Szabálytalan poligonok arányos felosztása.

Irta: *Mezey Rezső*, m. kir. főerdőmérnök. (Vége.)

4. §. Mindkét irányban körülbelül egyforma kiterjedésü sokszögek osztása.

Itt csakis törés nélkül való, egy vagy több választóvonalról lehet szó, hacsak azon szokatlan eset nem adja magát elő, hogy a kihasitandó területrész határvonalának egy, valamely — a polygon belsejében levő — ponton kell keresztülmennie. Az alábbi tételek azonban a feladatnak ilyen esetü megoldásához is könnyü szerrel juttatnak.

Megmaradva az egy egyenes vonallal való osztás mellett, kétféle feltétel elé kerülhetünk. Ezeknek egyike, azt hiszem az egyszerübbik, a következő:

13. *Az osztóvonalnak egy a poligon kerületén levő pontból kell kiindulnia, vagy ez a pont esetleg szabadon is választható.*

Legyen ez a pont a 6. ábrán *„s"*, amelyből kiindulva, az (1—10) sokszög egy előre megállapitott része levágandó.

Először is ezen *„s"* pontból két szemközt fekvő pont felé sugarakat huzunk [*s* — 7, *s*—8]. Ezen két pontnak a megválasztásánál azonban ügyeljünk arra, hogy a kiszámitandó tulajdonképeni választóvonal becslés, vagy előzetes megközelitő mérés szerint ugyancsak az *„s"* pontból kiindulva, a két fölvett sugár közé essék.

Ezekután kiszámitjuk az ujonan keletkezett azon poligon területét, amelyet a legelőször vont két sugár közül az egyik az egészből leszel. Ez a (*s*, 8, 9, 10, 1, 2, 3,) sokszög. Vagy lehet az (*s*, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3) is.

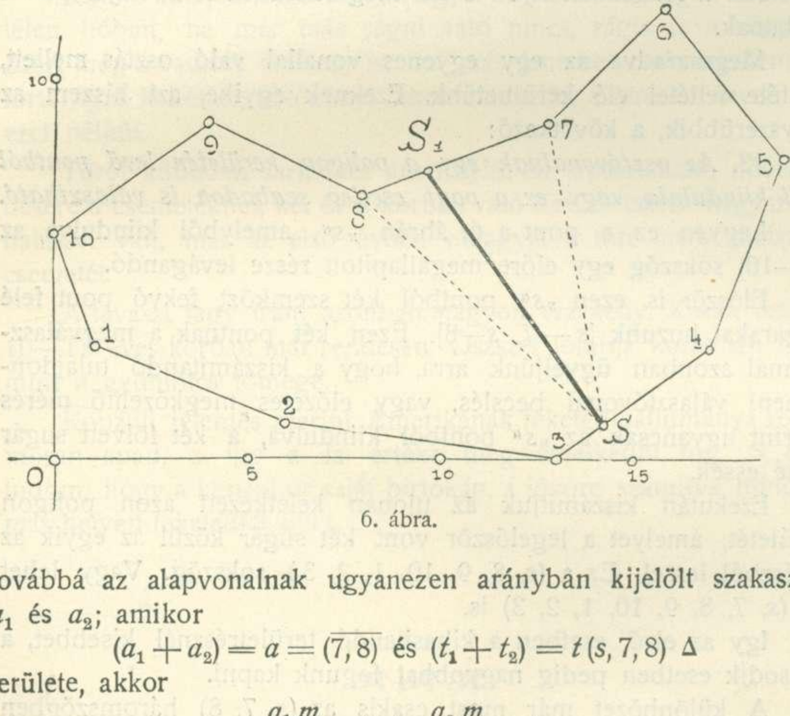
Igy az első esetben a kihasitandó területrésznél kisebbet, a második esetben pedig nagyobbat fogunk kapni.

A különbözet már most csakis az (*s*, 7, 8) háromszögben osztandó fel olyképen, hogy az előbb már kimért poligon nagysághoz az (*s*, 7, 8) háromszögből az *„s"* ponton keresztül annyi négyzetegységet vágunk el, amennyivel az (t. i. a már kimért poligonrész) az előre feladott és kivánt területnagyságig kiegészitést nyer.

Az (*s*, 7, 8) háromszög területe tehát szükségképpen szintén felveendő és mert a választóvonalnak az *„s"* pontból kell kiindulnia, a háromszög alapvonalául az „s"-el szemközt fekvő (7—8.) oldalt kell kiszemelni.

Amennyiben pedig ugyanazon háromszögben, tehát ugyanazon alapvonal és magasság mellett, az alapvonal hányadrészei a háromszög területének megfelelő hányadrészeivel egyenes arányban állanak, a (7—8.) oldalon kimérendő és az „s" ponttal összekötendő pont közvetlenül nyerhető.

Nevezzük a még hiányzó (vagy esetleg fölösleges) és a háromszögből lehasitandó területrészt t_1-nek, a többi részt t_2-nek, legyenek



6. ábra.

továbbá az alapvonalnak ugyanezen arányban kijelölt szakaszai a_1 és a_2; amikor

$$(a_1 + a_2) = a = \overline{(7,8)} \text{ és } (t_1 + t_2) = t(s,7,8)\ \Delta$$

területe, akkor

$$\frac{a_1 m}{2} = t_1 \text{ és } \frac{a_2 m}{2} = t_2,$$

amiből

$$\frac{a_1 m}{2} : \frac{a_2 m}{2} = t_1 : t_2 \text{ és}$$

$$a_1 : (a_1 + a_2) = t_1 : [t_1 + t_2)$$

$$a_1 = \frac{t_1 a}{t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XXII.}$$

14. A 6. ábrán bemutatott példa megoldása.

Legyen a feladvány, hogy az (1—10) szabálytalan sokszögből, valamely oknál fogva és arány szerint 76·25 □-egység levágandó, ugy, hogy a választóvonal az „*s*“ pontból induljon ki.

A választóvonal szembecslés szerint az (*s*, 7, 8) háromszögbe fog esni. A 13. pontban mondottakat követve, válaszszuk (szabadon) azon területrészt, amely a kihasitandó 76·25 négyzetegységnél kisebb, vagyis a felvett háromszögön kivül esik. Ez az (*s*, 8, 9, 10, 1, 2, 3). Ennek területe determinánsokkal: [$x_s = 14{\cdot}3$ és $y_s = 1{\cdot}0$ szintén bemérés eredménye].

$$
\begin{array}{lllll}
x_s \,.\, y_8 - x_8 \,.\, y_s & = 14{\cdot}3 \times 7 - 8 \times 1 & = 100{\cdot}1 - 8 & = 92{\cdot}1 & \\
x_8 \,.\, y_9 - x_9 \,.\, y_8 & = 8 \times 9 - 4 \times 7 & = 72 - 28 & = 44 & \\
x_9 \,.\, y_{10} - x_{10} \,.\, y_9 & = 4 \times 6 - 0 \times 9 & = 24 - 0 & = 24 & \\
x_{10} \,.\, y_1 - x_1 \,.\, y_{10} & = 0 \times 3 - 1 \times 6 & = 0 - 6 & = & -6 \\
x_1 \,.\, y_2 - x_2 \,.\, y_1 & = 1 \times 1 - 6 \times 3 & = 1 - 18 & = & -17 \\
x_2 \,.\, y_3 - x_3 \,.\, y_2 & = 6 \times 0 - 13 \times 1 & = 0 - 13 & = & -13 \\
x_3 \,.\, y_s - x_4 \,.\, y_3 & = 13 \times 1 - 17 \times 0 & = 13 - 0 & = 13 & \\
\hline
 & & & \multicolumn{2}{l}{\dfrac{173{\cdot}1 - 36}{2} = 68{\cdot}55}
\end{array}
$$

Ezen rendszálak bemérési adatai a 16. pontban vannak közölve. Az (*s*, 7, 8) háromszögből kihasitandó még

$$76{\cdot}25 - 68{\cdot}55 = 7{\cdot}7 \ \square\text{-egység.}$$

Az (*s*, 7, 8) háromszög területe a fentihez hasonló számitás szerint 21·35 □-egység, a (7—8) egyenes hossza pedig

$$\sqrt{(x_7 - x_8)^2 + (y_7 - y_8)^2} = \sqrt{(13 - 8)^2 + (9 - 7)^2} = 5{\cdot}38$$

hosszegység.

