Szabálytalan poligonok arányos felosztása.

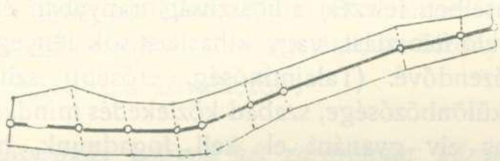
Irta: *Mezey Rezső*, m. kir. főerdőmérnök.

Földmives emberek között termett és ott tanultam igazságnak ismerni azt a közmondást, hogy: „aki korábban szánt, többet szánt". Ennek az alapja és okai egészen naturálisak. Teljesen igaz az, hogy a földtulajdon — egészen a legszélső mértani határvonalig — a földbirtokosé; azé, aki azt megvette vagy örökölte stb. Egyuttal egészen igaz az is, hogy az ekevas, kivált a jobbfajta, 60 *cm*-nyire is kilöki a kivájt földet a jobb oldalra. Erről tehát senki sem tehet, mert hiszen ilyen jó ekéje minden gazdának lehet. Az meg éppen helybenhagyott dolog, hogy a földet körben kell szántani. Értem ezt ugy, hogy az eke visszajövet is dolgozik és éppen ezért a munkát a szántóföldnek vagy a közepén kell kezdeni és jobbra is, balra is folytatva, a széle felé haladni és bevégezni, vagy megforditva: a két szélén kezdeni és a közepén bevégezni. No és még hozzá az a bizonyos emberi gyarlóság. Az, amelyik mindig ott sompolyog az eke mögött, már t. i. a gazda mögött. Mintha valahogy a szomszéd földjét könnyebben vágná a szerszám és az igavonó jószág is kénytelen a jobb lábával a szomszéd földjére is lépni, mikor a szélső barázdát huzza. Olyankor mintha a gazdája is elnézőbb és szórakozottabb volna.

Igy beszélnek, erről mesélnek a tagositási térképek és a kataszteri szelvények. Az a töméntelen parczella, amiknek a két oldala valamikor hajdanában egyenes volt és most egymást szorongatva, lehetetlenre czifrázzák a „mappát".

Hogy ezek a soktörésü, mindenféle alaku oldalak mikor fognak megint visszaegyenesedni, vagy hogy fognak-e valamikor egyáltalában, az nagyon kétséges, sőt alig hihető, mert a magyar a jussát nem engedi. „Ott akarok szántani, ahol az öregapám szántott"; és nagy rátartisággal megköveteli az „indzsellértől", hogy amikor egy ilyen, hétszer görbült örökséget ketté kell vágni, hát az olyan akkurátusan legyen csinálva, hogy abból egy talpalatnyi se hiányozzék. Éppen ezért nem ajánlom egy kollegámnak sem, hogy csak egyszer is belekezdjen az irrationalis és transcendens számok magyarázgatásába, mert akkor még azt a kis bizalmat is elveszíti, ami még volt talán; kivált ha az igazságos megosztás ugy üt ki, ahogyan az osztozkodó felek közül valamelyik nem gondolta, vagy nem remélte.

P...... községben láttam, hogy a (1. ábrán) rajzolt szőlőterületet két emberséges parasztgazda ugy felezte, hogy a polygon szélességét több helyen nagy lelkiismeretességgel együttesen megmérték mérővesszővel (ejtsd: czollstokk), annak a felét jobb ügyre is méltó gondossággal kiszámitották, végül pedig ezen felező pontokat saját kézierővel huzott egyenesekkel összekapcsolták és legvégül pedig — mindaketten igen meg valának elégedve. Mikor két ilyen jámbor és istenfélő keresztyén akad össze, oda holmi indzsellér teljesen fölösleges. Először is azért, mert ami kaputos ember „eszi a más kenyerét", az mind egy szálig „rossz csont". Még ezer szerencse, hogy ebben a tekintetben a fiskálisok meg a nótáriusok néhány lépést előttünk lábatlankodnak.



1. ábra.

Röstellem szakemberek előtt sokat magyarázni, hogy ez az iderajzolt felezés, habár a laikus előtt igazságosnak látszik is, éppen az igazságot szolgálja a legkevésbbé.

Akinek az ivhez hasonló parczella homoru oldala jut, az jelentékenyen kevesebbet kap. Más alaku sokszögeknél pedig és általánosságban mindig az kap kevesebbet, amelyiknek a fenti felosztási mód mellett a részekre osztásból kikerült trapézek rövidebb oldalaiból több jut. Sőt még kevesebb, ha a feldaraboláskor nem trapézek, hanem egészen szabálytalan alaku négyszögek, vagy éppen háromszögek keletkeznek, ami különben mindenkori eset, mert a szabálytalan poligonok oldalai, legalább a térképek adatai szerint, csak kivételesen párhuzamosak.

Talán néha-néha segitségére lehetek azon kollégáimnak, akik hasonló és olykor nagy pontosságot igénylő, kényes természetü kérdésekben a magán, vagy a birói szakértő feladatát teljesitik, ha az alábbiakban a szabálytalan poligonok felezésének, illetőleg bizonyos, előre megszabott arány szerint való felosztásának néhány célszerü eljárási módját és alakját bemutatom; szigoruan alkalmazkodva az analitikai tételekhez és ahhoz a megközelithető pontossághoz, illetőleg mérési és számitási hibahatárokhoz, amelyek a földméréstan mennyiségtani levezetései és bizonyitásai szerint megengedhetők.

Tárgyalom először a fentihez hasonló, tehát a szélességhez képest feltünően hosszu poligonok arányos felosztását, azután pedig a hossz és szélességre nézve körülbelül egyforma kiterjedésü sokszögekét, végül pedig azon különösebb eseteket, amikor a sokszög teljes szabálytalanságánál fogva, az előzőleg leirandó módszereknek egyes analitikai tételei alkalmazhatók csupán, de maga az eljárás teljes egészében nem.

Az első esetre nézve megjegyzem, hogy az arányos felosztás (a legtöbb esetben felezés) a hosszuság irányában értendő, mert a keresztben való felosztást, vagy kihasitást sok lényeges körülmény teheti mellőzendővé. (Talajminőség, erősebb szintkülönbségek, mivelési ág különbözősége, szabad közlekedés mindkét vég felé stb.)

Általános elv gyanánt el kell fogadnunk, hogy ha már az egész térkép ilyen határvonalai bizonyos következetességgel (nem szabályossággal) ki vannak görbitve, akkor az ujonnan kitüzendő osztóvonal ne csak igazságos voltával, de alakjával is lehetőleg illeszkedjék a többi közé. Kell ez annál is inkább, mivel az egyenes vonallal való osztás a legtöbbször lehetetlen, sőt olykor bele sem esnék a poligonba, vagy pedig olyképen szelné azt, hogy a részek egyike, vagy másika a helyes gazdasági kezelésre válnék alkalmatlanná.

A legközönségesebb: a hosszukás poligon egyik, többször tört oldalának bizonyos sugárrendszerben való eltolása. A sugárrendszer pólusa, mint majd alább látható, önmagától adódik, az eltolódás pedig kétféle:

Az egyik az, hogy az eltolt uj poligon szakaszai párhuzamosak a régiekkel, a másiknál pedig a törési pontok futnak ugyanilyen sugárrendszer minden megfelelő sugarán egyenlő távolságra.

Az előttünk álló ezen feladatnak ilyképen való megoldásához az elemző sikmértan és a geodézia ismert tételeivel többféle eljárás vezet.

Mindenesetre a leglényegesebb a meglevő állapotnak a lehetőségig pontos felvétele, azért, mert a további számitások csakis erre támaszkodnak és a felvételnél elkövetett hibák azokon is végig kisérnek. Ugyanezért nagyon kivánatos a rendelkezésre álló (pontosnak feltételezett) térkép adatait a természetben levőkkel összehasonlitani, annál is inkább, mert a kataszteri térképek csak 0·1 öl pontosságot adhatnak. A térkép anyagának összehuzódásából eredő hibák egész ölre is mehetnek.

Figyelemre méltó az is, hogy a számitások utján nyert eredmények abszolut pontosságot nyujtanak, illetőleg irrationális számok is szerepelvén, a pontosság határa egészen tetszésünktől függ, mig a szerkesztett távolságoknak körzővel való beméréseikor ezen előnyöktől elesünk.

Valahányszor tehát a számitás és a körzőmérés között választhatunk, mindig a számitáshoz kell fordulnunk. Most is csak távolságról szólok, miután a térképen fekvő szöget szögmérővel lemérni, úgyszólván nem is „illik“: ott a „Carnot“ tétel, az bizonyosan pontos.

Az eljárási módok a következők:

1. §. *A hosszukás poligon két záróvonala párhuzamos.*

1. A fent emlitett kétféle eltolási módot egygyé teszi azon eset, amikor a poligon két végső, vagyis záróvonala párhuzamos, mint az a 2. ábrán látható. Ezen ritkán előforduló esetben t. i. a sugárrendszer pólusa a végtelenben lévén, a szerkesztendő uj poligon szakaszai párhuzamosak a régiekkel, de ugyanakkor a törési pontok is ugyanazon távolsággal tolódnak el.

A felosztandó parczella tehát akár a jó térképről, vagy még helyesebben a természetben felvett adatok alapján, lehetőleg kicsiny ($1'' = 20^0$ vagy $1'' = 10^0$) mérczében megszerkesztendő.

