Milyen eljárást kövessünk, s mily műszereket használjunk az erdők felmérésénél?

Irta: *Batyka János.*

(Folytatás).

Melléklet: „Földmértani rajz“ 8 ábrával.

II.

A sokszögtan (Polygonometria) ismertetése.

A) Elméleti szabályok. A megelőző szakaszban előadottakból meggyőződtünk arról, hogy ugy a vonalak, mint szögök mérésénél és azoknak a papirra való felhordásánál (térképezésénél) némi csekély, az előbbeni füzetben szám szerint kimutatott eltéréseket már a műszerek tökéletlensége miatt is el nem kerülhetjük, minél fogva a megmért vonalakat és szögeket a valóságnál hol nagyobbaknak, hol kisebbeknek találjuk.

Ezen eltérések magukban véve egyenkint jelentéktelenek ugyan, de egy nagyobb terület felmérésénél egymásra halmozódva oly jelentékeny összegre növekedhetnek, mely miatt a felmérési munkálat pontossága szembetünőleg szenvedni fog. Valószinü tehát, sőt tapasztalás szerint bizonyos is, hogy habár a tevőleges eltérések egy nagyobb terület felmérésénél megszaporodott összege a nemleges eltérések összegét részben ki is egyenlíti, mind a mellett rendszerint marad még némi különbség ez eltérések közt, mely abban nyilvánul, hogy a felmért idom kerület nem záródik teljesen.

Azon módot, mely által ezen eltérések növekedését elkerülni, vagy azokat közvetett számitás segitségével legalább lehető legkisebb mértékre leszállitani lehessen, a sokszögtan nyujtja, mely már ezelőtt 70 évvel Däzel, Neumann és Prändel által*) teljes kifejlődését nyerte.

---

*) Lásd Winkler Praktische Geometrie. Seite 267.

Ennek elméletét és legszükségesebb szabályait fogjuk e szakaszban röviden megismertetni.

Mielőtt azonban e szabályok levezetésébe bocsátkoznánk, szükséges az elméleti mértanból a következőket emlékezetünkbe visszaidézni.

Minden egyenes vonalakból álló idom, ugyanannyi oldalt mint szögöt foglal magában s e szerint kétszer annyi elemből áll, mint a hány oldala van. Valamint minden háromszögnél, mely hat különböző elemből (három oldalból és három szögből) áll, ezek közül három ismeretlen lehet, épen ugy lehet egy sokszögnél három elem ismeretlen; szükséges tehát, hogy minden *n* oldalu sokszögnél 2 n—3 elem szakadatlan összefüggésben adva legyen, hogy a három ismeretlent számitás által meghatározhassuk.

Minden sokszögnek összes belső szögei annyiszor tartalmaznak 180 fokot, a hány oldala vagy szöge van az idomnak, levonva ezen összegből 360 fokot; e szerint egy *n* oldalu idom összegeinek összege $= n. 180^0 - 360^0 = n. 180^0 - 2 \cdot 180^0 = 180^0 (n-2)$. Ha tehát egy idomnak összes szögei egynek kivételével ismeretesek, akkor ezen ismeretlen szögöt ugy meghatározhatjuk, ha az ismert szögök összegét $180^0(n-2)$-ből levonjuk. P. o.: ha egy négyszög adott szögei következő méreteket tartalmaznak: $A = 85^0\ 38'$

$B = 106^0\ 12'$

$C = 97^0\ 50'$

Összegük tehát $289^0\ 40'$ tészen.

A négyszög összes szögei azonban a fentebbiek szerint $180^0.(4-2) = 180^0.2 = 360$ fokot tartalmaznak, következőleg a negyedik ismeretlen szög $360^0 - 289^0 40' = 70^0\ 20'$ tészen.

S logarithmikus táblákban tudvalevőleg csakis a hegyes szögök fügvényei (functioi) lévén kimutatva, minden szögöt, mely

90 fokot tulhalad, szükséges egy hegyes szögre visszavezetni, azaz annak nagyságát 180^0-ból, illetőleg ennek többeséből vagy megforditva levonni, mert a három szögtan szabályai szerint két oly szög, mely összeadás vagy levonás utján egymást 180^0-ra, vagy ennek többesére kiegésziti, egyenlő fügvényekkel bir, csak hogy ezen fügvények, mint alább látni fogjuk, részben ellenkező irányban fekszenek.