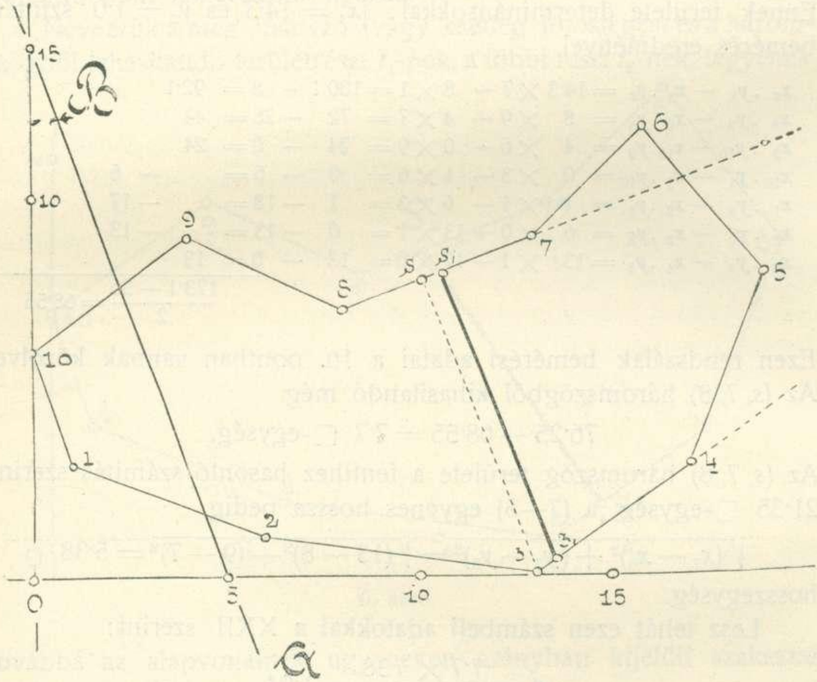
Lesz tehát ezen számbeli adatokkal a XXII. szerint:

$$a_1 = \frac{7{\cdot}7 \times 5{\cdot}38}{21{\cdot}35} = 1{\cdot}94$$

hosszegység, ami 8-tól 7-felé, a határvonalon lemérendő, hogy az ($s - s_1$) egyenest, mint pontos osztóvonalat kapjuk.

15. Ugyanezen polygon felosztásához a 2. feltétel az lehet, hogy *az osztóegyenesnek egy bizonyos előre meghatározott irányunak,* például a természetben is meglevő valamely egyenessel párhuzamosnak kell lennie.

A közönséges szögmértan itt is a választható módszer lehet, de mert — mint alább látni fogjuk — esetleg igen hegyesszögű és hosszuoldalu háromszög vonandó a számitásba és mert a pontos távolságméréseket egyik módszer sem nélkülözheti, a legkényelmesebb és legrövidebb az elemző mértani, a derékszögü parallel tengelyrendszer esetével, mint azt eddig is alkalmaztuk. A 7. ábrán (6-tal azonos) a tengelyrendszert egészen tetszés szerint szerkeszthetjük, azért egyszerüsités és kényelem végett az már eleve a poligon két törési pontján megy keresztül.



7. ábra.

A sokszög felvételekor már gondoskodnunk kell az $A—B$ egyenes, mint a megkövetelt iránynak a beszerkesztéséről is, hogy azt a tengelyrendszerre vonatkoztatva, annak tengelymetszetei könnyen és pontosan lemérhetők és az iránynak, mint egyenesnek egyenlete és ezzel egyuttal annak tangense (általánosságban iránytényezője) meghatározható legyen.

Ezek után — mint az előbb is tettük — becslés szerint, megközelitő pontossággal meghatározzuk a sokszög azon két szemközt fekvő oldalát, amelyeket az osztó egyenes, valószinüség szerint metszeni fog, és ezen két oldal valamelyik alkalmas pontjából, pl. a végpontból (7. ábrán a 3-ból) a kötelező iránynyal párhuzamos egyenest vonunk.

Ez történhetik szerkesztés utján is, de mert a számitási eredmények mindig pontosabbak és mert az igy nyert adatokra az egész müvelet folyamán állandó és mellőzhetlen szükségünk van, azért czélszerübb azokkal élni, annál is inkább, mert mint alább látni fogjuk az analitikai eredmények mellett a szerkesztések, különösen a segédvonalaké mellőzhető és a végeredmény a számitásokból közvetlenül folyik.

Legyenek a kötelező irányt jelző A—B egyenes tengely metszései a és b akkor ezen egyenes egyenlete Salmon szerint:

$$AB \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \quad \text{és} \quad tg\alpha = -\frac{b}{a}$$

Miután pedig a 3 ponton vonandó párhuzamos osztóvonal tangensének ugyanennek kell lennie, azért a 3 és „s“ pontokon átmenő egyenes egyenlete,

$$\frac{y_s - y_3}{x_s - x_3} = -\frac{b}{a}$$

azaz $$b x_s + a y_s - [b x_3 + a y_3] = 0 \equiv (\overline{3, s}) \quad . \quad . \quad \text{XXIII.}$$

amely egyenletben az „s“ pont $x_s \mid y_s$ rendszálai még ismeretlenek. Az „s“ pont azonban a (7—8) egyenesen is rajta fekszik, tehát tartozik annak egyenletét is kielégiteni; azaz

$$x_s [y_8 - y_7] + y_s [x_7 - x_8] + [x_8 y_7 - x_7 y_8] = 0 \equiv (\overline{7, 8}) \quad \text{XXIV.}$$

Ezen két lineáris egyenletből (XXII. XXIII.) már az ismeretlen $x_s \mid y_s$ coordináták kiszámithatók és pedig pl. determinansokkal:

$$\left.\begin{aligned} x_s &= \frac{(x_8 - x_7)(b x_3 + a y_3) - a(x_8 y_7 - x_7 y_8)}{a(y_8 - y_7) - b(x_7 - x_8)} \\ y_s &= \frac{(y_8 - y_7)[b x_3 + a y_3] + b[x_8 y_7 - x_7 y_8]}{a(y_8 - y_7) - b(x_7 - x_8)} \end{aligned}\right\} \text{XXV.}$$

Ha a 3. pont nem feküdnék épen a tengelyen, annak rendszálai hasonlóképen volnának számitandók, de szabadságunkban áll a tengelyrendszert mindenkor ugy választani, hogy az egyik tengely ezen a ponton menjen át.

Megismerve ilyképen az „s" pont helyét is, a megközelitő pontossággal leszelt területrész — a mint látjuk szerkeszetés nélkül is — kiszámitható és pedig miután a rendszálak ugy is kezünkügyében állanak, a legegyszerübben és legrövidebben ismét az analysis

$$[x_3 y_s - x_s y_3] + [x_s y_8 - x_8 y_s] + \ldots\ldots [x_2 y_3 - x_3 y_2] = 2 t_1$$

egyenletével, ha t. i. a megközelitő pontossági terület részt t_1-e és a kivánt nagysághoz még hiányzó részt t_2-vel jelöljük, ugy hogy

$$t_1 + t_2 = t$$

legyen, vagyis az egész parczellából pontosan levágandó területrész.

A $t - t_1 = t_2$ területérték birtokában a tulajdonképeni határvonal helyét a $\overline{(3-s)}$ segédvonal párhuzamos elcsusztatásával nyerjük.

Miután nagyon ritka és csak kivételes eset az, hogy az ilynemü szabálytalan alakok két szemközt fekvő oldala, vagy szakasza párhuzamos legyen és mert magának az egyenesnek a kitüzése az alábbiakban előadottal ugyis azonos, ezt az eshetőséget nem kell külön tárgyalnom, de rátérek arra az esetre, ha a

szemközt fekvő két oldal nem párhuzamos. A hiányzó területrészt (t_2) a legközönségesebben azon háromszög területéhez kell viszonyitanunk, amelyet a felvett megközelitő pontosságu (s—3) vonal és az általa metszett, szemközt fekvő, két nem párhuzamos oldal képeznek.