Ismernünk kell mindenekelőtt az egész felosztandó földrészlet egész *(T)* és az ebből, bizonyos arány szerint kihasitandó *(t)* területek számbeli nagyságát. Az eltolás pedig most is, mint mindenkor, $+$ vagy $-$ irányban történhetik aszerint, amint a parczella innenső, vagy tulsó határvonalát szemeltük ki arra, hogy azt a szabadon választható tengelyrendszer valamelyik tengelyétől távolitsuk, vagy ahhoz közelitsük. A tengelyrendszert pedig a legczélszerübben ugy veszszük fel, hogy a tengelyek valamelyike essék össze az egyik záróvonallal.

Előre kell bocsátanom, hogy a sokszög, illetőleg annak rendetlensége ugy ezen, mint a további példákban is, a tételek élesebb feltüntetése végett, *tulzott.*

A 0. 1. 2. . . . *n.* pontok tehát az y tengely irányában olyképen tolandók el a x tengelytől, hogy:

$$[t_1 + t_2 + t_3 \ldots + tn] = t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{I.}$$

kiegyenlitést nyerjen, ahol t azon területrészszel egyenlő, amennyi az arányosan felosztandó parczellából valamelyik részesülőnek jut. A 2. ábrán az egész felosztandó terület nincs kirajzolva, hanem ezuttal, valamint az alább következő tételeken is, csupán az eltolandó, innenső határvonal van felvéve.

Legyenek az ismert és körzővel pontosan bemért pontok rendszálai: $1 \{x_1 \mid y_1 \quad 2 \{x_2 \mid y_2 \ldots\ldots n \{x_n \mid y_n$ a keresetteké pedig:

$$1_1 \{ \xi_1 \mid \eta_1 \quad 2_1 \{ \xi_2 \mid \eta_2 \ldots\ldots n_1 \{ \xi_n \mid \eta_n.$$

Ha már most az előbb mondottak szerint, az egyes szakaszok párhuzamosan eltolódnak, vagyis az

$\overline{(1-1_1)} = \overline{(2-2_1)} = \overline{(3-3_1)} = \ldots . \overline{(n-n_1)}$ távolságok azonosak maradnak, látnivaló, hogy a $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ területrészek mindenike egy-egy parallelogram és nagyságuk:

$t_1 = [x_1 - o]\,[\eta_1 - y_1]\,;\ t_2 = [x_2 - x_1]\,[\eta_2 - y_2] \ldots$ általánosan

$$t_n = [x_n - x_{(n-1)}]\,[\eta_n - y_n].\text{ De mert}$$

$$[\eta_1 - y_1] = [\eta_2 - y_2] = [\eta_3 - y_3] = \ldots = [\eta_n - y_n] = \eta : \text{lesz.}$$

$$t = \{ [x_1 - x_0] + [x_2 - x_1] + [x_3 - x_2] + \ldots + [x_n - x_{(n-1)}] \}\, \eta$$

A zárójel között levő tagok az első és utolsó kivételével megsemmisülnek, marad

$$t = [x_n - x_o]\, \eta$$

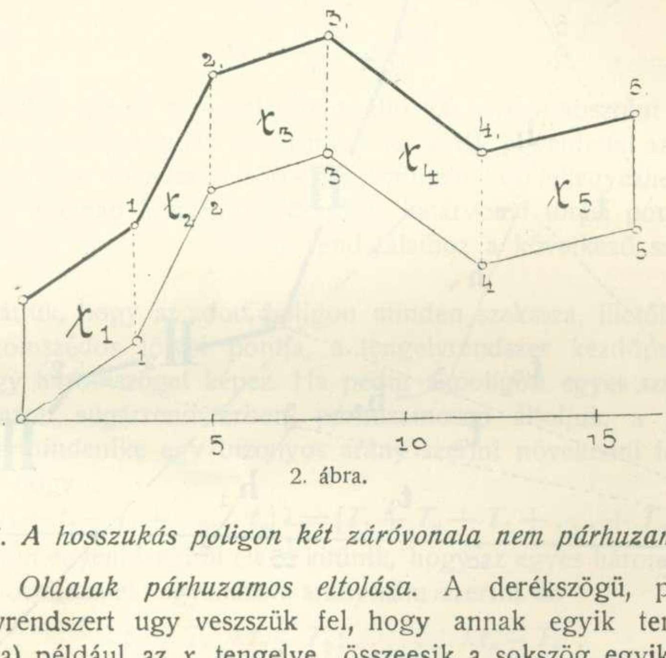
és ebből

$$\eta = \frac{t}{x_n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{II.}$$

Például legyen a 2. ábra szerint $n = 5$, azaz $x_5 = 16$ *és* $y_5 = 5$ és tegyük fel, hogy ezen parczella olyképen osztandó fel hosszirányban, hogy abból 48 □ egység jusson az egyik részesülő félnek, akkor az y tengelylyel párhuzamos irányban kitüzendő közös „η“ a II. alak szerint:

$$\eta = 48:16 = 3 \text{ hosszegység.}$$

Az uj határvonal kitüzéséhez külön tengelyrendszer és ordináták felvétele a természetben nem kell, különösen, ha jó boussolaműszer áll rendelkezésünkre. Ekkor az uj határvonal egyszerre kitüzhető a régi határvonal bármely pontjáról a felvett tengelyrendszer, illetőleg a záróvonalak csapószögével és az η távolsággal. Ezen kényelmes eset azonban igen ritka és a következőkben azon, majdnem kivétel nélkül mindenkori van tárgyalva, hogy t. i.



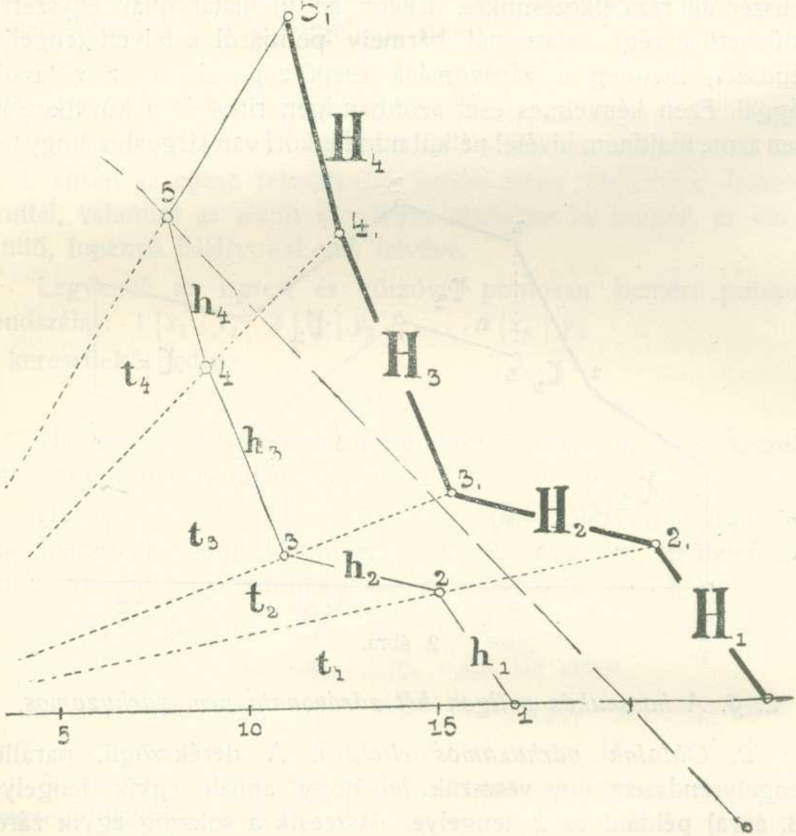
2. ábra.

2. §. A hosszukás poligon két záróvonala nem párhuzamos.

2. Oldalak párhuzamos eltolása. A derékszögü, parallel tengelyrendszert ugy veszszük fel, hogy annak egyik tengelye, (3. ábra) például az x tengelye, összeesik a sokszög egyik záróvonalával; az y tengelyt pedig ott állitjuk fel, ahol a két záróvonal $(\overline{1-1_1})$ és $(\overline{5-5_1})$ találkozik. Ez a metszéspont lesz a tengelyrendszer kezdőpontja is, ahonnan minden egyes törési ponton keresztül sugarat huzunk.

Ez a tengelyrendszer a 3. ábrán a könnyebb megérthetés kedvéért meg van ugyan szerkesztve, de a gyakorlatban csak igen ritkán szerkeszthető meg teljes egészében, mert a záróvonalak hajlásszöge rendszerint kicsiny és igy igen hosszu szögszárakat kapnánk.

Ehelyett a gyakorlatban a meg nem rajzolható rendszálakat, illetőleg csupán az abszcisszákat inkább kiszámitjuk, mivel a számi-



3. ábra.

tás, mint már emlitve volt, mindig pontosabb eredményeket ád, mint a hosszu távolságoknak körzővel való mérése. Az igen hegyes szög alatt találkozó egyenesek metszéspontjának megállapitásánál pedig, még nagyitólencse alatt is, sok jut a szembecslésre. A jóval rövidebb ordinátákat azonban pontos mérés útján veendők fel.

Az abszcisszák számitása, az analizis szerint, a következőképen történik.

Az n-ik sugáron, illetőleg a poligon záróvonalának meghosszabbitásán, a már felvett n-ik ponton kivül felveszünk még egy pontot s annak ordinátáját a többi törési pontokéval együtt felveszszük, vagyis körzővel lemérjük. Az abszcisszák teljes hossza ugyan be nem mérhető, de az azok közötti különbségek igen.

