_{n+m-1}}{x^{n+2m}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

miből

$$sx^{n-1} + s_1x^{n-2} + s_2x^{n-3} + \ldots + s_{n-1} = P \text{ és}$$
$$s^n x^{m-1} + s_{n+1} x^{m-2} + s_{n+2} x^{m-3} + \ldots + s_{n+m-1} = P$$

röviditések használata után;

$$\frac{P}{x^n} + \frac{Q}{x^n(x^m-1} = \frac{Px^m + Q - P}{x^n(x^m-1)}$$

Feltéve, hogy $\frac{S}{N}$ köz. tört x nevezőre vegy. szak. fl. l.-törtet ad, akkor

$$\frac{S.x^n(x^m-1)}{N} = Px^m + Q - P,$$

miből következnék, hogy Q—P osztható x-el. Mivel azonban P és Q minden tagja — az utolsót kivéve — x-et mint tényezőt foglalja magában, azért különbségük ily alakban írható:

$$Q - P = s_{n+m-1} - s_{n-1} + xR.$$

Ha tehát $Q - P$ osztható volna x-el, akkor $(s_{n+m-1} - s_{n-1})$-nek is oszthatónak kellene lenni, a mi pedig nem lehetséges, mert a maradékok kisebbek a szakasz nevezőjénél. Ezen okoskodások eredményeűl a következő törvényt nyerjük: Valamely köz. törtből mindig tisztán szakaszos fl. l.-törtet nyerünk oly nevezőre, mely a felvett köz. tört nevezőjével rel. törzsszám.

12. §. Az előbbeni §-okban tárgyaltak szerint magából az átalakitandó köz. törtből lehet következtetni a belőle nyerhető fl. l.-tört milyenségére. Ha x-el jelöljük a nyerendő fl. l.-tört nevezőjét, akkor a nyerendő fl. l.-tört mindig véges lesz, ha N törzstényezői között nincs olyan, mely egyuttal az x-nek is törzstényezője ne volna. Ha N törzsszám, de nem osztója x-nek, vagy ha N több törzstényező szorzatából áll. de ezek egyike sem osztója x-nek, akkor a nyerendő fl. l.-tört végtelen s tisztán szakaszos lesz. Ha végre az N törzstényezőinek egy része osztója x-nek, egy része pedig nem, akkor a nyerendő fl. l.-tört végtelen s vegyes szakaszos lesz.

13. §. A szakaszos fl. l.-törtek számelméleti szempontból is felette érdekesek. Erre vonatkozó tulajdonságaik közül csak egy nehányat akarak itt bemutatni.

A tisztán szakaszos fl. l.-törteknél az átalakitandó köz. tört számlálója mint maradék jön ismét elő. Ha ez az m-ik osztásnál következik be, vagyis, ha $r_m = S$, akkor a fl. l.-törtnek m szakasza van s az átalakitásra szolgáló egyenletrendszer ez lesz:

$$\frac{Sx}{N} = s + \frac{r_1}{N},$$

$$\frac{r_1 x}{N} = s_1 + \frac{r_2}{N},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{r_{m-1}\, x}{N} = s_{m-1} + \frac{S}{N},$$

mely egyenletek folyton ismétlődnek. Ha ezen egyenletrendszert öszszeadjuk, s ha a maradékok összegét Σ-val s a részletszámlálók öszszegét σ-val jelöljük, akkor a maradékok összege s a szakasz részletszámlálóinak összege között levő viszony következő egyenlet által fejezhető kí: $(x-1)\Sigma = N\sigma$. Miután ezen egyenlet S-től független, világos, hogy ez a viszony mindazon köz. törtekre, melyeknél a nevezők egyenlők, állandó.

Ha x és N, továbbá $(x-1)$ és N viszonylagos törtszámok, akkor az N nevezőjü közönséges törtből nyerhető tiszta szakaszos fl. l.-tört szakaszában a részletszámlálók összege [a részletnevező ugyanis x] $(x-1)$-el és a maradékok összege N-el osztható. Téve ez esetben $\sigma = (x-1)\mu$, lesz egy uttal $\Sigma = N\mu$. Igy pl. ezen törvény $x = 10$ esetben mindig érvényes, ha 3 a nevező törzstényezői között nem foglaltatik. mert ekkor u. i. $x-1=9$. Ha tehát valamely közönséges törtből származó tiszta szakaszos tizedes tört szakaszának számjegyeit összeadjuk, akkor ezen összeg mindig osztható 9-el, ha az átalakitott köz. tört nevezője 3-al nem osztható. Pl.

$$\frac{6}{7} = \cfrac{8 + \cfrac{5 + \cfrac{7 + \cfrac{1 + \cfrac{4 + \cfrac{2 + \cdots}{10}}{10}}{10}}{10}}{10}}{10} = 0.\dot{8}5714\dot{2}$$

Itt a részletszámlálók összege: $8+5+7+1+4+2 = 27$, tényleg 9-el osztható. És a maradékok összege: $4+5+1+3+2+6=21$, tényleg 7-el, a köz. tört nevezőjével osztható.