A rajzból (7. ábra) láthatni, hogy ezen két szemközt fekvő és egymástól a legtöbbször csak kevéssé elhajló egyenes szögének és közös metszőpontjának megszerkesztése a leggyakrabban lehetetlen (a papirlap szélein kivül esik), azért az elemző mértani tételek, mint amelyek a legszabatosabb resultatumokat szolgáltatják egyszerüen mellőzhetlenek.

A két szemköztfekvő egyenes közös metszőpontját vagyis a keresett háromszög harmadik pontját és ebből annak területét tehát ezen uton, mindenekelőtt megállapitjuk.

Legyenek ezen közös metsző „P" pont coordinatái $x_p \mid y_p$, akkor ezen rendszálak az

$$x[y_7 - y_8] + y[x_8 - x_7] + [x_7 y_8 - x_8 y_7] = 0 \equiv \overline{(7-8)}$$

és $$x(y_3 - y_4) + y(x_4 - x_3) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) = 0 \equiv \overline{(3-4)}$$

egyenleteket kielégiteni tartoznak, amikből a pont rendszálai lesznek:

$$\left.\begin{aligned} x_p &= \frac{(x_8-x_7)(x_3y_4-x_4y_3)-(x_4-x_3)(x_7y_8-x_8y_7)}{(y_7-y_8)(x_4-x_3)-(x_8-x_7)(y_3-y_4)} \\ y_p &= \frac{(y_3-y_4)(x_7y_8-x_8y_7)-(y_7-y_8)(x_3y_4-x_4y_3)}{(y_7-y_8)(x_4-x_3)-(x_8-x_7)(y_3-y_4)} \end{aligned}\right\} \text{XXVI.}$$

ezen három pont rendszálaival a $(3-s-p)$ háromszög területe:

$$(x_3y_p-x_py_3)+(x_py_s-x_sy_p)+(x_sy_3-x_3y_3)=2\tau\Delta \quad \text{XXVII.}$$

A továbbiakban ismét azon viszony nyer alkalmazást, a mely a hasonló háromszögek területei és magasságai között áll. Ha most τ_1-el jelezzük azon háromszög területét, amelynek alapja a keresett uj vonal és csucsa ugyanezen „P“, akkor

$$\frac{\tau}{\tau_1}=\frac{D^2}{d^2} \quad \text{[analog VI.-al]}$$

„D“ az $(s-3)$ „d“ pedig az $(s_1\,3_1)$ keresett egyenes távolsága „P“ ponttól. Ebből

$$d=D\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau}}=\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \text{XXVIII.}$$

A „d“ értékének a XXVIII. egyenlet szerint való meghatározásához szükséges számbeli adatokat a következőkép veszszük:

a) a „τ“ értékét a XXVII. egyenlet adta

b) a $\tau_1=\tau-t_2$ értéket ugy kapjuk, ha a kiszámitott segédháromszög területéből levonjuk azon területi különbözetet, amennyi az egész sokszögből már — megközelitő pontossággal — leszelt területrész és a kikötött arányu, pontos területrész között még fennáll, végül

c) a „D“ értékét a megközelitő pontossággal felvett osztóvonal, vagyis az $(s-3)$ egyenes egyenletének „Hesse“-féle alakja adja akkor, ha abba az x/y futórendszálak helyett a reá nézve idegen „P“ pont x_p/y_p rendszálait behelyettesitjük. [*L.* 5. pont]

Az $(s-3)$ egyenes egyenlete (két ponton át menő)

$$x(y_s-y_3)+y(x_3-x_s)-(x_3y_s-x_sy_3)=0\equiv(s-3) \quad \text{XXIX.}$$

Átalakitva ezt a normális alakra és az x_p/y_p coordinátákat is helyettesitve:

$$\frac{x_p(y_s-y_3)+y_p(x_3-x_s)-[x_3y_s-x_sy_3]}{\sqrt{(x_s-x_3)^2+(y_s-y_3)^2}}=D=\text{XXX.}$$

Ezzel azonban már meg van adva, a XXVIII. szerint a

$$D - d = \delta$$

is, vagyis az a távolság, amennyivel a felvett $(s - 3)$ ideiglenes vagy megközelitő osztóvonal, irányának megtartása mellett, eltolandó.

Az eddig megszerzett adatokkal a valóságos és pontos, osztó egyenes mértani helye már meghatározható, egyenlete és a poligonnal közös metszéspontjai teljes szabatossággal kiszámithatók.

Ezen pontosan osztó egyenes egyenlete azon feltételekben van körülirva, hogy az $(s - 3)$ segédvonallal párhuzamos és a tengelyrendszer középpontjától való távolsága a 7. ábrán felvett esetben „δ"-val nagyobb, mint a $(3 - s)$ egyenesé. Ha tehát a XXIX. egyenletet a normális alakra hozom és a „δ" értékkel ugy vonom kapcsolatba, hogy

$$\frac{x[y_s - y_3] + y[x_3 - x_s] - [x_3 y_s - x_s y_3]}{\sqrt{(x_3 - x_s)^2 + (y_s - y_3)^2}} = \delta;$$

illetőleg

$$x[y_s - y_3] + y[x_3 - x_s] - [x_3 y_s - x_s y_3 + \\ + \delta\sqrt{(x_3 - x_s)^2 + (y_s - y_3)^2}] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \text{XXXI.}$$

akkor az ezen egyenletben szereplő, futó coordináták már csakis a keresett választóvonalra vonatkozhatnak, vagyis hogy a XXXI. egyenlet a keresett választóvonal egyenlete, a melynek ugy a $\overline{(7-8)}$ mint a $(3-4)$ egyenesekkel közös pontja van és amelynek rendszálai, az eddig megismert egyenletek egy-egy párjából megállapithatók. Nevezetesen:

$$x(y_s - y_3) + y(x_3 - x_s) - [x_3 y_s - x_s y_3 + \\ + \delta\sqrt{(x_3 - x_s)^2 + (y_3 - y_s)^2}] = 0 \equiv \overline{(3_1 - s_1)}$$

$$x(y_3 - y_4) + y(x_4 - x_3) + [x_3 y_4 - x_4 y_3] = 0$$

és e kettőből

$$\left.\begin{aligned} x_{3'} &= \frac{(x_3 - x_s)(x_3 y_4 - x_4 y_3) + (x_4 - x_3)[x_3 y_s - x_s y_3 + \delta\sqrt{(x_3 - x_s)^2 + (y_3 - y_s)^2}]}{(x_4 - x_3)(y_s - y_3) - (x_3 - x_s)(y_3 - y_4)} \\ y_{3'} &= \frac{(y_4 - y_3)[x_3 y_s - x_s y_3 + \delta\sqrt{(x_3 - x_s)^2 + (y_3 - y_s)^2}]}{(x_4 - x_3)(y_s - y_3) - (x_3 - x_s)(y_3 - y_4)} \end{aligned}\right\} \text{XXXII.}$$

Hasonlóképpen az

$$x(y_s - y_3) + y(x_3 - x_s) - [x_3 y_s - x_s y_3 + \delta \sqrt{(x_3 - x_s)^2 + (y_s - y_3)^2}] =$$
$$= 0 \equiv (\overline{s_1 - 3_1})$$

$$x(y_7 - y_8) + y(x_8 - x_7) + (x_7 y_8 - x_8 x_7) = 0 \equiv (\overline{7 - 8})$$

egyenletekből

$$\left.\begin{aligned} x_{s'} &= \frac{(x_3 - x_s)(x_7 y_8 - x_8 y_7) + (x_8 - x_7)[x_3 y_s - x_s y_3 + \delta . \sqrt{(x_3 - x_s)^2 + (y_s - y_3)^2}]}{(x_8 - x_7)(y_s - y_3) - (x_3 - x_s)(y_7 - y_8)} \\ y_{s'} &= \frac{(y_8 - y_7)[x_3 y_s - x_s y_3 + \delta \sqrt{(x_3 - x_s)^2 + (y_s - y_{31})^2}] - (y_s - y_3)(x_7 y_8 - x_8 y_7)}{(x_8 - x_7)(y_s - y_3) - (x_3 - x_s)(y_7 - y_8)} \end{aligned}\right\} \text{XXXIII.}$$

Ezekkel a feladat meg is van oldva.