Ha már most ehez képest α egy hegyes szögöt, $R=90^0$, s igy $2\ R=180^0$, $4\ R=360^0$ stb. jelent, akkor lesz :

$Sin.\ \alpha = + sin.\ \alpha,$

$cos.\ \alpha = + cos.\ \alpha,$

$sin.\ (2\ R-\alpha) = + sin.\ \alpha,$

$cos.\ (2\ R-\alpha) = - cos.\ \alpha,$

$sin.\ (2\ R+\alpha) = - sin.\ \alpha,$

$cos.\ (2\ R+\alpha) = - cos.\ \alpha,$

$sin.\ (4\ R-\alpha) = - sin.\ \alpha,$

$cos.\ (4\ R-\alpha) = + cos.\ \alpha,$

$sin.\ (4\ R+\alpha) = + sin.\ \alpha,$

$cos.\ (4\ R+\alpha) = + cos.\ \alpha.$

Ezen szabály akkor is áll, ha a 4 R-rel megszakitott következtetéseket 6, 8, 10, 12, 14 R-re kiterjesztjük, és az egyes fügvények műtéti jegyei, vagyis azoknak fekvése is ugyanazon rendben változnak a 2-ik, 3-ik, 4-ik ismétlésnél mint az első 4 R-nél.

Ennek könnyebb megérthetése végett segitségül hivjuk a mellékelt rajz 5-ik ábráját. Ezen ábrában a négyszögök közt fekvő, egymást derékszögben metsző két vonal közül a függőleges rendszáltengelynek, a vizszintes metszéktengelynek, a négyszögök pedig negyedeknek neveztetnek az elemző mértanban és az egyes negyedek számitása az óra mutató járása szerint balról jobbfelé történik. A metszéktengely felső oldalán lévő *sinusok* tevőlegeseknek, az alsó oldalán lévő nemlegeseknek, a rendszáltengely baloldalán lévő *cosinusok* tevőlegeseknek, jobb oldalán levők nemlegeseknek vétetnek, e szerint az I-ső negyedben a *sinusok* (+), a *cosinusok* (+); a II-ik negyedben a *sinusok* (+), a *cosinusok* (—); a III-ik negyedben ugy a *sinusok* mint *cosinusak* (—); végre a IV-ik negyedben a *sinusok* (—), a *cosinusok* (+) jegygyel birnak.

Ezeknek előrebocsátása után, hogy a térképezendő idom pontjait meghatározhassuk, szükségünk van oly közvetitő elemekre, melyek segitségével az egyes pontok fekvését az adott szögökből és vonalakból a sokszögtan utján kiszámithatjuk. Ezen közvetitő elemek képezése, valamint a leszármaztatandó képletek emlékezetben való könnyebb megtartása végett a polygonometriában a kerületen felvett azon szögöket, melyek a vonalak által a felmért idomon belül képeztetnek, balról jobbfelé folyó rendben α_1, α_2, α_3-val, az ezen szögök után következő oldalakat a_1, a_2, a_3-val sat. jelezzük.

Alapvonalnak, vagyis metszéktengelynek az idom kerületének leghosszabb vonalát, vagy pedig az idom legtávolabbi pontjait összekötő átalót (Diagonale) vesszük. Jelen példánkban, (lásd az 1-ső ábrát) alapvonalnak az a_6-al jelzett vonal vétetett, kezdőpontnak pedig e vonalnak α_1-al jelzett végpontja. Ezen alapvonalra a szögök csúcsaiból függélyeseket bocsátunk, melyeket r e n d s z á l a k n a k (Ordinata) nevezünk, az alapvonalnak ezek által metszett megfelelő részei pedig m e t s z é k e k n e k (abscissae).