Ha $\frac{S}{N}$ köz. törtben, hol a számláló s a nevező viszonylagos törzsszámok, S helyébe bárminemü értéket teszünk, a nyerhető tiszta szakeszos fl. l.-törtek szakaszainak száma mindig ugyanaz marad. Vagyis ugyanazon részletnevezőre az $\frac{1}{N}$ köz. törtből nyerhető fl. l.-tört szakasza ép annyi tagból fog állani, mint azé, mely $\frac{S}{N}$-ből nyerhető. Ez igazságból, melynek bebizonyitása nagyon egyszerü, a következő törvény következik: Valamennyi összevonhatlan s egyenlő nevezővel biró köz. törtből nyerhető tiszta szakaszos fl. l.-tört periodusainak száma egyenlő részletnevező mellett mindig ugyanaz, ha a részletnevező s az adott köz. tört nevezője rel. törzsszámok. Pl. e törtek $\frac{1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{4}{21}, \frac{5}{21}, \frac{8}{21}, \frac{10}{21}, \frac{11}{21}, \frac{13}{21}, \frac{16}{21}, \frac{17}{21}, \frac{19}{21}, \frac{20}{21}$ valamennyien 12 szakaszból álló fl. l.-törtet adnak 10 részletnevezőre.

14. §. A szakaszok, melyek ugyanazon nevező s részletnevező mellett S különböző értékei mellett nyerhetők, egymástól lényegesen nem mindig külömböznek. A számláló két különböző értéke mellett igen gyakran két azonos szakaszt nyerhetünk, melyek csak abban fognak egymástól különbözni, hogy a második szakasz más taggal kezdődik, mint az első. Ha u. i. feltesszük, hogy x részletnevezőre az $\frac{S}{N}$-ből nyert tiszta szak. fl. l.-tört szakasza m tagú, akkor az átalakitásnál itt m különböző maradék is származik, a melyek utolsója S. Tegyük ezen maradékok egyikét pl. S_n-et a második köz. tört számlálójává, akkor ép oly maradékok fognak utána következni, mint a minők az első szak. fl. l.-törtben is következnek S_n után. Ebből mindkét szakasz megfelelő tagjainak egyenlősége is következik; és ha az első szakasz részletszámlálói: $s, s_1, s_2, \ldots s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, \ldots s_{m-1}$, akkor a másodikéi ezek lesznek: $s_n, s_{n+1}, \ldots s_{m-1}, s_1$ $s_2, \ldots s_{n-1}$.

Hogy ha azonban a második köz. tört számlálója nem fordul elő az első fl. l.-tört maradékai között, akkor egészen uj szakasz keletkezik, melynek egy tagja sem egyenlő az előbbivel. Mert ha csak egy tag volna egyenlő, akkor az így keletkezett fl. l.-tört nem volna tiszta szakaszos.

Két oly tiszta szakaszos fl. l.-törtet, melynek szakaszai csak abban különböznek, hogy a másodiknak szakasza nem azon taggal kezdődik, melylyel az első, hasonló tiszta szak. fl. l.-törtnek nevezhetünk. Ezeknek két hasonló tulajdonságu maradéksor fog megfelelni. Ha a maradéksort is hasonlónak nevezzük, akkor a mondottakból a következő törvény értelme lesz világos:

Két ugyanazon nevezővel, de különbüző számlálóval biró köz. törtből ugyanazon részletnevezőre nyerhető tiszta szak. fl. l.-törtek és maradéksorok vagy hasonlók, vagy pedig a második fl. l.-törtnek megfelelő maradékok között egy sincs az első törtnek megfelelők közül, a szerint, a mint a második tört számlálója az elsőnek megfelelő maradékok közül való vagy sem. Igy pl. ha e törtet $\frac{1}{73}$ oly fl. l.-törtté alakitjuk át, melynek részletnevezője 10, s ha mindjárt tizedes törtté irjuk át, akkor: $\frac{1}{73} = 0.\dot{0}136986\dot{3}$ lévén, periodusai: 0, 1, 3, 6, 8, 8, 6, 3 és a maradékok sora: 10, 37, 51, 72, 63, 46, 22, 1. Vegyük most ezen maradékok egyikét, pl. 51-et számlálónak, $\frac{51}{73} = 0.\dot{6}086301\dot{3}$ miatt; a periodus: 6, 9, 8, 6, 3, 0, 1, 3, s a maradékok: 72, 62, 46, 22, 1, 10, 27, 51. Ellenben, ha számlálóul oly számot veszünk, mely nem fordul elő a maradékok között, pl. 2-t, akkor $\frac{2}{73}$ átalakitása után 20, 54, 29, 71, 53, 19, 44, 2 maradéksort nyerjük; melynek tehát egy száma sem fordul elő az előbbeni maradéksorban.

Az előbbiek alapján az egyik fl. l.-törtből közvetlenűl felirhatjuk a többit, a számitások kikerülésével. Minden m tagu szakasznak u. i. még vele hasonló $(_{m-1})$ szakasz felel meg. Ezen m szakasz oly m törthöz tartozik, melyben a számlálók a maradéksor számai. Ezek közül azt, mely a legkisebb számlálónak felel meg, primitiv szakasznak nevezhetjük. Ha ezt, valamint a neki megfelelő maradéksort ismerjük, akkor a többit ezekből vezethetjük le. Igy pl. ha e törtet $\frac{1}{15}$, oly tiszta szak. fl. l.-törtté alakitjuk át, melyben a részletnevező 7 legyen, akkor a periodus részletszámlálói lesznek: 0, 3, 1, 6, és a maradéksor: 7, 4, 13, 1. Mert 13-at véve számlálónak, a $\frac{13}{15}$-nek megfelelő fl. l.-törtben a szakasz részletszámlálói lesznek: 6, 0, 3, 1. Az eljárás további menete ezekből világos.

15. §. Az előkbiekből tudjuk, hogy minden oly közönséges törtnek $\left(\frac{S}{N}\right)$ nevezőjét, melyből vegyes szakaszos fl. l-tört nyerhető, két oly tényezővé lehet felbontani, melyek közül az egyik csak oly törzstényezőket foglal magában, melyek a fl. l.-tört nevezőjével közösek, a másik pedig csupa oly törzstényezőből áll, melyek a nevezőben nem fordulnak elő. Ha ezen törzstényezők elseje α, és másodika β akkor

$$\frac{S}{N} = \frac{S}{\alpha \,.\, \beta}$$

Mivel α és β viszonylagos törzsszámok, az adott köz. tört felbontható oly két tört különbségére, melyek egyikének nevezője α, és másikáé β. Vagyis $\frac{S}{N} = \frac{\varsigma}{\alpha} - \frac{\varsigma'}{\beta}$, miből $S = \alpha \,.\, \varsigma - \beta \,.\, \varsigma'$. Ezen határozatlan egyenlet*) megoldásánál legczélszerübb a legkisebb értékpárt venni. A ς és ς' értékek meghatározása uián ismeretes lévén $\frac{\varsigma}{\beta}$ és $\frac{\varsigma'}{\alpha}$ törtek értékei, ezek mindegyikét átalakithatjuk fl. l.-

*) Gauss: Disqu. arith. 309. §.

törtté. Az előbb mondottakból önként következik, hogy $\frac{\varsigma}{\beta}$-ból nyerendő fl. l.-tört tiszta szakaszos lesz, mig $\frac{\varsigma'}{\alpha}$ véges fl. l.-törtet fog adni. [Megjegyzendő, hogy az itt szóban levő fl. l.-törtek mindig oly részletnevezére vonatkoznak, mint a minőre az $\frac{S}{N}$ köz. törtből levezetni szándékolt fl. l.-törtek.] Ha most a két fl. l.-törtet egymásból levonjuk, oly vegyes szakaszos fl. l.-törtet nyerünk, mely $\frac{S}{N}$ értékével egyenlő. Pl. legyen $\frac{9}{100}$ oly vegyes szakaszos fl. l.-törtté alakitandó, melynek részletnevezője 15. Akkor itt $9 = 25 . \varsigma - 4 . \varsigma'$ lévén, lesz $\varsigma = 1$ és $\varsigma' = 4$, tehát

$$\frac{\varsigma}{\beta} = \frac{1}{4} = \frac{3}{15}{}^{+\frac{11}{15}{}^{+\frac{3}{15}{}^{+\cdots}}} \quad \text{és} \quad \frac{\varsigma'}{\alpha} = \frac{4}{25} = \frac{2}{15}{}^{+\frac{6}{15}},$$

s a levonás után:

$$\frac{S}{N} = \frac{1}{15}{}^{+\frac{5}{15}{}^{+\frac{3}{15}{}^{+\frac{11}{15}{}^{+\frac{3}{15}{}^{+\cdots}}}}} .$$

