Egy uj köbözési képlet.

Irta: Horváth Sándor.

Nem gyakran ugyan, de mégis előfordul a gyakorlatban, hogy a levágott törzseket egészben, tehát a csúcscsal együtt kell köböznünk, a nélkül, hogy a czél elérésére hosszadalmasabb eljárást alkalmazhatnánk.

Ily esetekben eddig könnyü kezelhetése miatt leginkább ez a képlet használtatott:

$$K = t\,M, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \; 1,$$

hol t a középen mért átmérő körlapját. M pedig a törzs magasságát vagy hosszát jelenti; vagy pedig ez:

$$K = \frac{3}{4}\,t'\,M, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \; 2,$$

melyben t' a törzs egy harmad hosszában mért átmérőnek megfelelő körlapot jelenti. Ez az utóbbi képlet a tankönyvek szerint pontosabb eredményt ad, a gyakorlatban mindamellett ritkán használtatik.

Ezekkel szemben most egy lengyel szakember, Strzelicki Henrik egy uj képletet ajánl*), mely a következő alakkal bir:

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{a}{A}\,T\,M, \quad . \quad . \quad . \quad . \; 3.$$

Ebben A és a az alsó és közép átmérőt, T az alsó körlapot és M a magasságot jelenti.

Ez a képlet igy a mint Strzelicki ajánlja, nem sok figyelmet kelthet maga iránt, mert a sok tényező miatt, mely benne előfordul, első tekintetre komplikáltnak látszik. Ez a hátránya azonban csak látszólagos, mert mint alább látni fogjuk, az egész kifejezés meglehetős egyszerü alakba önthető,

---

*) Eine einfache Ermittlungsweise der Schaftformzahlen, von Heinrich Strzelicki. „Centralblatt für das gesammte Forstwesen". 1883. évfolyam. Aug.—szept. füzet.

ugy hogy a kezelés könnyüsége tekintetében nem csak megközeliti az előbbieket, de bizonyos esetekben, még felül is mulhatja őket.

Jogosultsága felett tehát nézetem szerint első sorban az a kérdés határoz, vajjon pontosság tekintetében felülmulja-e az eddig használt egyszerü képleteket.

Strzelicki e kérdés elméleti fejtegetésébe nem is bocsátkozik s alapos bizonyitékok helyett csupán néhány kisérleti eredményre támaszkodva állitja, hogy az ő képlete pontosabb eredményt ad mint a közép körlap szerinti köbözés. Kimutatja nevezetesen, hogy nyolcz különböző fanemből vett törzsnél az ő képlete a pontos eredményhez képest $+ 2.1\%$ és $- 2.7\%$ legnagyobb eltérések mellett csak 0.175% hibát mutatott, mig az 1) alatti képlet szerint az eltérés $+ 9.0$ és $- 21.1\%$ határok közt átlagosan 3.76% volt.

Nehány kézügyben levő próbatörzs-adattal én is megkisértettem ezt az összehasonlitást s csakugyan én is hasonló eredményre jutottam, a mennyiben 10, szembeszökően szabálytalan törzsnél én is azt találtam, hogy mig az uj képlet alkalmazásánál a hiba $+ 13.3$ és $- 12.6\%$ legnagyobb eltérések mellett átlagosan 4.5% volt, addig az 1) alatti képlet $+ 16.4$ és $- 28.4\%$ legnagyobb különbséggel 11% átlagos hibát mutatott.

E nehány kisérleti adattal azonban, ugy hiszem, a kérdést még nem lehet tisztázni. Helyén valónak találom tehát elméleti oldalról is röviden megvilágitani a kérdést.