Azon szögök, melyek az alapvonalra függélyesen, valamint azzal párhuzamosan huzott vonalak által a sokszögben képeztetnek, s melyek a rendszálak és metszékek meghatározására szolgálnak, s ennélfogva s e g é d s z ö g ö k n e k is neveztetnek, részint a kerületen lévő, részint pedig derékszögök által a következö módon határozhatók meg:

1. $m=k$; de $k=180^0-\alpha_1$, tehát $m=180^0-\alpha_1$;

2. $\rho_1=\alpha_2-m=\alpha_2-180^0+\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2-180^0$
$=(\alpha_1+\alpha_2-2R)$

3. $n=R-\rho_1=R-(\alpha_1+\alpha_2-2R)=3R-(\alpha_1+\alpha_2)$

4. $\rho_2=\alpha_3-R-n=\alpha_3-R-\{3R-(\alpha_1+\alpha_2)\}$
$=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-4R$

5. $p=R-\rho_2=R-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+4R=5R-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$

6. $q=\alpha_4-p=\alpha_4-5R+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$
$=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)-5R$

7. $\rho_3=R-q=R-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)+5R$
$=6R-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$

8. $\rho_4=\alpha_5-\rho_3=\alpha_5-6R+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$
$=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)-6R$ sat.

Ebből eléggé tünik ki azon törvény, melyet egy nagyobb számu elemekből álló idom segédszögeinek leszármaztatásánál követnünk kell.

Az egyes pontok metszékeinek és rendszálainak meghatározásához csupán ρ_1, ρ_2, ρ_3 és ρ_4 szögökre lévén szükségünk csak ezeknek sinusait és cosinusait fogjuk levezetni, és pedig :

1. $sin.\ \rho_1=sin.\ (\alpha_1+\alpha_2-2R)$, melynek egyszerüsitése végett a következő ismeretes háromszögtani képlethez kell folyamodnunk :

$sin.\ (\alpha-\beta)=sin.\ \alpha.\ cos.\ \beta-sin.\ \beta.\ cos.\ \alpha.$

Ha ezen képletben α-át az 1. alatti egyenletből $(\alpha_1+\alpha_2)$-val, β-át pedig $2R$-el helyettesitjük, lesz : $sin.\ (\alpha_1+\alpha_2-2R)$ $=sin.\ (\alpha_1+\alpha_2).\ cos.\ 2R-sin.\ 2R.\ cos.\ (\alpha_1+\alpha_2)$; de miután $cos.\ 2R=-1$, $sin.\ 2R=0$: következik, hogy $sin.$ $(\alpha_1+\alpha_2-2R)=-sin.\ (\alpha_1+{}_2\alpha)$ és ugy tehát $sin.\ \rho_1=-$ $sin\ (\alpha_1+\alpha_2)$;

2. $sin.\ \rho_2=sin.\ (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-4R)$ és a fentebb mondottak szerint $sin\ \rho_2=sin.\ (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3).\ cos.\ 4R-sin.\ 4R.$

$cos. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = sin. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$, mert $cos. 4 R = 1$ és $sin. 4 R = 0$.

Hasonlóképen lesz:

3. $sin. \rho_3 = sin. [6 R-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)] = sin. 6 R. cos. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) - sin. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4). cos. 6 R = sin. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$, mert $sin. 6 R = 0$ és $cos. 6 R = -1$.

4. $sin. \rho_4 = sin. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 - 6 R) = - sin. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)$.

Ugyanezen módon származtatjuk le a cosinusokát is, u. m.:

1. $cos. \rho_1 = cos. [(\alpha_1+\alpha_2) - 2 R] = cos. (\alpha_1+\alpha_2). cos. 2 R + sin. (\alpha_1+\alpha_2). sin. 2 R = - cos. (\alpha_1+\alpha_2)$.

2. $cos. \rho_2 = cos. [(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) - 4 R] = cos. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3). cos. 4 R + sin. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3). sin. 4 R = cos. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$.

3. $cos. \rho_3 = cos. [6 R - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)] = cos. 6 R. cos. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) + sin. 6 R. sin. ({}_1\alpha+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) = - cos. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$.

4. $cos. \rho_4 = cos. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5 - 6 R) = cos. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5). cos. 6 R + sin. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5). sin. 6 R = - cos. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)$.