Közbevetőleg meg kell jegyeznem, hogy az egyenes normális alakjában:

$$x . \cos\alpha + y . \sin\alpha - p = 0$$

a „p“, vagyis a normális hossza csak pozitiv szám lehet és a 0-ra redukált alakjában az egyenlet baloldalán mindig — előjellel kell állania. Amennyiben pedig a levezetések folyamán végső eredményképen a „p“ értéknek megfelelő tag + előjellel jelentkeznék, az egész egyenlet 1-el való szorzás vagy ennek kiemelése által aszerint alakitandó.

Az eddigi példákban a kitűzni kivánt rendszálak értékeinek megszerzése után gondoskodnunk kellett egy — a természetben is meglevő és az elméleti tengelyrendszerre is vonatkoztatott — alapvonalról, amelyre a rendszáladatok, az elméleti tengelyrendszer eltolása és elforgatása szerint átszámitandók voltak. XXIII—XXXIII. egyenletek, illetőleg azoknak rövid továbbvezetése ezen műveletek alól felment, amennyiben az itt meglevőkből

$$\sqrt{(x_3 - x_{3'})^2 + (y_3 - y_{3'})^2} = \delta_1$$

és

$$\sqrt{(x_8 - x_{s'})^2 + (y_8 - y_{s'})^2} = \delta^2 \quad . \ . \ . \quad \text{XXXIV.}$$

egyenletek azon szalaghosszuságokat adják, amelyekkel a keresett egyenes két végpontja magán a poligonon és pedig a 3. ponttól a 4. felé, illetőleg 8.-tól a 7. felé közvetlenül lerakható.

16. Pl. A 7. ábrán bemutatott szabálytalan tizszögből olyképen választandó el valamely előre megadott követelménynél fogva 76·25 □-egység, hogy az osztóvonal egy bizonyos „A—B" iránynyal párhuzamos legyen.

A tizszögnek már a 14. pontban idézett és körzővel bemért rendszálai itt következnek.

$$\begin{array}{llll} x_1 = 1{\cdot}0; & y_1 = 3 & x_6 = 16{\cdot}0; & y_6 = 12 \\ x_2 = 6; & y_2 = 1 & x_7 = 13{\cdot}0; & y_7 = 9 \\ x_3 = 13{\cdot}0; & y_3 = 0 & x_8 = 8; & y_8 = 7 \\ x_4 = 17{\cdot}0; & y_4 = 3 & x_9 = 4; & y_9 = 9 \\ x_5 = 19{\cdot}0; & y_5 = 8 & x_{10} = 0; & y_{10} = 6 \end{array}$$

Az $A—B$ egyenes (a kikötött iránynyal párhuzamos) tengely metszései ugyanigy történt mérés szerint:

$$a = 5; \quad b = 14{\cdot}0$$

és ezek alapján ezen egyenes egyenletének általános alakja

$$14\,x + 5\,y - 70 = 0 \equiv \overline{(A—B)}$$

A polygont megközelitő pontossággal szelő $\overline{(3 - s)}$ egyenes pedig a XXIII. szerint

$$14\,x_s + 5\,y_s - [14\,.\,13 + 5\,.\,0] = 0$$

azaz

$$14\,x_s + 5\,y_s - 182 = 0 \equiv \overline{(s—3)}$$

amelyben még a „s" pont $x_s | y_s$ rendszálai ismeretlenek s amelyeknek értékét a XXV. egyenlet szolgáltatja

$$x_s = \frac{(8—13)(14{\cdot}13 - 5 \times 0) - 5\,(8{\cdot}9 - 13{\cdot}7)}{5\,(7—9) - 14\,(13 - 8)} =$$

$$= \frac{-5 \times 182 + 5 \times 19}{-5{\cdot}2 - 14{\cdot}5} = x_s = 10{\cdot}2$$

$$y_s = \frac{(7 - 9)(14\,.\,13 + 5 \times 0) + 14\,(8 \times 9 - 13 \times 7)}{5\,(7 - 9) - 14\,(13 - 8)} =$$

$$= \frac{364 + 266}{80} = y_s = 7{\cdot}88$$

A feladat szerint az egészből az $A—B$ iránynyal párhuzamos vonallal 76·25 □-egység lehasitandó.

Az $(s—3)$ egyenessel, megközelitő pontosság szerint leszelt terület:

$$x_4 \times y_5 - x_5 \times y_4 = 13{\cdot}0 \times 7{\cdot}88 - 10{\cdot}2 \times 0 = 102{\cdot}44 - 0 = 102{\cdot}44$$
$$x_5 \times y_8 - x_8 \times y_5 = 10{\cdot}2 \times 7 - 8 \times 7{\cdot}88 = 71{\cdot}4 - 63{\cdot}04 = 8{\cdot}36$$
$$x_8 \times y_9 - x_9 \times y_8 = 8 \times 9 - 4 \times 7 = 72 - 28 = 44{\cdot}-$$
$$x_9 \times y_{10} - x_{10} \times y_9 = 4 \times 6 - 0 \times 9 = 24 - 0 = 24{\cdot}-$$
$$x_{10} \times y_1 - x_1 \times y_{10} = 0 \times 3 - 1 \times 6 = 0 - 6 = - 6.-$$
$$x_1 \times y_2 - x_2 \times y_1 = 1 \times 1 - 6 \times 3 = 1 - 18{\cdot}0 = - 17{\cdot}-$$
$$x_2 \times y_3 - x_3 \times y_2 = 6 \times 0 - 1{\cdot}3 \times 1 = 0 - 13{\cdot}0 = - 13{\cdot}-$$
$$= [178{\cdot}8 - 36{\cdot}0]\,{}^1\!/_2 = \mathbf{71{\cdot}4}\ \square\textit{-egység.}$$

Eszerint a pontosan leszelendő területből hiányzik még

$$76{\cdot}25 - 71{\cdot}4 = \mathbf{4{\cdot}85}\ \square\textit{-egység.}$$

A párhuzamos eltolás arányosságának megállapitásához szükséges (elméleti) háromszög csucspontjainak, „S“-nek rendszálai a XXVI. egyenlet szerint

$$x_p = \frac{(8-13)(13.3-0)-(17-13)(13.7-8.9)}{(9-7)(17-13)-(8-13)(0-3)} =$$
$$= \frac{-5.39-4.19}{2.4-3.5} = x_p = \mathbf{38{\cdot}71}$$
$$y_p = \frac{(0-3)(13.7-8.9)-2.13.3}{(9-7)(17-13)-(8-13)(0-3)} =$$
$$= \frac{-57-78}{-7} = y_p = \mathbf{19{\cdot}3}$$

a háromszög területe pedig a XXVII. egyenlet szerint:

$$2\tau = [13 + 19{\cdot}3 - 38{\cdot}71 \times 0] + [38{\cdot}71 \times 7{\cdot}88 - 10{\cdot}2 \times 19{\cdot}3] +$$
$$+ [10{\cdot}2 \times 0 - 13 + 7{\cdot}88]$$
$$= 250{\cdot}9 + 305{\cdot}03 - 196{\cdot}86 - 102{\cdot}44$$
$$\frac{256{\cdot}63}{2} = \tau = \mathbf{128{\cdot}32}\ \square\text{-egység és}$$
$$\tau_1 = 128{\cdot}32 - 4{\cdot}85 = \mathbf{123{\cdot}47}\ \square\text{-egység.}$$

A τ vagyis az egész háromszög magasságát XXX. egyenletben látjuk

$$D = \frac{38{\cdot}71 \times 7{\cdot}88 + 19{\cdot}3\,(13 - 10{\cdot}2) - 13 \times 7{\cdot}88}{\sqrt{(10{\cdot}2-13)^2 + (7{\cdot}88-0)^2}} =$$
$$= \frac{256{\cdot}64}{\sqrt{69{\cdot}93}} = D = \mathbf{30{\cdot}7}$$