Ha tehát az n-ik sugáron felvett külön pontot m-el jeleztük, lesz (két ponton átmenő egyenes egyenlete)

$$\frac{y_n - y_m}{x_n - x_m} = tg\,\alpha_{(1,n)} = \frac{y_n}{x_n}$$

és ebből

$$x_n = \frac{y_n\,[x_n - x_m]}{y_n - y_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

Miután pedig a számlálóban álló $(x_n - x_m)$ abszolut értéke közvetlenül mérés utján megismerhető, a III. egyenlettel az összes törési pontok abszcisszái sorra kiszámithatók és feljegyezhetők.

Az ujonnan kitüzendő sokszögü határvonal törési pontjainak $\xi_1 \mid \eta_1;\ \xi_2 \mid \eta_2 \ldots\ldots \xi_n \mid \eta_n$ rendszálaihoz a következő számitás vezet.

Látjuk, hogy az adott poligon minden szakasza, illetőleg két-két szomszédos törési pontja, a tengelyrendszer kezdőpontjával egy-egy háromszöget képez. Ha pedig a poligon egyes szakaszait ugyanazon sugárrendszerben, párhuzamosan eltoljuk, a háromszögek mindenike egy bizonyos arány szerint növekedni fog olyképen, hogy

$$[t_1 + t_2 + t_3 + \ldots .\ t_n]\,\lambda = [T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n].$$

Ezen egyenlőségből eleve kitünik, hogy az egyes háromszögek nem növekesznek ugyanazon arányszám szerint és

$$\lambda t_1 \gtreqless T_1;\ \lambda t_2 \gtreqless T_2;\ \ldots\ldots \lambda t_n \gtreqless T_n$$

Ez azt jelenti, hogy a „λ" viszony csakis az egész terület-összegre vonatkozhatik. Ez a reláczió meghatározható és kiszámitható azon tételből, hogy ugyanazon két sugár közé vont párhuzamosok által alkotott háromszögek hasonlók, vagyis szögeik egyenlők, oldalaik és magasságaik között pedig a viszony állandó. Ezért:

$$\frac{T_1}{t_1} = \frac{S_1 M_1}{s_1 m_1},\ \frac{T_2}{t_2} = \frac{S_2 . M_2}{s_2 . m_2};\ \ldots\ldots \frac{T_n}{t_n} = \frac{S_n . M_n}{s_n . m_n},$$

ahol $S_1\ S_2\ S_3 \ldots S_n$ a tengelyrendszer kezdőpontjától a keresett uj töréspontokig vont sugarak, az $s_1\ s_2\ s_3 \ldots . s_n$ pedig az ismert töréspontokig vont sugarak hosszát jelentik.

Az $M_1\ M_2\ M_3 \ldots . M_n$: a két-két sugár által képezett nagyobbik, az $m_1\ m_2\ m_3 \ldots . m_n$: az ugyanazon sugarak által képezett kisebbik háromszögek magasságának mértékei.

Minthogy továbbá ugyancsak a hasonlóságnál fogva

$$\frac{S_1}{s_1} = \frac{M_1}{m_1};\ \frac{S_2}{s_2} = \frac{M_2}{m_2};\ \ldots . .\ \frac{S_n}{s_n} = \frac{M_n}{m_n},$$

azért

$$\frac{T_1}{t_1} = \frac{S_1^2}{s_1^2};\ \frac{T_2}{t_2} = \frac{S_2^2}{s_2^2};\ \frac{T_3}{t_3} = \frac{S_3^2}{s_3^2} \ldots . .\ \frac{T_n}{t_n} = \frac{S_n^2}{s_n^2} \quad . \ . \ \text{IV.}$$

Látjuk azonkivül, hogy a két szélső sugár kivételével, a többiek mindenike két-két szomszédos háromszögnek közös oldala, ezért az első háromszög oldalainak viszonya a 2., 3., 4. . . . $(n-1)$ háromszögig folytatólagosan azonos marad. Vagyis

$$\left.\begin{array}{lll} \text{az I. háromszögben} & & \dfrac{S_1}{s_1} = \dfrac{S_2}{s_2} \\ \text{a II.} & " & \dfrac{S_2}{s_2} = \dfrac{S_3}{s_3} \\ . \ . \ . \ . \ . \ . & . \ . \ . & . \ . \ . \\ \text{az } (n-1) & " & \dfrac{S_{(n-1)}}{s_{(n-1)}} = \dfrac{S_n}{s_n} \end{array}\right\} \text{ és eb' ől}$$

$$\frac{S_1}{s_1} = \frac{S_2}{s_2} = \frac{S_3}{s_3} \ldots . . = \frac{S_n}{s_n}$$

és hasonlóképen

$$\left(\frac{S_1}{s_1}\right)^2 = \left(\frac{S_2}{s_2}\right)^2 = \left(\frac{S_3}{s_3}\right)^2 = \ldots . . \left(\frac{S_n}{s_n}\right)^2 \ldots . . \text{V.}$$

Ha ezt a IV. egyenletcsoporttal egybevetjük, akkor

$$T_1 = t_1\left(\frac{S_1}{s_1}\right)^2;\ T_2 = t_2\left(\frac{S_2}{s_2}\right)^2;\ T_3 = t_3\left(\frac{S_3}{s_3}\right)^2 \ldots;$$

$$T_n = t_n\left(\frac{S_n}{s_n}\right)^2$$

összegezés és a közös tényező kiemelése után pedig

$$[T_1 + T_2 + T_3 + \ldots . T_{(n-1)}] = [t_1 + t_2 + t_3 + \ldots t_{(n-1)}]\left(\frac{S_1}{s_1}\right)^2$$

Ha pedig a nagyobb háromszögek területösszegét jel nélkül való „T"-vel és a kisebbekét „t"-vel jelezzük, úgy

$$\frac{T}{t} = \left(\frac{S_1}{s_1}\right)^2 = \lambda; \text{ és ebből } \frac{S_1}{s_1} = \sqrt{\frac{T}{t}} = \sqrt{\lambda} \quad . \; . \; . \quad \text{VI.}$$

Előre feltételeztük ezeken kivül, hogy az uj poligon szakaszai a régiekkel párhuzamosak maradnak. Ez azt jelenti, hogy azok iránytényezői, vagyis a derékszögü tengelyrendszerben az x tengelylyel $+$ irányban képezett tangensei azonosak, ami analitikailag igy fejezendő ki:

$$\frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Rendezve az uj szakaszok egyenletei lesznek

$$\left.\begin{array}{l} H_1 \equiv \xi_2 [y_2 - y_1] - \eta_2 [x_2 - x_1] + \eta_1 [x_2 - x_1] - \xi_1 [y_2 - y_1] = 0 \\ \text{hasonlóképen} \\ H_2 \equiv \xi_3 [y_3 - y_2] - \eta_3 [x_3 - x_2] + \eta_2 [x_3 - x_2] - \xi_2 [y_3 - y_2] = 0 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ H_{(n-1)} \equiv \xi_n [y_n - y_{(n-1)}] - \eta_n [x_n - x_{(n-1)} + \eta_{(n-1)} [x_n - x_{(n-1)}] - \\ \qquad - \xi_{(n-1)} [y_n - y_{(n-1)}] = 0 \end{array}\right\} \text{VII.}$$

Az S_1, S_2, $S_3 \ldots S_n$ sugarak, azaz a tengelyrendszer középpontján átmenő egyenesek egyenletei pedig

$$\left.\begin{array}{l} S_1 \equiv \xi_1 y_1 - \eta_1 x_1 = 0 \\ S_2 \equiv \xi_2 y_2 - \eta_2 x_2 = 0 \\ S_3 \equiv \xi_3 y_3 - \eta_3 x_3 = 0 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ S_n \equiv \xi_n y_n - \eta_n x_n = 0 \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{VIII.}$$

hol S_1: maga az x tengely. A VII. és VIII. csoportból két-két megfelelően kiválasztott egyenes metszi egymást s az ezekből kiszámitható rendszálak a kereset uj törési pontok koordinátái.

Ha tehát a $\xi_2 | \eta_2$ rendszálakat keressük, ezeket az egymást metsző H_1 és S_2 egyenesek egyenletéből határozhatjuk meg; lévén a 2_1 pont mindkét egyenesnek közös pontja.

Egyszerűbb alakot nyer a H_1 egyenes, ha figyelembe veszszük, hogy a felvett tengelyrendszer szerint $y_1 = \eta_1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} H_1 &\equiv \xi_2 y_2 - \eta_2 (x_2 - x_1) - \xi_1 y_2 = 0 \\ S_2 &\equiv \xi_2 y_2 - \eta_2 x_2 \qquad\qquad\quad = 0 \end{aligned}\right\} \text{ determinánsokkal}$$

$$\xi_2 = \frac{-x_2 \xi_1 y_2}{-x_2 y_2 + y_2 [x_2 - x_1]} = \frac{-\xi_1 x_2 y_2}{-x_1 y_2} = x_2 \frac{\xi_1}{x_1} : \ . \ . \ \text{IX/a}$$

$$\eta_2 = \frac{-\xi_1 y_2^2}{-x_1 y_2} = y_2 \frac{\xi_1}{x_1} : \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \text{IX/b}$$

Az előzetes feltevésekből és az ábrából kivehető, hogy $s_1 = x_1$ és $S_1 = \xi_1$, vagyis, hogy mind a kettő ugyanazon számbeli értéket fejez ki, azért

$$\xi_2 = x_2 \frac{\xi_1}{x_1} = x_2 \frac{S_1}{s_1} = x_2 \sqrt{\lambda}$$

és ugyanigy

$$\eta_2 = \ . \ . \ . \ y_2 \sqrt{\lambda}$$

Ugyanez analitikailag bizonyitható a szerkesztendő uj poligon többi rendszálaira is. És pedig VII. szerint

$$H_2 \equiv \xi_3 (y_3 - y_2) - \eta_3 (x_3 - x_2) + \eta_2 (x_3 - x_2) - \xi_2 (y_3 - y_2) = 0$$