Strzelicki e képlet levezetésénél azon feltevésből indult ki, hogy a mi fáink törzsének köbtartalma és az azokkal egyenlő alsó átmérővel és magassággal biró domboru kúpok (paraboloidok) köbtartalma közt ugyanaz az arány áll fenn, mint az illető testek középátmérői között, vagyis hogy :

$$K : K_d = a : a_d.$$

Ebből az arányból ugyanis következik, hogy a törzs köbtartalma :

$$K = K_d \frac{a}{a_d} = \frac{1}{2} \frac{a}{a_d} T M,$$

vagy ha figyelembe vesszük, hogy a domboru kúpnál a középátmérő $(a_d) = \frac{1}{\sqrt{2}} A$:

$$K = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}\, a}{A} T M = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a}{A} T M = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{A} T M,$$

Az itt nyert eredmény, mint látjuk, egészen megegyezik az 3) alatti képlettel, az utóbbinak helyessége tehát attól függ, vajjon a most emlitett arány a fatörzsek és a megfelelő domboru kupok között csakugyan fenáll-e vagy sem.

A fatörzsek, mint jól tudjuk, nem birnak szabályos alakkal, hanem kisebb-nagyobb eltéréssel csak megközelitik azon alakokat, melyekkel egyfelől a domboru és egyenes oldalu s másfelől az egyenes oldalu és homoru kupok között képzelhető szabályos testek birnak. Ennélfogva, ha a felvetett kérdésre nézve tisztába akarunk jönni, vizsgálatainkat ezen szabályos testekre nézve kell keresztül vinnünk, mert csak igy vonhatjuk le következtetéseinket a törzsekre nézve. Lássuk tehát mennyiben talál a fennebb felállitott arány a domboru és egyenes oldalu, továbbá a domboru és homoru kupokra.

A domboru és egyenes oldalu kupok köbtartalma között tudvalevőleg ezen arány áll fenn :

$$K_d : K_e = \frac{1}{2} A \frac{^2\pi}{4} M : \frac{1}{3} A \frac{^2\pi}{4} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$$

vagy másképen kifejezve :

$$\frac{K_d}{K_e} = \frac{3}{2} = 1.5; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4,$$

a domboru és homoru kúpok köbtartalma között pedig :

$$K_d : K_h = \frac{1}{2} A \frac{^2\pi}{4} M : \frac{1}{4} A \frac{^2\pi}{4} M = \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 4 : 2,$$

vagy más kifejezéssel :

$$\frac{K_d}{K_h} = \frac{4}{2} = 2.0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5.$$

E szerint, ha Strzelicki feltevése igaz, akkor a középátmérők hányadosa is ezt az eredményt kell hogy adja, azaz:

$\frac{a_d}{a_e} = 1.5$ és $\frac{a_d}{a_h} = 2.0$ kell hogy legyen.

A középátmérők ezen általánosan ismert egyenletekből:

$$A_d^2 : a_d^2 = 1 : \frac{1}{2},$$

$$A_e^2 : a_e^2 = 1 : \frac{1}{2^2},$$

$$A_h : a_h = 1 : \frac{1}{2^3},$$

következőkép fejezhetők ki:

$a_d = \frac{A_d}{\sqrt{2}}$; $a_e = \frac{A_e}{2}$; $a_h = \frac{A_h}{\sqrt{8}}$, vagy ha tekintetbe vesszük, hogy itt az alsó átmérők egyenlők:

$$a_d = \frac{A}{\sqrt{2}};\ a_e = \frac{A}{2};\ a_p = \frac{A}{\sqrt{8}}.$$

A középátmérők hányadosa tehát:

$$\frac{a_d}{a_e} = \frac{2A}{\sqrt{2}A} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1.41421 \quad . \ 6.$$

$$\frac{a_d}{a_h} = \frac{\sqrt{8}A}{\sqrt{2}A} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2.0 \quad . \ 7.$$

A mint ebből láthatjuk, Strzelicki feltevése a domboru és homoru kupok közötti viszonyra nézve tökéletesen igazolt, mert az 5. és 7. alatti kifejezések tökéletesen egyenlők; a domboru és egyenes oldalu kupokra nézve azonban nem teljesen áll, mert itt a köbtartalmak és középátmérők aránya a 4. és 6. alatti kifejezések szerint nem egészen egyező.

Ebből következtetve a 3) alatti uj köbözési képlet a domboru és homoru kúpokhoz hasonló alakkal biró törzseknél pontos, minden más törzsnél ellenben hibás eredményt ad, s a hiba annál nagyobb, minél távolabb áll az illető törzs alakja a domboru és homoru kúpétól s minél közelebb az egyenes oldalu kupéhoz. Legnagyobb a hiba akkor, ha a köbözendő fa egyenes oldalu kúpot képez.