és ebből (L. XXVIII.).

$$d = 30{\cdot}7\sqrt{\frac{123{\cdot}47}{128{\cdot}32}} = 30{\cdot}7\sqrt{0{\cdot}9856} = d = \mathbf{30{\cdot}09}\ \text{és végül}$$
$$30{\cdot}7 - 30{\cdot}09 = \delta = \mathbf{0{\cdot}61}\ \text{hosszegység}$$

A XXXII. és XXXIII. egyenletek adják az uj osztóvonalnak és a sokszög két szembenfekvő oldalának közös, vagyis metszőpontjait. És találjuk, hogy

$$x_{3'} = \frac{(13-10{\cdot}2).(13\times 3-0)+(17-13)(13\times 7{\cdot}88+ \\ +0{\cdot}61.\sqrt{(10{\cdot}2-13)^2+7{\cdot}88^2})}{(17-13)(7{\cdot}88-0)-(13-10{\cdot}2)(0-3)} =$$

$$= \frac{2{\cdot}8\times 39+4(102{\cdot}4+0{\cdot}61\times 8{\cdot}37)}{4\times 7{\cdot}88+2{\cdot}8\times 3} = \frac{109{\cdot}2+430}{31{\cdot}52+8{\cdot}4} = x3_1 = \mathbf{13{\cdot}51}$$

$$y_{3'} = \frac{3(13+7{\cdot}88+0{\cdot}61\times 8{\cdot}37)-7{\cdot}88\times 13\times 3}{31{\cdot}52+8{\cdot}4} = y3_1 = \mathbf{0{\cdot}38}$$

Ugyanigy adja a XXXIII. egyenletpár az

$x s_1 = \mathbf{10{\cdot}76}$; és $y s_1 = \mathbf{8{\cdot}11}$ értékeket.

Végül pedig a 3. ponttól 4 felé lemérendő a XXXIV. képlet szerint

$\delta_1 = \sqrt{(13-13{\cdot}51)^2+(0-0{\cdot}38)^2} = \mathbf{0{\cdot}64}$ hosszegység

a 8.-tól 7. felé

$\delta_2 = \sqrt{(8-10{\cdot}76)^2+(7-8{\cdot}11)^2} = \mathbf{2{\cdot}78}$ hosszegység

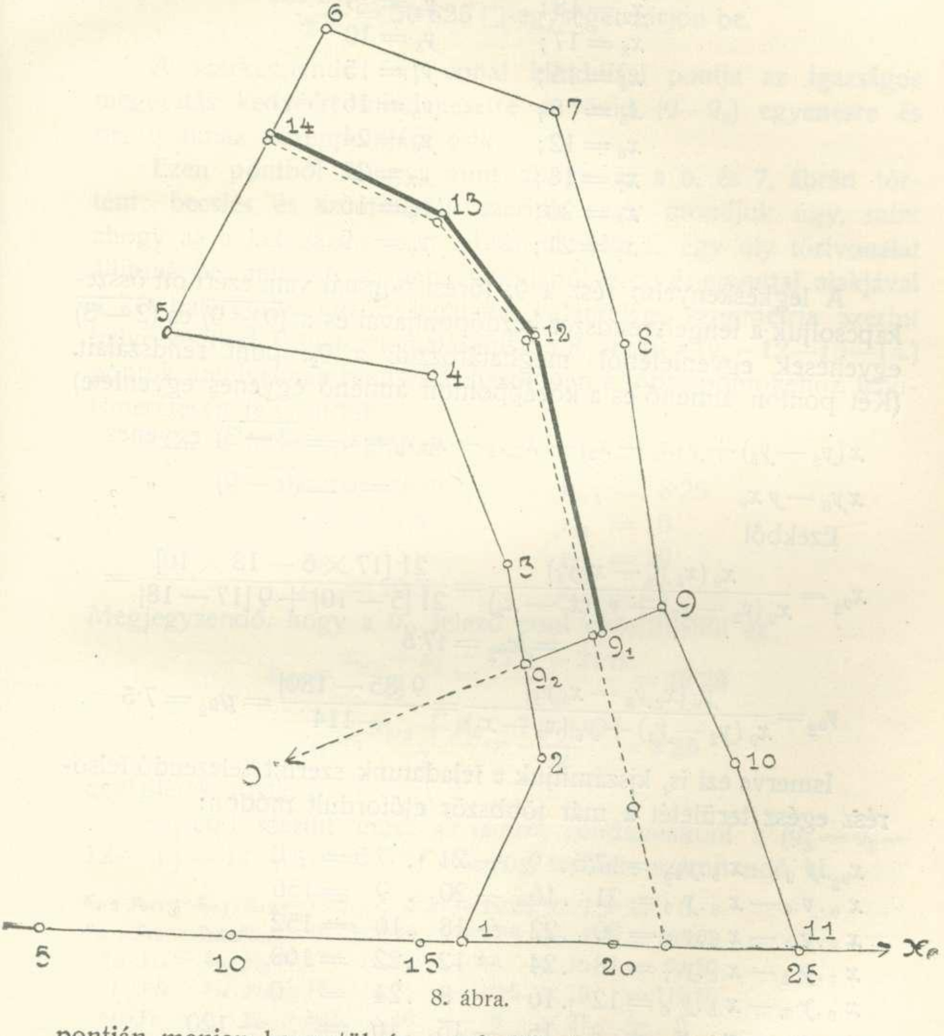
Látjuk ezekből, hogy a tiszta számitási eredmények, a tengelyrendszeren kivül a többi szerkesztések megtételét szükségtelenné tették.

17. Legelől tett igéretemhez képest tárgyalnom kell még egy igen gyakran előforduló, a 8. ábrán bemutatott azon esetet, amikor a felosztandó, hosszukás idom, akár a közepén, akár valamelyik vagy mindkét szélén oly annyira összeszorul, hogy az eddig ismertetett eltoláshoz szükséges és kiszámitott távolságot sem adja ki. Ha tehát ezen — másnemü eljárást igénylő — esettel állunk szemben, vagy valahányszor az 1—12. pontokban előadott eltolásokkal a felosztandó parczella másik visszamaradó részét annyira eltorzitanánk, hogy az nemcsak alakja miatt nem foglalhat helyet a térképen, de esetleg a mivelésre vagy beépitésre alkalmatlanná válik, akkor a következő megoldási móddal kell élnünk.

Megjegyzem, hogy miután az itt alkalmazást nyerő analytikai tételek az előzökben már mind bizonyitást nyertek, itt egyesen a 8. ábrán felvett példa kidolgozásához foghatunk.

A nevezett ábrán a felosztandó, hosszukás sokszög a középen szűkül.

Az egész területet körülbelül és lehetőleg ott, ahol az a legkeskenyebb, két részre osztjuk keresztben és pedig olyképen, hogy ezen osztóvonal az eddigi módon felveendő tengelyrendszer kezdő-



8. ábra.

pontján menjen keresztül és a számitások egyszerüsitése kedvéért egyuttal a sokszög valamelyik törési pontján is keresztül. Ez által a feladat megoldása is két részre oszlik, amennyiben a feloszlott felső és alsó résszel külön-külön kell végeznünk.