ξ_2 és η_2 már ismert értékeit helyettesitve és a szorzásokat elvégezve, lesz

$$H_2 \equiv \xi_3 (y_3 - y_2) - \eta_3 (x_3 - x_2) - \sqrt{\lambda} (x_2 y_3 - x_3 y_2) = 0$$

és $\quad S_3 \equiv \xi_3 y_3 \qquad - \eta_3 x_3 \qquad\qquad\qquad = 0$

A H_2 egyenletben a $\sqrt{\lambda}$ együtthatója egyszerübben is kifejezhető, amennyiben az $(x_2 y_3 - x_3 y_2)$ kifejezés mint tudjuk és mint majd alább bizonyitva is lesz, nem egyéb, mint a [2, 3, 0] pontok által alkotott háromszög kétszeres területe: vagyis $2\,t_2$. Ezen röviditės beállitásával

$$\xi_3 = \frac{-2\,x_3 \sqrt{\lambda} \, . \, t_2}{-x_3 (y_3 - y_2) + y_3 (x_3 - x_2)} = \frac{-2\,x_3 \sqrt{\lambda} \, . \, t_2}{-[x_2 y_3 - x_3 y_2]} =$$

$$= \frac{2\,x_3\, t_2 \sqrt{\lambda}}{2\,t_2} = x_3 \sqrt{\lambda} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \text{IX/c}$$

És igy tovább, ugyanezen uton nyerjük

$$\xi_4 = x_4 \sqrt{\lambda} \qquad \eta_4 = y_4 \sqrt{\lambda}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\xi_n = x_n \sqrt{\lambda} \qquad \eta_n = y_n \sqrt{\lambda}$$

Hátra van még a $\lambda = T/t$ értékének meghatározása:

A $(t_1\, t_2\, t_3 \ . \ . \ . \ t_{n-1})$ területrészek azon háromszögek, amelyeket a sokszög egyes szakaszai a tengelyrendszer középpontjával képeznek. Területük pedig a rendszálak segitségével az imént mondott és bizonyitani igért módon számithatók: T. i.

$$2t_1 = [x_1 y_2 - x_2 y_1]$$
$$2t_2 = [x_2 y_3 - x_3 y_2]$$
$$2t_3 = [x_3 y_4 - x_4 y_3]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$2t_{(n-1)} = [x_{(n-1)} y_n - x_n y_{(n-1)}]$$

t. i. a háromszögek száma egygyel kevesebb, mint a sugaraké:

Ismerve tehát ilyképen a $t = [t_1 + t_2 + t_3 \ldots + t_{(n-1)}]$ terület számszerinti nagyságát, ebből a $T = [T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{(n-1)}]$ értékét ugy kapom, ha a t értékéhez a felosztás alá kerülő parczellából kihasitandó arányos rész számszerinti értékét hozzáadom.

3. A feladat ezekkel elméletileg meg is volna oldva, gyakorlatilag azonban még nem, mert a kitüzés körül még van fontos kivánni való.

Nem is vélem lehetségesnek, hogy az igy felvett tengelyrendszer a természetben is kitüzhető legyen, legfeljebb csak igen-igen kivételes és ritka esetben. Gondoskodnunk kell tehát és pedig még a helyszineléskor oly alapvonalról, amely a természetben is és a térképen is határozott két pontjában adva van és amelyről a reá vonatkoztatott rendszálak nehézség nélkül kitüzhetők legyenek. Ezen egyenes egyidejüleg a poligonnal felveendő és a térképre szerkesztendő. A 3. ábrán ez a szaggatott $o' x_1$ egyenes, ami egyuttal az uj eltoltés elforgatott tengelyrendszernek is tekintendő.

Az uj és régi rendszálak közötti viszonyt — talán nem fölösleges repetitórium gyanánt — igen rövidesen ismertetem.

A 4. ábrán az uj tengelyrendszer kezdőpontja $a \mid b$ rendszálakkal csuszott, s a tengelyek ezenkivül α szöggel fordultak $+$ irányban. Az ábrából a P pont régi rendszálainak, az uj tengelyrendszerre vonatkoztatott értékei közvetlenül leolvashatók. És pedig:

$$x = x_1 \cos\alpha + [a - y_1 \sin\alpha]$$

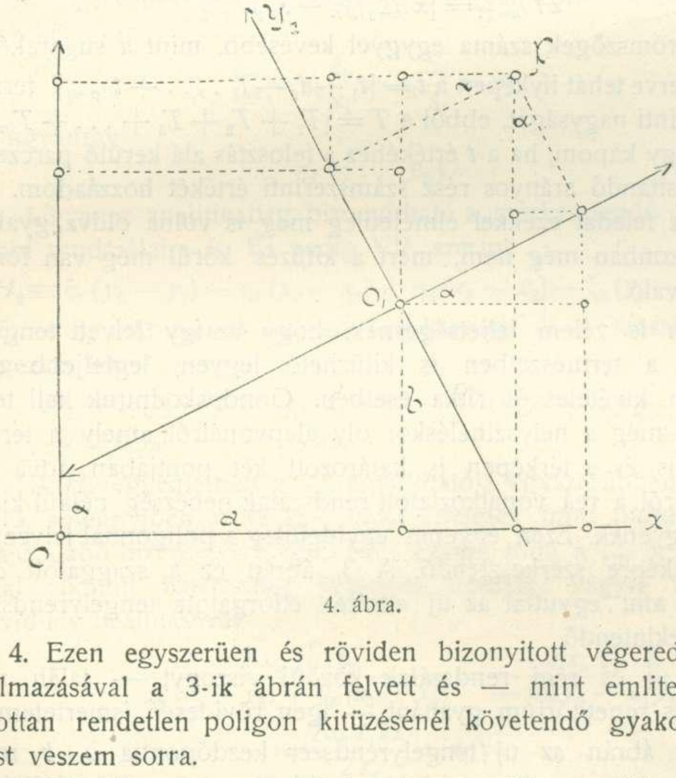
és
$$y = y_1 \cos\alpha + x_1 \sin\alpha + b$$

Minthogy itt az $x_1 \mid y_1$ rendszálak értékeit, mint ismeretleneket keressük, a két lineáris egyenlet ezek szerint rendezendő, vagyis:

$$x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha - (x-a) = 0$$
$$x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha + (b-y) = 0$$

A determináns értéke szembetünő: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, és igy

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -[b-y]\sin\alpha + (x-a)\cos\alpha = x_1 = (x-a)\cos\alpha + \\ \qquad + (y-b)\sin\alpha \\ y_1 = -[(b-y)\cos\alpha + (x-a)\sin\alpha] = y_1 = -(x-a)\sin\alpha + \\ \qquad + (y-b)\cos\alpha \end{array}\right\} \text{X.}$$



4. ábra.

4. Ezen egyszerüen és röviden bizonyitott végeredmények alkalmazásával a 3-ik ábrán felvett és — mint emlitettem — tulzottan rendetlen poligon kitüzésénél követendő gyakorlati eljárást veszem sorra.

A 3-ik ábra ugy van felvéve, hogy a III. egyenlet mellőzésével az abszczisszák is közvetlenül vannak lemérve, mely mérések szerint: $[n = 5]$.

$$\begin{array}{ll} x_1 = 17; & y_1 = 0 \\ x_2 = 15; & y_2 = 3 \\ x_3 = 11; & y_3 = 4 \\ x_4 = 9; & y_4 = 9 \\ x_5 = 8; & y_5 = 13 \end{array}$$

Az (1—5) poligon oly teleknek az egyik határvonala (a másik oldal kirajzolása fölösleges), amelyből 85 □-mértékegység hasitandó ki.

Az egyes oldalak és a tengelyrendszer kezdőpontja által képezett háromszögek területének összege

$$\tfrac{1}{2}[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\ldots(x_4y_5-x_5y_4)]=t$$
$$=\tfrac{1}{2}[17.3-15.0+15.4-11.3+11.9-4.9+9.13-9.8]$$
$$=\frac{1}{2}(51+60-33+66-36+117-72)=\frac{186}{2}=$$
$$=93 \text{ □-egység (pl. öl).}$$

Ha ehhez hozzáadjuk a lehasitandó 85 □-egységet, ugy

$$T=93+85=178 \text{ □-egység.}$$

$$\text{Ebből: } \sqrt{T \mid t}=\sqrt{\frac{178}{93}}=\sqrt{\lambda}=1\cdot3835$$

Az uj poligon rendszálai tehát a IX/a, IX/b stb. szerint

$$\xi_1=1\cdot3835\times17=23\cdot52;\qquad \eta_1=1\cdot3835\times\ 0=\ 0$$
$$\xi_2=1\cdot3835\times15=20\cdot75;\qquad \eta_2=1\cdot3835\times\ 3=\ 4\cdot15$$
$$\xi_3=1\cdot3835\times11=15\cdot22;\qquad \eta_3=1\cdot3835\times\ 4=\ 5\cdot53$$
$$\xi_4=1\cdot3835\times\ 9=12\cdot45;\qquad \eta_4=1\cdot3835\times\ 9=14\cdot45$$
$$\xi_5=1\cdot3835\times\ 8=11\cdot07;\qquad \eta_5=1\cdot3835\times13=17\cdot98$$

Az elméletileg felvett tengelyrendszer koordinátáit ilyképen megismerve, ezen számadatokat a valóságban is kitüzhető tengelyrendszerre kell vonatkoztatnunk.