Szigoruan véve tehát, Strzelicki képlete nem egészen helyes, ez azonban még nem zárja ki azt, hogy a gyakorlatban ne volna alkalmaztató, mert mint látni fogjuk, az 1. és 2. alatti képletek sem teljesen hibanélküliek és mégis használtatnak.

A használhatóság kérdése ennélfogva tulajdonképen azon fordul meg, hogy e hiba minő nagy. Lássuk tehát miként áll a dolog e tekintetben a három képlettel.

Az egy alatti képlet, melyszerint a köbtartalom

$$K = t\ M,$$

mint tudjuk, a domboru kúpra vonatkozik. Ezzel a képlettel tehát abban az esetben, ha domboru kúpra alkalmazzuk, nem követhetünk el hibát, vagyis a hibaszázalék

$$p = o.$$

Ha ellenben egyenes oldalu kúpra alkalmazzuk, akkor már nem kaphatunk egészen pontos eredményt, mert mint tudva van, az egyenes oldalu kúpnál a közép körlapra alapitott köbözési képlet ez : $K = \frac{4}{3}\ t\ M$; ennélfogva a hiba itt százalékokban kifejezve :

$$p = \left(\frac{4}{3}\ t\ M - t\ M\right) \frac{100}{\frac{4}{3}\ t\ M} = \frac{3}{12}\ 100 = 25^0/_0.$$

Hasonlóan hibás eredményt ad e képlet akkor is, ha a homoru kúpra alkalmazzuk, mert itt a közép körlappal kifejezett köbtartalom $K = 2\ t\ M$, s igy a hiba :

$$p = (2\ t\ M - t\ M)\ \frac{100}{2\ t\ M} = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50^0/_0\ \ldots .$$

Az 1. alatti képlettel tehát azon törzseknél, melyeknek alakja a domboru és homoru kúp közé esik, átlagosan $12.5^0/_0$ hibát, azoknál ellenben, melyeknek alakja az egyenes és homoru kúp közé esik, átlagosan $25^0/_0$ hibát követünk el.

A 2. alatti képletnél, melyszerint a köbtartalom:

$$K = \frac{3}{4}\, t'\, M,$$

már kedvezőbb az eredmény, itt ugyanis a hiba, ha domboru kúp köbözéséről van szó, ugyanazon okokból mint az előbbinél semmi, azaz:

$$p = o$$

s ha egyenes oldalu kúpot köbözünk vele szintén, mert a magasság egy harmadában mért körlapra alapitott köbözési képlet ezen szabályos testnél is $K = \frac{3}{4}\, t'\, M$ s igy a hiba:

$$p = o$$

a homoru kúp köbözésénél pedig a hiba következő:

$$p = \left(\frac{27}{32}\, t' M - \frac{3}{4}\, t'\, M\right) \frac{100}{\frac{3}{4} t' M} = \frac{3}{27} \times 100 = 11.{}_{11}\%,$$

tehát szintén kisebb mint előbb.

Átalánosságban azt lehet mondani, hogy a 2. alatti képlettel azon törzsek, melyeknek alakja a domboru és egyenes oldalu kúp közé esik pontosan, azok ellenben, melyek az egyenes és homoru kúp közé esnek $5.{}_5\%$ hibával köböztetnek.

Ezekkel szemben lássuk már most, mekkora hibát követünk el a 3. alatti uj képlettel.

Az előzmények szerint a domboru kúp köbözésénél ez a képlet is pontos eredményt kell hogy adjon, mert tulajdonképen ez sem egyéb, mint a domboru kúpnak egy ujonnan felállitott képlete. Bizonyitja egyébiránt ezt a hibaszámitás eredménye is. Ugyanis ez esetben:

$$p = \left(\frac{1}{2}\, T M - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{A}\, T\, M\right) \frac{100}{\frac{1}{2}\, T\, M},$$

vagy ha a domboru kúp törvényei szerint a helyett $\frac{A}{\sqrt{2}}$-át helyettesitünk:

$$p = \left(\frac{1}{2}\,TM = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{A}{\sqrt{2}\,A}\,TM\right)\frac{100}{\frac{1}{2}\,TM} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,TM - \frac{1}{2}\,TM\right)\frac{100}{\frac{1}{2}\,TM} = 0$$