A példán felvett sokszög törési pontjainak jól felmért rendszálai a következők: (Elegendőnek véltem csak az egyik, a felső területrész rendszálait felvenni)

$$\begin{array}{ll} x_2 = 18; & y_2 = 5 \\ x_3 = 17; & y_3 = 10 \\ x_4 = 15; & y_4 = 15 \\ x_5 = 8; & y_5 = 16 \\ x_6 = 12; & y_6 = 24 \\ x_7 = 18; & y_7 = 22 \\ x_8 = 20; & y_8 = 16 \\ x_9 = 21; & y_9 = 9 \end{array}$$

A legkeskenyebb rész a 9. törési pontnál van, ezért ott összekapcsoljuk a tengelyrendszer kezdőpontjával és a $\overline{(0-9)}$ és $\overline{(2-3)}$ egyenesek egyenletéből meghatározzuk a 9_2. pont rendszálait. (Két ponton átmenő és a középponton átmenő egyenes egyenlete)

$$x(y_2-y_3)+y(x_3-x_2)+x_2y_3-x_3y_2=0\equiv\overline{(2-3)} \text{ egyenes}$$

$$xy_8-y\,x_9 \qquad =0\equiv\overline{(0-9)} \quad \text{"}$$

Ezekből

$$x_{9_2}=\frac{x_9(x_3y_2-x_2y_3)}{x_9(y_2-y_3)+y_9(x_3-x_2)}=\frac{21\,[17\times5-18\times10]}{21\,[5-10]+9\,[17-18]}=$$

$$=x_{9_2}=\mathbf{17{\cdot}5}$$

$$y_{9_2}=\frac{y_9\,[x_2y_3-x_3y_2]}{x_9(y_2-y_3)+y_9(x_3-x_2)}=\frac{9\,[85-180]}{-114}=y_{9_2}=\mathbf{7{\cdot}5}$$

Ismerve ezt is, kiszámitjuk a feladatunk szerint felezendő felsőrész egész területét a már többször előfordult módon:

$$\begin{array}{lllllll}
x_{9_2}.y_9-x_9.y_{9_2} & =17{\cdot}5 & .\ 9 & -21 & .\ 7{\cdot}5 & = & 0 \\
x_9.y_8-x_8.y_9 & =21 & .16 & -20 & .\ 9 & = & 156 \\
x_8.y_7-x_7.y_8 & =20 & .22 & -18 & .16 & = & 152 \\
x_7.y_6-x_6.y_7 & =18 & .24 & -12 & .22 & = & 168 \\
x_6.y_5-x_5.y_6 & =12 & .16 & -\ 8 & .24 & = & 0 \\
x_5.y_4-x_4.y_5 & =\ 8 & .15 & -15 & .16 & = & -120 \\
x_4.y_3-x_3.y_4 & =15 & .10 & -17 & .15 & = & -105 \\
x_3.y_{9_2}-x_{9_2}.y_3 & =17 & .\ 7{\cdot}5 & -17{\cdot}5 & .10 & = & -485 \\
\hline
 & & & & & & 476-273{\cdot}5=202{\cdot}5
\end{array}$$

$t = 202{\cdot}5 : 2 = 101{\cdot}25\ \square$-egység, amit a feladvány szerint feleznünk kell, vagyis, hogy a szerkesztendő uj töröttvonal a poligon belső oldalával

$$\frac{101{\cdot}25}{2} = 50{\cdot}625\ \square\text{-egységet zárjon be.}$$

A szerkesztendő tört vonal kiindulási pontja az igazságos megosztás kedvéért mindenesetre a rövid (9—9_2) egyenesre és pedig annak középpontjára esik.

Ezen pontból épugy, mint ahogy az a 6. és 7. ábrán történt: becslés és szemmérték szerint, vagy mondjuk ugy, mint ahogy az a két gazda az 1. ábrát elosztotta, egy oly törtvonalat állitunk be, amely a területet nagyjából felezi és egyuttal alakjával a két határvonal között legalább valamelyes szimmetria szerint helyezkedik el. Ezen törtvonal pontjai a 8. ábrán a (9_1—12—13—14.) pontok, amelyeknek rendszálai hasonlóan a többi pontokéhoz, lelkiismeretesen felveendők.

Ezek a felvett példában:

$$\begin{aligned} x_{9,1} &= 19{\cdot}25; & y_{9,1} &= 8{\cdot}25 \\ x_{12} &= 17{\cdot}5; & y_{12} &= 16 \\ x_{13} &= 15; & y_{13} &= 19 \\ x_{14} &= 10{\cdot}5; & y_{14} &= 21 \end{aligned}$$

Megjegyzendő, hogy a 9_1. felező pont coordinátáit az

$$x_{91} = \frac{x_{9,2} + x_9}{2} = \frac{17{\cdot}5 + 21{\cdot}0}{2} = 19{\cdot}25$$

$$y_{91} = \frac{y_{9,2} + y_9}{2} = \frac{7{\cdot}5 + 9}{2} = 8{\cdot}25$$

egyenletek adták.

Sorrend szerint most az ismert rendszálakból a (9_2—9_1—12—13—14—5—4—3) sokszög területe számitandó ki.

$$\begin{array}{lllllll}
x_{9,2}\cdot y_{9,1} - x_{9,1}\cdot y_{9,2} = 17{\cdot}5 & \times\ 8{\cdot}25 & -\ 19{\cdot}25 & \times\ 7{\cdot}5 & = & 0 & \\
x_{9,1}\cdot y_{12} - x_{12}\cdot y_{9,1} = 19{\cdot}25 & \times\ 16 & -\ 17{\cdot}5 & \times\ 8{\cdot}25 & = & 163{\cdot}62 & \\
x_{12}\cdot y_{13} - x_{13}\cdot y_{12} = 17{\cdot}5 & \times\ 19 & -\ 15 & \times\ 16 & = & 92{\cdot}50 & \\
x_{13}\cdot y_{14} - x_{14}\cdot y_{13} = 15 & \times\ 21 & -\ 10{\cdot}5 & \times\ 19 & = & 115{\cdot}50 & \\
x_{14}\cdot y_5 - x_5\cdot y_{14} = 10{\cdot}5 & \times\ 16 & -\ 8 & \times\ 21 & = & 0 & \\
x_5\cdot y_4 - x_4\cdot y_5 = 8 & \times\ 15 & -\ 15 & \times\ 16 & = & & -120 \\
x_4\cdot y_3 - x_3\cdot y_4 = 15 & \times\ 10 & -\ 17 & \times\ 15 & = & & -105 \\
x_3\cdot y_{92} - x_2\cdot y_3 = 17 & \times\ 7{\cdot}5 & -\ 17{\cdot}5 & \times\ 10 & = & & -\ 48{\cdot}5 \\
\hline
 & & & & & \multicolumn{2}{l}{371{\cdot}62 - 273{\cdot}5 = 98{\cdot}12}
\end{array}$$

A megközelitő pontossággal alakitott sokszög területe tehát

$$98{\cdot}12 : 2 = 49{\cdot}06 \;\square\text{-egység}$$

a hiányzó területrész pedig:

$$50{\cdot}63 - 49{\cdot}06 = \mathbf{1{\cdot}57} \;\square\text{-egység.}$$

A kiigazitás most már — többek között — a becslés szerint felvett polygon eltolásával ugy is történhetik, amint azt a 2. esetleg 5. vagy 8. pontok alatt láttuk. Vegyük a párhuzamos eltolást (2. pont).

Megállapitjuk t. i. először a 9, 1., 12., 13., 14. pontok és a tengelyrendszer kezdőpontja által képezett sökszög területét, ehhez hozzáadjuk a még hiányzó 1·57 területrészt és ebből a $\sqrt{\lambda} = \sqrt{T \mid t}$ viszonyszámot. Tehát:

$$\left.\begin{aligned}
x_{91} \cdot y_{12} - x_{12} \cdot y_{91} &= 19{\cdot}25 \times 16 - 17{\cdot}5 \times 8{\cdot}25 = 308 - 144{\cdot}38 \\
x_{12} \cdot y_{13} - x_{13} \cdot y_{12} &= 17{\cdot}5 \times 19 - 15{\cdot}0 \times 16 = 332{\cdot}5 - 240 \\
x_{13} \cdot y_{14} - x_{14} \cdot y_{13} &= 15 \times 21 - 10{\cdot}5 \times 19 = 315 - 199{\cdot}5
\end{aligned}\right\} = 2t$$

$$955{\cdot}5 - 583{\cdot}88 = 371{\cdot}62$$

$$\text{és } t = 185{\cdot}81;$$

a kitüzendő terület pedig

$$T = 185{\cdot}81 + 1{\cdot}57 = \mathbf{187{\cdot}38}$$

a viszonyszám pedig

$$\sqrt{\frac{187{\cdot}38}{185{\cdot}81}} = \sqrt{\lambda} = \mathbf{1{\cdot}01}$$