Tegyük fel, hogy a 3. ábrán az 5. és az 0′ pontok azok, amelyek a természetben is fellelhetők és amelyekről teljes határozottsággal megállapitható az is, hogy ezen pontok az alapul vett, (legtöbbször kataszteri) térkép felvétele és szerkesztése óta, helyváltozást nem szenvedtek.

$$\text{Az 5, mint már felvettük } \begin{cases} x_5=8 \\ y_5=13 \end{cases} \text{és } 0' \begin{cases} a=23 \\ b=-3\cdot25 \end{cases}$$

Ezen utóbbi $a \mid b$ rendszálak tehát, az előadottak szerint, a többiekkel egyidőben történt bemérés eredményei.

A tengelyrendszer elfordulásának szögét, illetőleg annak tangensét a két ponton átmenő egyenesnek, a régi tengelyrendszerre vonatkoztatott egyenlete adja.

$$\frac{y_5-b}{x_5-a}=tg\,\alpha=\frac{13+3\cdot25}{8-23}=-1\cdot08333$$

A X. egyenlet szerint azonban ugyanezen szögnek sinus és cosinus függvényeire lévén szükségünk, azokat logarithmus, vagy függvénytábla nélkül, vagy — mondjuk — annak hiányában teljes pontossággal ki is számithatjuk, tudva azt, hogy

$$sin\,\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{tg^2\alpha+1}} \text{ és } cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{tg^2\alpha+1}}$$

Ha tehát

$$\sqrt{(-1\text{·}08333+1)} = 1\text{·}4743,$$

ugy

$$sin\,\alpha = \frac{-1\text{·}08333}{1\text{·}4743} = -0\text{·}73481 \text{ és } cos\,\alpha = \frac{1\text{·}0000}{1\text{·}4740} = 0\text{·}67829$$

A tangens és sinus: — előjelü, a cosinus: +, tehát az x tengely a legelsőbben felvett forgatási iránynyal ellenkező irányban fordult *arc. tg*: $1\text{·}08333 = 47^0\ 7\text{·}4'$-el. Miután pedig az uj y tengelyt a $0'$-ben vettük fel, azért és mint a következőkből is kitünik, az uj ξ' rendszálakat —, a η' rendszálakat pedig + előjelekkel kapjuk. Szóval a kiszámitott poligon az uj tengelyrendszer II. negyedében fekszik, ami azonban a kitüzésre nézve egészen mellékes, miután csakis az abszolut értékek érdekelnek.

Példaképen a 2′ pont uj rendszálai a X. szerint

$$\xi_2' = (\xi_2 - a)\,cos\,\alpha + (\eta_2 - b)\,sin\,\alpha = [20\text{·}75 - 23\text{·}00]\,0\text{·}67829 -$$
$$-[4\text{·}15 + 3\text{·}25]\,0\text{·}73481 = -6\text{·}97$$
$$\eta_2' = -[\xi_2 - a]\,sin\,\alpha + (\eta_2 - b)\,cos\,\alpha = +[20\text{·}75 - 23\text{·}00]\,0\text{·}73481 +$$
$$+[4\text{·}15 + 3\text{·}25]\,0\text{·}67829 = +3\text{·}37$$

A gyakorlati czélszerüség megkivánja, hogy az egyes rendszálak mindenike önállóan, tehát a többitől függetlenül tüzessék ki, nehogy az egyiknél esetleges számitási tévedésből, vagy a szem és a rendelkezésünkre álló müszerek és eszközök pontatlanságából becsuszott hiba, a többire ugyanugy, vagy sokszorozva átvitessék.

Ha tehát parallel tengelyrendszerrel dolgozunk, minden egyes abszczissza ugyanazon x tengely [bázis] ugyanazon kezdőpontjától mérendő, vagyis nem helyes abszczisszakülönbségeket egy más, már kitüzött hasonló ponttól mérni.

Ennek biztositása és könnyitése végett ajánlatos, ha az alapvonalat a kezdőponttól kiindulva 10—20—30 stb. egységü távolságokra előre beosztjuk a szükség szerinti hosszuságig és ezen beosztás helyességét, visszafelé történő esetleg ismételt mérésekkel ellenőrizzük és a netalán szükséges kiigazitásokat teljesitjük. Tapasztalás mutatja, hogy a mérőszalag, kivált ha az más-más két munkás kezébe kerül, a lazább, vagy erősebb megfeszités szerint, 10 ölenként 4—6 hüvelyk eltéréseket is hozhat.

A polárisrendszerben való kitüzésnél ugyanezen oknál fogva és értelemben, a polárszög mindig a sarktengelytől számitandó és mérendő.

5. *Megoldás az egyenes „normális" egyenletével.* Az egyenes „normális", vagy Hesse-féle alakja, ferdeszögü tengelyrendszer esetén:

$$x \cos\alpha + y . \cos(\omega - \alpha) - p = o$$

derékszögü tengelyrendszerben pedig $[\omega = 90^0]$

$$x . \cos\alpha + y . \sin\alpha - p = o \quad \ldots\ldots\ldots \text{XI.}$$

ahol tudvalevőleg „p" (perpendiculum vagy normális) a tengelyrendszer kezdőpontjától az egyenesre vont merőlegesnek a hosszát, vagyis az egyenesnek a tengelyrendszer kezdő pontjától mért távolságát jelenti; α pedig ezen normálisnak az x tengelytől tevőleges irányban mért elhajlása.

Tudjuk továbbá, hogy az egyenes általános egyenlete bármikor átalakitható a Hesse-féle alakra ugy, hogy az

$$ax + by + c = 0$$

egyenlet minden tagját a $\sqrt{a^2 + b^2}$ tényezővel elosztom és ekkor

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha; \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} = \sin\alpha; \text{ és } -p = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

A jelen feladat megoldásához az egyeneseket két-két pont által meghatározott formában kapjuk és ezen értelemben a poligon valamely szakaszának általános egyenlete:

$$x[y_k - y_{(k-1)}] + y[x_{(k-1)} - x_k] + [x_k y_{(k-1)} - x_{(k-1)} y_k] = 0 \text{ XII.}$$

Ezt a normális alakra hozni szándékozván, az átszámitó tényező az előzők szerint:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(x_{(k-1)} - x_k)^2 + [y_k - y_{(k-1)}]^2}}$$

Ha tehát a XII. egyenlet minden tagját megszorozzuk ezen „μ" tényezővel, ugy ránk nézve egyelőre érdekes, utolsó tag lesz:

$$\frac{[x_k . y_{(k-1)} - x_{(k-1)} y_k]}{\sqrt{[x_{(k-1)} - x_k]^2 + [y_k - y_{(k-1)}]^2}} = p$$

Ámde a nevező nem egyéb, mint a k és $(k-1)$ számu törési pontoknak egymástól való távolsága, vagyis a $(k-1)$-ik szakasz hossza, p pedig mint a jelen pont elején mondva volt, ugyanezen egyenesnek, vagyis szakasznak (csakis merőleges irányban mérhető) távolsága a tengelyrendszer kezdőpontjától és ezért a

$$\overline{(k-1)} \times p = [x_k y_{(k-1)} - x_{(k-1)} y_k] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XIII.}$$

egyenlet bal oldalán álló szorzat a legtermészetesebben ugy is fogható fel, mint valamely háromszög kétszeres területe. Ez a háromszög pedig a felvett tengelyrendszer által meghatározott sik két bármely pontja és a tengelyrendszer kezdőpontja által van adva. A XIII. egyenlet egyuttal egyik legegyszerűbb bizonyitéka annak, hogy *a sik két pontja és a kezdőpont által képezett háromszög kétszeres területét a sikbeli két pont ismert koordinatáiból alakitott determinans adja.* Amire az előzőkben hivatkozás történt és amely szerint a t_1, t_2, $t_3 \ldots t_{(n-1)}$ háromszögek területeit kiszámitottuk. Önmagától következik és az elmondandók folyamán többször elő fog fordulni, hogy ha a determinans megsemmisül, ez azt jelenti, hogy a három pont egy egyenesben fekszik.

Ez a tétel általános és akkor is áll, ha a háromszög, vagy bármely sokszög a sik bármely helyén fekszik. A következőkben élni fogok vele, de czélomon kivül esnék annak bővebb bizonyitása. Ezuttal elegendőnek találom annyinak a megemlitését, hogy a zárt sokszög minden egyes pontja össze lévén köthető a középponttal, mindazon háromszögek, amelyek a sokszög területén kivül esnek, a számitási művelet folyamán önmaguktól jönnek levonásba. Ha ugyanis az egyes pontpárok determinansainak képzésekor egy bizonyos, a poligont megkerülő irányt betartunk és az ekként képezett determinansokat összeadjuk, ugy a sokszögön kivül eső — előjelü területek levonása után, tisztán csak a zárt poligon kétszeres területe marad vissza.

E rövid kitérés után visszatérek az egyenes normális egyenletére, melyről azt is kell tudnunk, hogy ha abba egy idegen, tehát az egyenesen rajta nem fekvő pont rendszálait helyettesitjük, akkor ezek az egyenletet nem elégithetvén ki, annak értéke nem lehet 0, hanem reális szám, vagyis a felvett egyenes és az idegen pont közötti távolság mértéke, de ugyanakkor oly egyenes távolságának a mértéke is, amely az adott egyenessel párhuzamos.

A jelen eljárási mód czélja pedig éppen ezen távolságok megkeresése.