Az egyenes eldalu kúp köbözésénél ellenben

$$p = \left(\frac{1}{3}\,TM - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{a}{A}\,TM\right)\frac{100}{\frac{1}{3}\,TM},$$

vagy ha itt a helyett a megfelelő értéket $\frac{A}{2}$-t helyettesitjük:

$$p = \left(\frac{1}{3}\,TM - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{A}{2A}\,TM\right)\frac{100}{\frac{1}{3}\,TM} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)300 =$$

$$= -5{\cdot}06\%$$

És végül a homoru kúp köbözésénél:

$$p = \left(\frac{1}{4}\,TM - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{a}{A}\,TM\right)\frac{100}{\frac{1}{4}\,TM},$$

vagy ha a helyett a homoru kúp szabályai szerint $= \frac{A}{\sqrt{8}}$-at helyettesitünk:

$$p = \left(\frac{1}{4}\,TM - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{A}{\sqrt{8}\,A}\,TM\right)\frac{100}{\frac{1}{4}\,TM} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{8}}\right)400 =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)400 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Az uj képlettel e szerint az olyan törzsek köbözésénél, melyek a domboru és egyenes oldalu kúp közé esnek, átlagosan $\frac{6{,}06}{2} = 3{\cdot}03\%$ hibát követünk el, az egyenes és homoru kúp közé eső törzseknél pedig egészen pontos eredményt kapunk.

Összehasonlitva már most a három képletnél mutatkozó eredményeket egymással, ugy találjuk, hogy az uj képlet minden esetben jóval pontosabb eredményt ad mint az 1. alatti, sőt a 2. alattit is felülmulja az által, hogy a mértanilag helyes eredménytől semmiféle körülmények között sem tér el oly nagy %-al mint az utóbbi. Ennek azonban, nem lehet tagadni, szintén meg van az az előnye az uj képlet felett, hogy azon határok közt, melyek közé a legtöbb törzs sorozható, t. i. a domboru és egyenes oldalu kúpok között egészen hibátlan eredményt ad, mig az uj képlettel itt, mint láttuk, átlagosan 3%-al nagyobb köbtartalmat nyerünk a valódinál. Ez a hiba azonban oly csekély, hogy a gyakorlatban valóban szóba sem jövet.

Félreértések kikerülése végett azonban szükségesnek tartom itt megjegyezni, hogy az eddig emlitett hiba alatt én csupán azt a különbséget értem, mely magából a képletnek hiányosságából származik, s a mely ennélfogva csak abban a képzelt esetben volna teljesen egyenlő a köbözésnél felmerülő egész hibával, ha kifogások alá nem eshető pontos eszközökkel oly törzsek köbtartalmát határoznók meg, melyek az itt emlitett szabályos testek valamelyikével teljesen egyező alakkal birnak. A valóságban természetesen nem igy áll a dolog s ezért a tényleges hiba is az előbb kimutattaknál nagyobb vagy kisebb lehet, a szerint a mint a különféle okokból származó eltérések, egyirányuak lévén, összehalmozódnak, vagy eltérvén egymástól, kölcsönösen megsemmisitik s illetőleg mérséklik egymást. Különösen azt a körülményt semmiesetre sem szabad itt figyelmen kivül hagyni, hogy talán egyetlenegy törzs nincs, mely egész hosszában ugyanazon szabály szerint lenne alkotva; ellenkezőleg mig, például a gyöktörzs környéke csonka homoru kuphoz szokott hasonlitani, addig a felebb következő darabok hengernek, aztán domboru kupnak, egyenes oldalu kupnak s végül ismét homoru kupnak tekinthetők. Természetes tehát, hogy a fatörzseknél még az olyan képlet sem adhat teljesen pontos eredményt, mely a szabályos testek köbözésére egészen hibátlanul alkalmazható.

Az azonban kétségtelen, hogy ily körülmények között is az a képlet a legpontosabb, mely a szabályos testekre leginkább illik.