Ezen kiszámitott adatoknak és a IX/*a, b, c* alattiaknak felhasználásával lesznek a kivánt és a területet pontosan kétfelé-osztó, törtvonal törési pontjainak koordinátái rendre:

$$\begin{aligned}
\xi_{91} &= x_{91}\sqrt{\lambda} = 19{\cdot}25 \times 1{\cdot}01 = 19{\cdot}44 \\
\xi_{12} &= x_{12}\sqrt{\lambda} = 17{\cdot}5 \times 1{\cdot}01 = 17{\cdot}68 \\
\xi_{13} &= x_{13}\sqrt{\lambda} = 15 \times 1{\cdot}01 = 15{\cdot}15 \\
\xi_{14} &= x_{14}\sqrt{\lambda} = 10{\cdot}5 \times 1{\cdot}01 = 10{\cdot}61
\end{aligned}$$

ugyanigy

$$\begin{aligned}
\eta_{91} &= y_{91}\sqrt{\lambda} = 8{\cdot}25 \times 1{\cdot}01 = 8{\cdot}33 \\
\eta_{12} &= y_{12}\sqrt{\lambda} = 16 \times 1{\cdot}01 = 16{\cdot}16 \\
\eta_{13} &= y_{13}\sqrt{\lambda} = 19 \times 1{\cdot}01 = 19{\cdot}19 \\
\eta_{14} &= y_{14}\sqrt{\lambda} = 21 \times 1{\cdot}01 = 21{\cdot}21
\end{aligned}$$

A természetben is fellelhető bázisra való vonatkoztatást és a tengelyrendszer ezzel járó elforgatását és eltolását a 3. pontban láttuk.

Az egész terület másik, alsó részével hasonlóképen bánunk el, megjegyezve, hogy a (9_1—1.) választópolygonnak, a még nem rektifikált 9_1. pontból kell kiindulnia, mert, mint — majdnem mindig — előre feltételezhető, az itt leirt eljárás szerint az alsó és a felső törtvonal a kiigazitás után nem fog a (9—9_2.) egyenes ugyanazon pontjain találkozni.

Ennek elkerülésére vagy a pontos választóvonal eme két kiinduló pontjának szabályos összekapcsolására két mód szolgál.

Az első mód azon esetben alkalmazható czélszerüen, ha a szemmérték szerint való és a kiszámitott, pontos osztópoligon közötti távolság oly csekély, mint a fenti példában.

Ekkor ugyanis a becslés szerint felvett 9_1., 12., 13. pontok változatlanul hagyhatók és csupán a 13—14. vonalszakaszt forgatjuk a 13. pont körül addig, mig a 14-es pont az $\overline{(5—6)}$ egyenesen el nem foglalja azt a helyet, ahol a 13., 14. és 14_1. pontokból alakult háromszög területe a még hiányzó és a felvett példában 1·57 □-egységben jelentkezett területet nem adja.

Ugy ezen, mint a másik igért módszer elmélete a következő pontban van tárgyalva.

18. *Össze nem érő vonalak egybekapcsolása.* Az előző pontban azon esettel foglalkoztunk, amikor a felosztandó poligon a közepe táján vagy — mondjuk — csak az egyik záróvonalán szűkül (ami az eljárásra nézve ugyanaz). Jelenben azt a szintén elég gyakran előforduló esetet vesszük fel, amikor az osztandó, hoszszukás parcella a két végén, a honnan az osztásnak kiindulnia kell, keskeny.

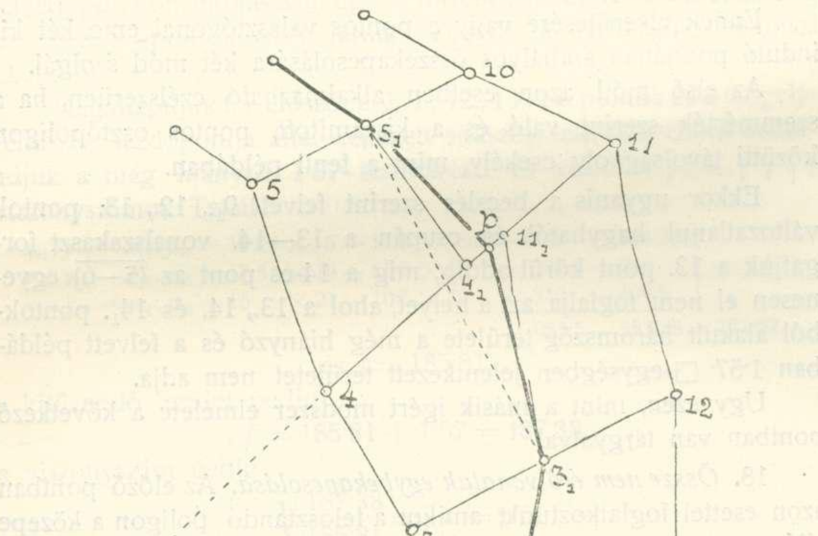
Az osztóművelet maga, az előbbivel azonos lévén, a 9. ábrán már csak a kiigazitás befejező műveletét mutatom be, a pontos felosztás megtörténtét feltételezve és ugyanezért a területnek csak azon szakaszát, a hol a két záróvonaltól kiinduló osztópoligonnak találkoznia kell, illetőleg kellene; ami azonban ritkán szokott megtörténni, mint ahogy a 9. ábrán a 4_1 11_1 pontok sem esnek össze.

Keresnünk kell tehát egy oly közös „*p*" pontot, amelyen a polygon ugy záródik, hogy a kivánt, lehasitandó területet fogja be.

Elegendő, ha a hiba kiigazitását csakis a két utolsó, össze nem érő szakaszra szoritjuk. E végből a két utolsó vonalszakasz 5. és 3. pontjain keresztül, a területre nézve már *pontosan kiszá-*

mitott sokszögből, ugyancsak az 5. és 3. törési pontokhoz vont $(5 - 5_1)$ és $(3 - 3_1)$ egyenesekkel egy-egy részt leszelünk, amelyeknek területét külön-külön kell meghatároznunk.

Legyenek a ránknézve érdekes rendszálak mérési adatai a következők:



9. ábra.

$$
\begin{array}{llcll}
x_3 = 12; & y_3 = 9 & & \xi_3 = 15; & \eta_3 = 11{\cdot}33 \\
x_4 = 9; & y_4 = 12 & & \xi_4 = 12; & \eta_4 = 16 \\
x_5 = 6; & y_5 = 17 & \text{és} & \xi_5 = 8{\cdot}5; & \eta_5 = 19 \\
x_{10} = 11; & y_{10} = 21 & & \xi_{11} = 12{\cdot}75; & \eta_{11} = 17 \\
x_{11} = 15; & y_{11} = 20 & & & \\
x_{12} = 18; & y_{12} = 14 & & &
\end{array}
$$

ahol a ξ/η jelzésű rendszálakkal a 3_1, 4_1, 11_1 és 5_1 pontok vannak képviselve.