Jelezzük az ujonnan kitüzendő sokszög törési pontjainak rendszálait, ugy mint az előbb $\xi_1 \mid \eta_1 \; \xi_2 \mid \eta_2 \dots \xi_n \mid \eta_n$ jegyekkel, helyettesitsük ezeket a XII. egyenletbe, egyidejüleg átalakitva azt a normális formára, lesz valamely általános szakaszra nézve:

$$\frac{\xi_k [y_k - y_{(k-1)}] + \eta_k [x_{(k-1)} - x_k] + [x_k y_{(k-1)} - x_{(k-1)} y_k]}{\sqrt{[x_{(k-1)} - x_k]^2 + [y_k - y_{(k-1)}]^2}} = p'_{(k-1)}$$

$p'_{(k-1)}$ már a külső poligon távolsága az adott belsőtől. Ha most az $x_k \mid y_k$ rendszálak előbb bizonyitott értékeit behelyettesitjük

$$[\xi_k = x_k \sqrt{\lambda}; \; \eta_k = y_k \sqrt{\lambda}]$$

$$\frac{x_k \sqrt{\lambda} [y_k - y_{(k-1)}] + y_k \sqrt{\lambda} [x_{(k-1)} - x_k] + [x_k y_{(k-1)} - x_{(k-1)} y_k]}{\sqrt{[x_{(k-1)} - x_k]^2 + [y_k - y_{(k-1)}]^2}} = p'_{(k-1)}$$

Beszorzások és röviditések után

$$\frac{[x_{(k-1)} y_k - x_k y_{(k-1)}]}{\sqrt{[x_{(k-1)} - x_k]^2 + [y_{(k-1)} - y_k]^2}} \cdot [\sqrt{\lambda} - 1] = p'_{(k-1)} \quad \text{XIV.}$$

A törtalaku kifejezés az eredeti egyenes távolságát $p_{(k-1)}$-et jelenti, azért a szorzat és vele az egyenlőség is egyszerübb alakot ölthet:

$$p_{(k-1)} \sqrt{\lambda} - p_{(k-1)} = p'_{(k-1)}$$

Ha tehát $p_{(k-1)}$ a belső vonal távolsága a tengelyrendszer kezdőpontjától, $p'_{(k-1)}$ pedig az uj egyenes távolsága az eredetileg felvett egyenestől, akkor e kettőnek az összege:

$$P_{(k-1)} = p'_{(k-1)} + p_{(k-1)} = p_{(k-1)} \sqrt{\lambda}$$

vagyis a bizonyos sugarak közé vont párhuzamos egyeneseknek a tengelyrendszer kezdőpontjától mért távolságai ugyanazon viszonyban állanak egymáshoz, mint a leszelt sugárrészek, vagy mint a leszelt sugárrészek koordinátái is; ami az elemi mértan tételei szerint is természetes.

Ezen eljárás tehát az előbbitől lényegében nem is különbözhetik, mert hiszen látnivaló, hogy az egyenesek alkalmazott egyenleteiben csupán a külső alak más és a normális egyenlet csak más, a kitüzésre szintén alkalmas adatokhoz juttat. Mig az előbb az uj törési pontok rendszálait kerestük és tüztük ki, a normális egyenlet csak a párhuzamosan eltolt vonalszakaszok távolságait adja a kitüzéshez. Ezen jóval rövidebb eljárás feltétele azonban az, hogy az egész törtvonal szabad legyen, vagyis, hogy annak minden szakaszán legalább egy ponton legyen a műszer felállitható és a párhuzamos kitüzhető. Szükségtelenné válik tehát az uj bázis kitüzése, a tengelyrendszer elforgatása és az ezekkel járó számitási és szerkesztési műveletek.

6. Maga a kitüzés a következőképen történik.

Az elméleti tengelyrendszer felállitása, vagy mint az a 2. pont III. egyenletével ki van mutatva, annak kiszámitása után, a beszerzett koordinátákkal mindenekelőtt kiszámitjuk és pedig külön-külön is a $t_1, t_2, t_3 \ldots t_{(n-1)}$ belső háromszögek területeit az előző pontban bemutatott eljárás szerint, amire két izben lesz szükség.

Először a $\sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{T}{t}}$ viszony meghatározásához, ami tehát ezuttal is

$$\sqrt{\lambda} = 1{\cdot}3835$$

azonkivül a XIV. egyenlethez felhasználandó adatképen. A XIII. szerint:

$$x_1\,y_2 - x_2\,y_1 = 17 \times 3 - 0 \times 15 = 51 - 0 = 51$$
$$x_2\,y_3 - x_3\,y_2 = 15 \times 4 - 11 \times 3 = 60 - 33 = 27$$
$$x_3\,y_4 - x_4\,y_3 = 11 \times 9 - 9 \times 4 = 99 - 36 = 63$$
$$x_4\,y_5 - x_5\,y_4 = 9 \times 13 - 8 \times 9 = 117 - 72 = 45$$

továbbá

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = h_1 = \sqrt{(17 - 15)^2 + (- 3)^2} = 3{\cdot}606$$
$$\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} = h_2 = \sqrt{(15 - 11)^2 + (3 - 4)^2} = 4{\cdot}123$$
$$\sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2} = h_3 = \sqrt{(11 - 9)^2 + (4 - 9)^2} = 5{\cdot}385$$
$$\sqrt{(x_4 - x_5)^2 + (y_4 - y_5)^2} = h_4 = \sqrt{(9 - 8)^2 + (9 - 13)^2} = 4{\cdot}123$$

$$(\sqrt{\lambda} - 1) = 0{\cdot}3835$$

$$\frac{51}{3{\cdot}606} \cdot 0{\cdot}3835 = p'_1 = 5{\cdot}44\,; \quad \frac{63}{5{\cdot}385} \cdot 0{\cdot}3835 = p'_3 = 4{\cdot}50$$

$$\frac{27}{4\,123} \cdot 0{\cdot}3855 = p'_2 = 2{\cdot}52\,; \quad \frac{45}{4{\cdot}123} \cdot 0{\cdot}3835 - p'_4 = 4{\cdot}20$$

A párhuzamos egyenesek távolságai ezekben adva lévén, a törési pontok a földméréstan egyszerű utasitásai szerint önkényt adódnak. Ha t. i. két egyenes két-két póznával ki van tüzve, azok találkozási, illetőleg metszőpontja, minden számitás nélkül, tisztán gyakorlati uton, mondjuk a két egyenes irányában kifeszitett zsinorral egész pontosan leszegezhető.

Előfordulhat még az az eset is, hogy a poligonnak valamelyik szakasza megközelithetlen, illetőleg azon műszerrel felállani nem lehet (pl. be van épitve). Ekkor a két szomszédos szakasz hosszusága is kiszámitandó, illetőleg a már kiszámitott adatokkal rövidesen megszerezhető, ha figyelembe vesszük, hogy

$$H_{(k-1)} = h_{(k-1)} \sqrt{\lambda} \qquad Pl: H_3 = 5{\cdot}385 \times 1{\cdot}3835 = 7{\cdot}45$$

Ezen két utóbbi szakasznak egy-egy végpontja az előbbiek szerint gyakorlati úton, a másik végpont pedig a $H_{(k-1)}$ hosszuságnak rámérésével czövekelendő. Ezen két czövek adja természetesen a másképen ki nem tüzhető, hiányzó szakaszt.

Ismételnem kell, hogy az egyenes normális alakja csak akkor alkalmazható, ha a polygon szakaszai szabadon hozzáférhetők. Máskülönben az előbbi, valamivel hosszabb eljárással a rendszálakat keressük.

7. Hátra volna még az egyenes poláris egyenletének

$$p = r . \cos(\delta - \alpha)$$

levezetése, ahol p = perpendiculum, vagy normális, „r" az egyenes valamely futó pontjának rádius vectora, δ: a rádius vectornak, α: pedig a perpendiculumnak elhajlása a polártengelytől + irányban.

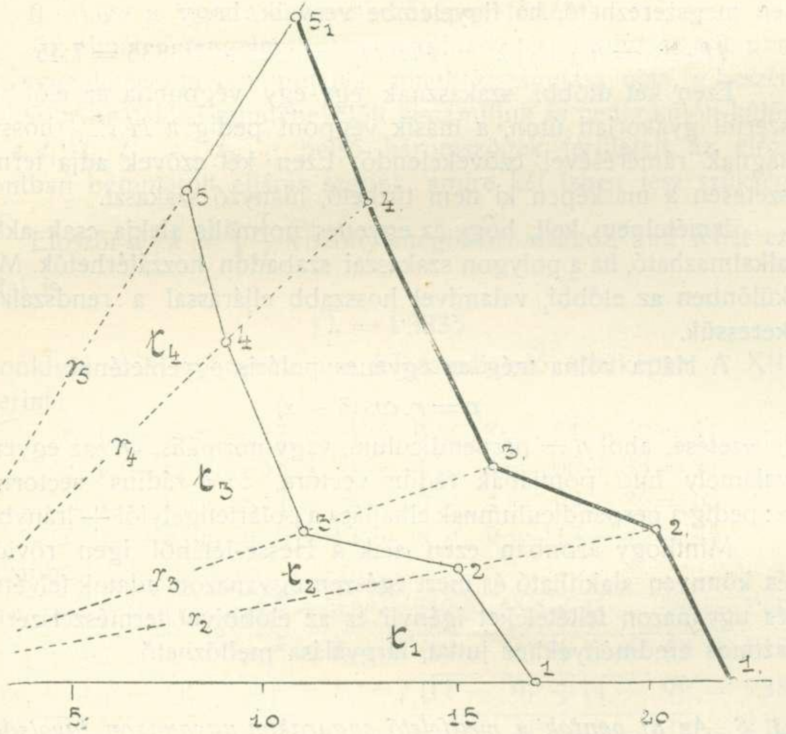
Minthogy azonban ezen alak a Hesse-féléből igen röviden és könnyen alakitható és mert egészen ugyanazon adatok felvételét és ugyanazon feltételeket igényli és az előbbivel természetszerüen azonos eredményekhez juttat, tárgyalása mellőzhető.