Ép ezért az eredmény tekintetében, részemről a Strzelicki képletét az 1. alattinál feltétlenül jobbnak, a 2. alattinál pedig előnyösebbnek tartom, még pedig nemcsak az eddig el mondottaknál fogva, hanem egy más körülmény miatt is, mely nézetem szerint szintén figyelmet érdemel s ez az, hogy mig a két régi képletnél a számitás csupán egyetlenegy vastagsági méretre van alapitva, addig az uj képlet az alsó átmérő mellett a közép átmérőt is számitásba veszi s igy mindenesetre több biztositékot is nyujt arra nézve, hogy a köbözésnél véletlenül nem épen olyan méretből indulunk ki, mely a törzs átlagos alakjának nem felel meg.

Ez az előny természetesen csak akkor tekinthető valódi előnynek, ha egyfelől a kettős vastagsági mérés, s másfelől a számitásnak ebből származható összetettsége nem teszik számbavehetően nehézkessé az eljárást.

A mi a mérést illeti, kétségtelenül igaz, hogy két átmérő felvétele körülményesebb, mint csupán egygyé; mindamellett én ugyhiszem, hogy a második átmérő felvétele ebben az esetben semmiféle időpazarlással sincs összekötve. Mert hisz a mig a hosszuság leméretik s mig ennek megtörténte után a középen vagy az egyharmad hosszban fekvő átmérő felkerestetik és megméretik, addig az alsó átmérőt is könnyen felveheti, akár maga a köböző, akár egy esetleg rendelkezésre álló második munkás.

És majdnem igy áll a dolog a számitási nehézségekkel is, mert mint már kezdetben emlitém a 3. alatti képlet egészen egyszerü alakra hozható. Ugyanis :

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{A} T M = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{A} \frac{A^2 \pi}{4} M =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} a . A \frac{\pi}{4} M = \frac{\pi}{4 \sqrt{2}} a A M = 0.555\ a . A . M, \text{ vagy}$$

ha tekintetbe veszszük azt, hogy a képlet a fennebbiek szerint átlagosan $3^0/_0$-al nagyobb eredményt ad a helyesnél s ennek folytán az állandónak utolsó tizedesét elhanyagoljuk, a képlet a következő kifejezést nyeri:

$$K = 0.55\, a \,.\, A \,.\, M,$$

mely mindenesetre elég egyszerü, oly esetekben pedig, midőn segédtáblák nem állanak rendelkezésünkre, határozottan könynyebben kezelhető is, mint az eddigi képletek, mert mig ennél három, két számjegyből álló tényező szorzatát végül 0.55-el kell szorozni, addig az elsőnél a negyedik szorzást a legalább 3 tizedesre veendő π-vel, a 2. alatti képletnél pedig a π-vel és azután $^3/_4$-el kell még külön szorozni; a számitási munka tehát mindenesetre az uj képletnél a leggyorsabb és legkönnyebb.

Természetesen épen megforditva áll a dolog akkor, ha a számitáshoz köbözési táblákat is használhatunk, bár meg kell jegyeznem, hogy segédtáblákat az uj képlet számára is öszszelehet állitani, és pedig ugy hogy az abból nyert eredményt csupán egy számmal, a magassággal kell még szorozni. Az 1. pont alatti képlettel ugyan ekkor is könnyebb lesz a számitás, mert itt egyenesen ki lehet olvasni a köbtartalmat, de a 2. alattival már nem, mert a köbtáblák eredményét itt is szorozni kell még 0.75-el.

Mindent összevetve részemről azt hiszem, hogy Strzelicki képlete ebben az általam ajánlt alakban

$$K = 0.55\, a\, A\, M$$

figyelmet érdemel, mert habár meg van is az a nagy hiánya, hogy csak egész törzsekre alkalmazható s ennélfogva a gyakorlatban csak ritkán lehet szerepe s mert bár az sem tagadható, hogy segédtáblák használata mellett nehézkesebb, mint az 1. alatti képlet, egyes esetekben mégis jó szolgálatot tehet, mivel aránylag kevés fáradság mellett sokkal pontosabb eredményt ad, mint a hasonló egyszerübb képletek.