Az első coordinata csoport bemérés eredménye, mig a második csoporthoz a 17. pont egyenletei és műveletei által jutottunk. Ezek szerint az I. jelölt felső területrész:

$$\begin{array}{l}
x_4 . \eta_4 - \xi_4\, y_4 = 9 \times 16 - 12 \times 12 = 144 - 144 = 0 \\
\xi_4 . \eta_5 - \xi_5\, \eta_4 = 12 \times 19 - 8{\cdot}5 \times 16 = 228 - 136 = 92 \\
\xi_5 . y_5 - x_5\, \eta_5 = 8.5 \times 17 - 6 \times 19 = 144{\cdot}5 - 114 = 30{\cdot}5 \\
x_5 . y_4 - x_4\, y_5 = 6 \times 12 - 9 + 17 = 72 - 153 = \underline{\qquad -81} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 122{\cdot}5 - 81 = 41{\cdot}5
\end{array}$$

$$\text{és } t_I = 41{\cdot}5 : 2 = \mathbf{20{\cdot}75} \ \square\text{-egység}$$

a II. (alsó) része pedig

$$\begin{array}{l}
x_3 . \eta_3 - \xi_3 . y_3 = 12 \times 11{\cdot}33 - 15 \times 9 = 135{\cdot}96 - 135 = 0{\cdot}96 \\
\xi_3 . \eta_{11} - \xi_{11} . \eta_3 = 15 \times 17 - 12{\cdot}75 \times 11{\cdot}33 = 255 - 144{\cdot}46 = 110{\cdot}54 \\
\xi_{11} . y_4 - x_4 . \eta_{11} = 12{\cdot}75 \times 12 - 9 \times 17 = 153 - 153 = \\
x_4 . y_3 - x_3 . y_4 = 9 \times 9 - 12 \times 12 = 81 - 144 = \underline{\qquad -63{\cdot}0} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 111{\cdot}5 - 63{\cdot}0
\end{array}$$

$$\text{és } t_{II} = 48{\cdot}5 : 2 = \mathbf{24{\cdot}25} \ \square\text{-egység}$$

Ha még ezenkivül a 3_1 5_1 segédvonalat meghuzva, az ezzel körülzárt sokszög területét is kiszámitjuk, ami:

$$\begin{array}{l}
x_3 . \eta_3 - \xi_3 . y_3 = 12 \times 11{\cdot}33 - 15 \times 9 = 0{\cdot}96 \\
\xi_3 . \eta_5 - \xi_5 . \eta_3 = 15 \times 19 - 8{\cdot}5 \times 11{\cdot}33 = 188{\cdot}69 \\
\xi_5 . y_5 - x_5 . \eta_5 = 8{\cdot}5 \times 17 - 6 \times 19 = 30{\cdot}50 \\
x_5 . y_4 - x_4 . y_5 = 6 \times 12 - 9 \times 17 = -81{\cdot}- \\
x_4 . y_3 - x_3 . y_4 = 9 \times 9 - 12 \times 12 = \underline{-63{\cdot}-} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 220{\cdot}15 - 144 = 76{\cdot}15
\end{array}$$

$$\text{és } 76{\cdot}15 : 2 = 38{\cdot}08 \ \square\text{-egység}$$

akkor az igy nyert területrészek között a következő relatiókhoz jutunk.

Az I. és II. területrészek összege $20{\cdot}75 + 24{\cdot}25 = 45{\cdot}00$ $\square$-egység, ami a már pontosan lehasitott polygonrész tartozéka.

A (3_1 — 5_1) segédvonal által bezárt 38·08 $\square$-egység levonása után nyert 6·92 $\square$-egység pedig most már azon kis részlet, amelyre a kiigazitás, nevezetesen az össze nem érő (5_1 — 4_1) (3_1 — 11_1) poligon-oldalak egy közös pontba való összevonása szoritkozik. Ez pedig abból áll, hogy a (3_1 — 5_1) egyenes fölé egy oly háromszög szerkesztendő amelynek

a) területe = 6·92 $\square$-egység

b) „*p*“ csúcspontja a (4—11) egyenesen fekszik.

Ezen két feltétel, a már eddig több izben előfordult egyenletekkel is kifejezhető. És pedig [p {x_p | y_p rendszálak ismeretlenek]

a (3_1 — p — 5_1) háromszög területe

$\xi_3 y_p - x_p \eta_3 + x_p \eta_5 - \xi_5 y_p + \xi_5 \eta_3 - \xi_3 \eta_5 = 2\,t\,(\triangle)$; rendezve

$$x_p\,[\eta_5 - \eta_3) + y_p\,(\xi_3 - \xi_5) + \xi_5\,\eta_3 - \xi_3\,\eta_5 - 2\,t = 0 \;.\;.\; a)$$

a (4—11) egyenes egyenlete pedig, amiről már az előző pontban kikötöttük, hogy a sokszög valamelyik, de egyuttal a tengelyrendszer kezdőpontján is keresztül menjen, ez:

$$x_p y_4 - y_p x_4 = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; b)$$

Ezen két alkalmas egyenletből a „p" pont x_p | y_p rendszálai nehézség nélkül kiszámithatók és igy:

$$x_p = \frac{x_4\,(\xi_5\,\eta_3 - \xi_3\,\eta_5 - 2\,t)}{-x_4\,(\eta_5 - \eta_3) - y_4\,(\xi_3 - \xi_5)};\; y_p = \frac{y_4\,(\xi_5\,\eta_3 - \xi_3\,\eta_5 - 2\,t)}{-x_4\,(\eta_5 - \eta_3) - y_4\,(\xi_3 - \xi_5)}$$

Ahol ξ | η a számitás utján vett és már kiigazitott rendszálak jelei. A példában pedig lesz:

$$x_p = \frac{9\,[8{\cdot}5 \times 11{\cdot}33 - 15 \times 19 - 2 \times 6{\cdot}92]}{-9\,[19 - 11{\cdot}33] - 12\,[15 - 8{\cdot}5]} =$$

$$= \frac{-9 \times 202 \times 53}{-69{\cdot}03 - 78} = \boldsymbol{x_p = 12{\cdot}4}$$

$$y_p = \frac{-12\,[202{\cdot}53]}{-147{\cdot}03} = \boldsymbol{y_p = 16{\cdot}53}$$

A tengelyrendszer áttolása és forgatása, illetőleg a természetben is fellelhető és a kitüzésre is alkalmas bázis számitása, innen sem mellőzhető.

Befejezésül szükségesnek tartom a gyakorlatban jelentkező és a leirottakban is hangoztatott néhány körülményt ismételten szóvá tenni.

Tisztán csak maga a szerkesztés, sem itt, sem az épitési tervek kiállitásánál, soha sem elég pontos arra, hogy az a számitási eredményeket helyettesithesse, sőt, mint láttuk, olykor végre sem hajtható; de igenis alkalmas arra, hogy a számműveletekkel szerzett eredményeket, illetőleg azok helyességét ellenőrizhessük vele. Egészen mellőzni pedig még más oknál fogva sem lehet és ez az, hogy a hasonló természetü munkálatok kiindulási alapját a kataszteri eredeti felmérések és legtöbb esetben csakis a rendelkezésre álló kataszteri térképszelvények szolgáltatják, mint amelyek, ezidőszerint egyedüli alapja, nemcsak az adóztatásnak, de egyuttal a birtoklási és tulajdonjognak is. Ezek mérczéje: 1″ = 40°. Ha figyelmen kivül is marad a papiros összehuzódásából eredő eltorzulás, ami ritka szerencsés eset, még mindig visszamarad a térkép kicsiny volta. Hiszen a leolvasás és lemérés pontosságának határa még jó szem, hegyes körző és nagyitó lencse mellett sem kevesebb 0·1 ölnél, ami pedig a természetben elég nagy hiba lehet. Azért kell ajánlani, hogy a térképszelvényről levett adatok a természetben is utánméressenek, különösen kényesebb kérdések és feladatok előtt és pedig mielőtt a további számitások kiindulópontját képező térképet és az azokhoz szükséges tengelyrendszert megszerkesztenénk, sőt ajánlatos és szükséges az is, hogy ezen utóbbiakat, az 1″ = 40° helyett 1″ = 10°, vagy legalább 1″ = 20° arányban szerkesszük.

A körzővel bemért rendszálak pontosságának mérlegelésére alkalmas mód és eljárás: hogy a poligonok oldalainak a természetben is pontosan bemért hosszát, a szerkesztés utján vett rendszáladatokból a

$$\alpha = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

egyenlet eredményével összehasonlitjuk.

Hogy pedig a felsorolt módok közül, melyik mikor használható előnyösebben, arra mindig az adott körülmények adnak választ.

HIVATALOS KÖZLEMÉNY.

FELHIVÁS.

A folyó év őszén erdészeti államvizsgát tenni szándékozók felhivatnak, hogy az ehhez szükséges engedély iránt kérvényüket kellően felszerelve, legkésőbb folyó évi augusztus hó végéig a m. kir. földmivelésügyi miniszterium erdészeti főosztályához (Budapest, V., Zoltán-utcza 16. sz.) bérmentve küldjék be.

Budapest, 1914. évi julius hó 27-én.

Horváth Sándor
miniszteri tanácsos,
az erdészeti államvizsgáló bizottság elnöke.