3. §. Az uj pontok a megfelelő sugarakon ugyanazon távolságra futnak.

8. A kimondott feltétel szerint a többször tört határvonalnak csak azon szakasza lehet a régivel párhuzamos, amelynek két pontja a tengelyrendszer kezdőpontjától egyenlő távolságra van. Ez az eshetőség a legritkább esetek közé tartozván, az 5. ábrán felvett (3. ábrával azonos) feladatból szándékosan kimarad.

Ugyanezen értelemben elesik az előző §.-ban $\sqrt{\lambda}$-val jelzett arányosság fogalma, valamint az ugyanazon sugarakat metsző párhuzamos egyenesek és az általuk metszett sugárrészek között felállitható relációk is. Az uj és régi törési pontok rendszálai között szemlélhető viszony értéke más alaku.

Az elméleti tengelyrendszer alkalmazása itt is a legczélszerübb, a mikor annak kezdőpontja — mint az előbb is — a hosszukás poligon két (nem párhuzamos) záróvonalának metszőpontja is.



5. ábra.

Ezen metszőpont mértani helye ugyan a közönséges goniometria törvényei szerint is meghatározható volna és pedig egyenértékü pontossággal, de az elemzőmértan tételei jóval rövidebb uton vezetnek a kellő és szintén pontos eredményekhez, jóllehet a transcedens és irrationalis számok itt is, ott is szerepelnek.

A megoldás alapja azon ismert tétel, hogy *két oldal és az általuk bezárt szög sinusának szorzata adja a háromszög kétszeres területét.*

Ha a törési pontokhoz vont sugarakat $(r_1 r_2 r_3 \ldots r_n)$ jelekkel veszszük fel, a közös nagyságu sugárhosszabodás „s" és az egyes sugarak által bezárt szögek, az őket alkotó sugarak jelzőszámait veszik fel, az imént irt szabály:

$$[r_1 + s]\,[r_2 + s]\, sin\,\alpha_{12} = 2\,T_1$$
$$[r_2 + s]\,[r_3 + s]\, sin\,\alpha_{23} = 2\,T_2$$
$$[r_3 + s]\,[r_4 + s]\, sin\,\alpha_{34} = 2\,T_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[r_{(n-1)} + s]\,[r_n + s]\, sin\,\alpha_{(n-1)n} = 2\,T_{(n-1)}$$

ahol a

$$[t_1\, t_2 \ldots .\, t_{(n-1)}] \text{ és } [T_1\, T_2 \ldots T_{(n-1)}]$$

ugyanazt jelentik mint a 2. §. 2. pontja alatt.

Az egyenletek rendezése után

$$\left.\begin{array}{l} s^2\, sin\,\alpha_{12} + s\,[r_1 + r_2]\, sin\,\alpha_{12} + r_1 r_2\, sin\,\alpha_{12} = 2\,T_1 \\ s^2\, sin\,\alpha_{23} + s\,[r_2 + r_3]\, sin\,\alpha_{23} + r_2 r_3\, sin\,\alpha_{23} = 2\,T_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s^2\, sin\,\alpha_{(n-1)n} + s\,[r_{(n-1)} + r_n]\, sin\,\alpha_{(n-1)n} + r_{(n-1)} \\ \qquad r_n\, sin\,\alpha_{(n-1)n} = 2\,T_{(n-1)} \end{array}\right\} \ldots \text{XV.}$$

Ha pedig egyuttal figyelembe veszszük, hogy

$$r_1 r_2\, sin\,\alpha_{12} = 2\,t_1$$
$$r_2 r_3\, sin\,\alpha_{23} = 2\,t_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{(n-1)}\, r\,n\, sin\,\alpha_{(n-1)}\, n = 2\,t_{(n-1)}$$

és ugyanekkor azt is, hogy

$$[t_1 + t_2 + \ldots .\, t_{(n-1)}] = t$$

és

$$[T_1 + T_2 + T_3 + \ldots . + T_{(n-1)}] = T$$

ugy a XV. alatt álló egyenletek összege tiszta másodfoku egyenletet ád, mely s-nek, a felvett sugarak közös meghosszabbodásának értékéhez vezet. És ez:

$$s^2\,[sin\,\alpha_{12} + sin\,\alpha_{23} + \ldots .\, sin\,\alpha_{(n-1)\,n}] + s\,[(r_1 + r_2)\, sin\,\alpha_{13} +$$
$$+ (r_2 + r_3)\, sin\,\alpha_{23} + \ldots . + (r_{(n-1)\,n} + r_n)\, sin\,\alpha_{(n-1)\,n}] -$$
$$- 2\,[T - t] = 0$$

vagy ha az elsőfoku ismeretlen együtthatójában a beszorzásokat elvégezzük:

$$s^2\,[sin\,\alpha_{12} + sin\,\alpha_{23} + \ldots . + sin\,\alpha_{(n-1)\,n}] + s\,\{r_1\, sin\,\alpha_{12} +$$
$$+ r_2\,[sin\,\alpha_{12} + sin\,\alpha_{23}] + \ldots .. + r_k\,[sin\,\alpha_{(k-1)k} + sin\,\alpha_{k\,(k+1)}] +$$
$$+ \ldots .\, r_n\, sin\,\alpha_{(n-1)\,n}]\} - 2\,T_0 = 0 \quad \ldots \quad \text{XVI.}$$

$(T-t)=T_0$-val jelezve az a terület, ami a felosztandó egész sokszögből a már előre megállapitott nagyságban, illelőleg arány szerint kihasitandó.

Az áttekintés megkönnyitése végett az egyszerüsités kedvéért legyen

a) „N“ = a másodfoku ismeretlen együtthatójának jele, ami a felvett sugarak közé zárt szögek sinusainak összege,

b) „M“ pedig az elsőfoku ismeretlen coefficiense. Ez pedig oly szorzatok összegéből áll, amelyeknek mindenikében egy-egy sugár és a mellette fekvő két szög sinusa lép fel tényező gyanánt.

Az 1. és n-ik sugárra természetesen csak egy-egy szög eshetik. Lesz tehát:

$$s=\frac{-M\pm\sqrt{M^2+8N.T_0}}{2N} \quad . \; . \; . \; . \; \text{XVII.}$$

Ezen nyert egyenlet alapján az 5. ábrán felvett példa gyakorlati megoldásához szükséges M és N adatokat itt is, mint az előbbi eljárásnál kizárólag a pontosan mért rendszálakból veszszük. És pedig:

$$r_k=\sqrt{x_k^2+y_k^2}: \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{XVIII.}$$

A sugarak által közbezárt szögek sinusfüggvényeit pedig azon hányados adja, amelynek számlálója a két szomszédos pont rendszálaiból alkotott determináns (vagyis ezekkel képezett háromszög kétszeres területe) nevezője pedig ugyanezen két ponthoz vont sugarak szorzata. Ez összevág azon feltétellel, amiből kiindultunk és ami közvetlenül is beigazolható. Nevezetesen:

$$\alpha_{k,(k-1)}=\alpha_{1k}-\alpha_{1(k-1)}$$

$$\sin\alpha_{k(k-1)}=\sin\alpha_{1k}.\cos\alpha_{1(k-1)}-\cos\alpha_{1k}.\sin\alpha_{1(k-1)}$$

Minthogy pedig:

$$\sin\alpha_{1k}=\frac{y_k}{r_k};\ \cos\alpha_{1k}=\frac{x_k}{r_k}$$

stb. lesz

$$\sin\alpha_{k(k-1)}=\frac{y_k}{r_k}.\frac{x_{(k-1)}}{r_{(k-1)}}-\frac{x_k}{r_k}.\frac{y_{(k-1)}}{r_{(k-1)}}$$

azaz

$$\sin\alpha_{k(k-1)}=\frac{x_{(k-1)}y_k-x_k y_{(k-1)}}{r_k r_{(k-1)}} \quad . \; . \; . \; . \; \text{XIX.}$$

ahol $k=1,2,3,\ldots n$ jelzőszámok általánositása.

Ezen alapokon a példa megoldása igy történik:

a) $n = 5$. A XVIII. szerint (Lásd 4. pont):

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{17^2 + 0^2} = 17{\cdot}00$$
$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{15^2 + 3^2} = 15{\cdot}30$$
$$r_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = \sqrt{11^2 + 4^2} = 11{\cdot}70$$
$$r_4 = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} = \sqrt{9^2 + 9^2} = 12{\cdot}72$$
$$r_5 = \sqrt{x_5^2 + y_5^2} = \sqrt{8^2 + 13^2} = 15{\cdot}29$$

XIX. szerint: (a determinansok 6. pont alatt már ki vannak számitva)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{r_1 r_2} &= \sin\alpha_{12} = \frac{51}{17{\cdot}0 \times 15{\cdot}3} = 0{\cdot}19607 \\
\frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{r_2 r_3} &= \sin\alpha_{23} = \frac{27}{15{\cdot}3 \times 11{\cdot}7} = 0{\cdot}15082 \\
\frac{x_3 y_4 = x_4 y_5}{r_3 r_4} &= \sin\alpha_{34} = \frac{63}{11{\cdot}7 \times 12{\cdot}72} = 0{\cdot}42332 \\
\frac{x_4 y_5 - x_5 y_4}{r_4 r_5} &= \sin\alpha_{45} = \frac{45}{12{\cdot}72 \times 15{\cdot}29} = 0{\cdot}23136
\end{aligned}\right\} = 1{\cdot}00157 = N$$