A következő okoskodással a nyerendő vegyes szak. fl. l.-tört alakjára is lehet némi következtetést vonni. Ha az átalakítás után az $\frac{\varsigma'}{\alpha}$-ból nyerendő fl. l.-tört n részletből fog állani, az $\frac{\varsigma}{\beta}$-ből nyerendőnek szakasza pedig m tagu lesz, akkor a levonás után az utóbbinak csak n első tagja változik meg, a többi része pedig szakaszos marad; a szakasz tagjai is ugyanazon sorrendben fognak egymásra következni, csak az első tag lesz más. Ebből következik, hogy minden $N = \alpha . \beta$ nevezővel biró köz. törtből nyerhető vegyes szakaszos fl. l.-törtben annyi részlettört előzi meg a szakaszt, mint a mennyi részlettörtből az α nevezővel biró köz. törtből származott fl. l.-tört áll. Természetes, hogy a l.-törtek itt is egyenlő nevezőre vonatkoznak. Ezen törvényt az előbbeni példában is igazolva látjuk, hol a szakaszt két részlettört előzi meg, mert

$$\frac{\varsigma'}{\alpha} = \frac{4}{25} = \frac{2 + \frac{6}{15}}{15}$$ két tagból áll.

16. §. Láttuk fentebb, hogy ha $\frac{S}{N}$ köz. tört nevezője N, csak oly törzstényezőket foglal magában, melyek egyuttal x-nek is törzstényezői, akkor $\frac{S}{N}$ mindég véges fl. l.-törtet ad x nevezőre. Ha a részlettörtek számát n-el, a részletszámlálókat pedig s, s_1, s_2, ... s_{n-1}-el jelöljük, akkor

$$R = sx^{n-1} + s_1x^{n-2} + \ldots + s_{n-1}$$

rövidítés használatával

$$\frac{S}{N} = \frac{R}{x^n},$$

Mivel S és N viszonylagos törtszámok az $Sx^n = NR$ egyenletből következik, hogy x^n osztható N-el. Könnyű belátni, hogy x^n ama kisebb hatványa x-nek. mely ezen tulajdonsággal bir. Ebből világos, hogy ha valamely közönséges tört egy tetszés szerinti x nevezőre véges fl. l.-törtet ad, akkor x-nek annyadik hatványa, a hány részlettörtből áll a fl. l.-tört, a köz. tört nevezője által maradék nélkül lesz osztható; és x-nek nincs kisebb hatványa, mely ezen feltételnek megfelelne. E tételt megfordítva így is fejezhetjük ki: Ha egy számnak valamely hotványa egy köz. tört tényezőjével osztható, akkor ezen köz. tört mindig oly véges fl. l.-törtté alakitható át, melynek részletnevezője az illető szám.

A fentebbiekből az is következik, hogy a részlettörtek száma egy meghatározott részletnevezővel biró fl. l.-törtnél mindig állandó, bárminő értéket vegyen is fel az átalakitott köz. tört számlálója.

A már ismert okoskodással könnyen meggyőződhetünk arról is, hogy a véges fl. l.-törteknél a maradékok s a részletszámlálók öszszegének viszonya — ellentétben a végtelen fl. l.-törtekkel — nem független az átalakitott köz. tört számlálójától.

Könnyen bebizonyitható az is, hogy mindazon számok, melyek egymástól csak N-nek többszöröse által különböznek, mint részletnevezők N nevező mellett csupa oly véges fl. l.-töttet adnak, melyeknél a részlettörtek száma egyenlő, hacsak egyetlen egy szám van köztük, mely véges fl. l.-törthez vezet.

A fl. l.-törteknek igen tág terű alkalmazásuk van a mathemátikában. A gyökvonásnál, a logarithmusok kikeresésénél s különösen az egyenletek megoldásánál (főképen a határozatlanoknál) megbecsülhetlen eszközei a gyakorlati számitásnak. A fentiekben a fl. l.-törtek elméletének mai állását igyekeztem bemutatni, a lehetőség szerint ez elméletet részben tovább fejlesztve. A gyakorlati alkalmazásról másalkalommal leszek bátor e helyen tüzetesen szólani.