Ugyanezen számadatok fölhasználásával

$$\left.\begin{aligned}
r_1 \sin\alpha_{12} &= 0{\cdot}19607 \times 17{\cdot}0 = 3{\cdot}33319 \\
r_2 [\sin\alpha_{12} + \sin\alpha_{23}] &= 0{\cdot}34689 \times 15{\cdot}3 = 5{\cdot}30742 \\
r_3 [\sin\alpha_{23} + \sin\alpha_{34}] &= 0{\cdot}57414 \times 11{\cdot}7 = 6{\cdot}71744 \\
r_4 [\sin\alpha_{34} + \sin\alpha_{45}] &= 0{\cdot}65468 \times 12{\cdot}72 = 8{\cdot}32753 \\
r_5 \sin\alpha_{45} &= 0{\cdot}23136 \times 15{\cdot}29 = 3{\cdot}53749
\end{aligned}\right\} = 27{\cdot}22307 = M$$

Minthogy pedig a feladat szerint a kihasitandó arányos rész $T_0 = 85 \square$ egység:

$$s = \frac{-27{\cdot}22307 \pm \sqrt{27{\cdot}22307^2 + 8 \times 1{\cdot}00157 \times 85}}{2 \times 1{\cdot}00157}$$

$$= \frac{-27{\cdot}22307 \pm 37{\cdot}71}{2{\cdot}00314} = s = 5{\cdot}245 \text{ hosszegység.}$$

Ezek után az elméleti rendszálak kiszámitásához láthatunk. Előrebocsátva, hogy (amint az ábrán is látható)

$$\frac{r_k}{r_k + s} = \frac{x_k}{\xi_k} = \frac{y_k}{\eta_k}$$

és ezekből

$$\xi_k = \frac{[r_k + s]\, x_k}{r_k}; \quad \eta_k = \frac{[r_k + s]\, y_k}{r_k} \quad \ldots\ldots \quad \text{XX.}$$

Igy nyerjük:

$$\xi_1 = 22{\cdot}25\,; \qquad \eta_1 = 0$$
$$\xi_2 = 20{\cdot}14\,; \qquad \eta_2 = 4.03$$
$$\xi_3 = 15{\cdot}93\,; \qquad \eta_3 = 5{\cdot}79$$
$$\xi_4 = 12{\cdot}73\,; \qquad \eta_4 = 12{\cdot}71$$
$$\xi_5 = 10{\cdot}74\,; \qquad \eta_5 = 17{\cdot}46$$

Ismerve ezen rendszálakat is, azok kitűzése és a szükséges uj tengelyrendszerre való vonatkoztatása a 3. pontban van leirva.

10. Ezen eljárási módnak különös előnye van akkor, ha a törési pontok mindegyikén műszerrel felállhatunk. A sugarak ezen alkalommal minden törési ponton közvetlenül kitűzhetők s az egységes „s" távolság mindegyikre ráméhető.

Az előző pont egyszerü számitásai minden sugár elhajlását szolgáltatják és pedig viszonyitva azokat egyrészről egymáshoz, mint ahogy a sinus függvények értékeit vettük is, de viszonyitva egyuttal az x tengelynek választott r_1 sugárhoz, vagyis a szélső, záró határvonalhoz is.

Szükségünk pedig ezuttal éppen erre van és ez

$$\frac{y_k}{r_k} = sin\,\alpha_1\,k$$

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{0}{17} = 0 \text{ [maga az } x \text{ tengely]}$$

$$\frac{y_2}{r_2} = \frac{3}{15{\cdot}3} = 0{\cdot}1961 = sin\,\alpha_{12} = 11^0\ 18{\cdot}5'$$

$$\frac{y_3}{r_3} = \frac{4}{11{\cdot}7} = 0{\cdot}3419 = sin\,\alpha_{13} = 19^0\ 59{\cdot}6'$$

$$\frac{y_4}{r_4} = \frac{9}{12{\cdot}72} = 0{\cdot}7076 = sin\,\alpha_{14} = 45^0\ 2{\cdot}4'$$

$$\frac{y_5}{r_5} = \frac{13}{15{\cdot}29} = 0.8502 = sin\,\alpha_{15} = 58^0\ 14{\cdot}0'$$

Ha ezen számbeli adatok birtokában az 1. ponton valamely *jó beosztású* boussola-műszerrel megállva az r_1-nek, vagyis a parczella záróvonalának csapószögét a természetben közvetlenül felveszszük, akkor a többi pontokon, az itt kiszámitott szögekkel elforditott műszerállások adják az egyes sugarak irányát, amelyeken az eltolás történik. A delejtűnek nagyitóval való leolvasásánál elkövethető hiba mintegy 4—5 első percz, amivel a sugarat mintegy vakolatvastagsággal tévesztjük el 10—12 öl távolságnál. Ezzel azonban a megengedhető hibahatárokat nem lépjük tul.

11. Az előző pontban tárgyalt eljárás módosul és pontosabb eredményeket ad, ha a boussola-műszer helyett 1 szögpercz pontosságig olvasható, szögtüző műszerünk van. Ekkor azonban szükséges feltétel, hogy az x tengelyre felvett r_1 pont, a törési pontok mindenikéről látható és beirányitható legyen.

Amig pedig az előbb a sugaraknak az első sugárral képezett szögeit kerestük és vettük igénybe, most a sugarak mindenikének és azon egyenesek elhajlását kell kiszámitanunk, amelyek a sugárhoz tartozó törési pont és az x tengelyen fekvő 1 pont között vonhatók.

A két ponton átmenő egyenes általános formája

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Ezen egyenletnek jobb oldala (derékszögü tengelyrendszerben) az egyenes és az x tengely között levő szögnek a tangense és pedig mindig az x tengelytől $+$ irányban számitva. Két egymást metsző egyenes elhajlásának tangense ilyképpen

$$tg\,\vartheta=\frac{\tau_2-\tau_1}{1+\tau_1\tau_2}$$

egyenletben van adva. Itt τ_1 és τ_2 a két szóban levő egyenesnek fent emlitett tangenseit jelentik.

Az egyenes párok egyenletei a már eddig is alkalmazott $k=[1, 2, 3 \ldots. n]$ általános jelzés mellett:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_k-y_0}{x_k-x_0}=\tau_{0k}$$

a tengelyrendszer kezdőpontjából vont sugár, és:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_k-y_1}{x_k-x_1}=\tau_{1,k}$$

a k-ik és az 1. pont között vont egyenes.

Ezekből: $$\tau_{0k}=\frac{y_k}{x_k}; \quad \tau_{1k}=\frac{y_k-y_1}{x_k-x_1}$$

Tudva, hogy $y_1=0$, az elhajlás $[\vartheta]$ tangense

$$tg\,\vartheta=\frac{\dfrac{y_k}{x_k-x_1}-\dfrac{y_k}{x_k}}{1+\dfrac{y_k^2}{x_k(x_k-x_1)}};$$

közös nevezővel

$$tg\,\vartheta = \frac{x_1 y_k}{x_k^2 + y_k^2 - x_1 x_k} \quad \ldots\ldots \quad \text{XXI.}$$

12. Ezen megállapodások után és „s"-nek XVII. alatti értékét ismerve, az 5. ábrán feltüntetett példa kidolgozása a következő:

$$tg\,\vartheta_2 = \frac{x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2 - x_1 x_2} = \frac{17 \cdot 3}{15^2 + 3^2 - 15 \times 17} = -2{\cdot}4286 =$$
$$= 67^0\, 37{\cdot}2' = \vartheta_2$$

$$tg\,\vartheta_3 = \frac{x_1 y_3}{x_3^2 + y_3^2 - x_1 x_3} = \frac{17 \cdot 4}{11^2 + 4^2 - 17 \times 11} = -1{\cdot}3600 =$$
$$= 57^0\, 40{\cdot}4' = \vartheta_3$$

$$tg\,\vartheta_4 = \frac{x_1 y_4}{x_4^2 + y_4^2 - x_1 x_4} = \frac{19 \cdot 17}{9^2 + 9^2 - 17 \times 9} = 17.0000 =$$
$$= 93^0\, 22{\cdot}1' = \vartheta_4$$

$$tg\,\vartheta_5 = \frac{x_1 y_5}{x_5^2 + y_5^2 - x_1 x_5} = \frac{17 \cdot 13}{8^2 + 13^2 - 17 \times 8} = 2{\cdot}3021 =$$
$$= 113^0\, 28{\cdot}8' = \vartheta_5$$

A kapott szögek számértékére, illetőleg a tangens függvények előjelére nézve megjegyzendő, hogy a XXI. egyenlet alatt azon szög tangense értendő, amit a kezdőponton keresztül menő „k_0" sugár a „0" pontból kiindulva, az eleve fölvett, jelenleg forditott órakörös irányban haladva, bezár mindaddig, mig a „$k\,1$" egyenes helyébe nem kerül.

Ez tehát az x tengelyt bezáró $0\,k\,1 \sphericalangle$, mig a feladatban az ennek megfelelő külszöget keressük.

A tangenstáblázatok csakis a hegyesszögek függvényeit tartalmazhatják.

Minthogy pedig az 5. ábrán, a 2. és 3. törési pontokon a szerkesztés alatt tompa belső szögek keletkeztek, melyeknek tangense — előjelü, a táblából közvetlenül kapjuk a tompaszögnek megfelelő külső szöget. Ellenben a 4. és 5. pontokon levő belső szögek hegyesszögek lévén, az ezek $+$ értékü függvényeinek megfelelő szögértéket a 180^0-ból külön kellett még levonni.

(Vége köv.)