Az eképen leszármaztatott háromszögtani fügvényeket könnyebb áttekintés kedvéért következő két csoportba elrendezzük:

1. $sin. \alpha_1 = sin. \alpha_1$;
2. $sin. \rho_1 = - sin. ({}_1\alpha+\alpha_2)$;
3. $sin. \rho_2 = sin. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$;
4. $sin. \rho_3 = sin. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$;
5. $sin. \rho_4 = - sin. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)$.

1. $cos. \alpha_1 = - cos. \alpha_1$;
2. $cos. \rho_1 = - cos. (\alpha_1+\alpha_2)$;
3. $cos. \rho_2 = cos. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$;
4. $cos. \rho_3 = - cos. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$;
5. $cos. \rho_4 = - cos. (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)$.

Ezeknek segitségével már most az alapvonalra huzott függőlegesek és párhuzámosak által képezett derékszögü háromszögökből az egyes rendszálakat és metszékeket is kiszámithatjuk. A háromszögtan egyik ismeretes szabálya szerint ugyanis: „a befogó egyenlő az átfogónak az ezen befogóval szemközt fekvő szög sinusávali, vagy a mellette fekvő szög cosinusávali szorzatával" minél fogva:

1. Az első rendszál $\alpha_2 1 = a_1 . \sin. \alpha_1$.

2. A második rendszál $\alpha_3 2 = \alpha_3 b + b 2 = a_1 . \sin. \alpha_1 - a_2 . \sin. (\alpha_1 + \alpha_2)$; mert a második része t. i. $b 2 = \alpha_2 1 = a_1 . \sin. \alpha_1$, az első rész pedig az $\alpha_2 \alpha_3 b$ háromszögből kiszámittatik: $\alpha_3 b = a_2 . \sin. (\alpha_1 + \alpha_2)$.

3. A harmadik rendszál $\alpha_4 3 = \alpha_4 c + c 3 = \alpha_4 c + \alpha_3 2 = a_1 . \sin. \alpha_1 - a_2 . \sin. (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 . \sin. (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$.

A negyedik rendszál $\alpha_5 4 = \alpha_4 3 - \alpha_4 d = a_1 . \sin. \alpha_1 - a_2 . \sin. (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 . \sin. (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - a_4 . \sin. (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$.

Hasonló módon számitjuk ki a metszékeket is:

1. Az első metszék $\alpha_1 1 = a_1 . \cos. \alpha_1$.

2. A második metszék $\alpha_1 2 = 1 \ldots 2 - \alpha_1 1 = \alpha_2 b - \alpha_1 1 = a_1 . \cos. \alpha_1 - a_2 . \cos. (\alpha_1 + \alpha_2)$.

3. A harmadik metszék ($2 \ldots 3 = \alpha_3 c$) darabbal hosszabb az előbb kiszámitott második metszéknél, következőleg az ($\alpha_3 c = 2 \ldots . 3$) az utóbbihoz hozzáadandó, tehát $\alpha_1 3 = \alpha_1 2 + \alpha_3 c = a_1 . \cos. \alpha_1 - a_2 . \cos. (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 . \cos. (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$.

4. A negyedik metszék $\alpha_1 4 = \alpha_1 3 + 3 \ldots 4 = \alpha_1 3 + \alpha_5 d = a_1 . \cos. \alpha_1 - a_2 . \cos. (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3 . \cos. (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - a_4 . \cos. (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$ sat.

Jegyzék. Miután az előttünk fekvő 1-ső ábrában az a_6 vonalat alapvonalnak (metszéktengelynek), α_1-át pedig a derékszögü tengelyrendszer eredetének, azaz kezdőpontjának vettük: az ezen kezdőponttól jobbfelé eső metszékek tevőlegeseknek, a balfelé esők ellenben nemlegeseknek tekintendők;

épen igy vétetnek a metszéktengely felső oldalán lévő rendszálak tevőlegeseknek, ellenben annak alsó oldalán lévők nemlegeseknek. Innen magyarázható azon látszólagos ellentmondás, mely fentebb 2. alatt levezetett $\alpha_1\ 2 = a_1.\ cos.\ \alpha_1\ 1 - a_2\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2)$ képletben észlelhető. Itt ugyanis első tekintetre ugy látszik, mintha $\alpha_2\ b = -a_2.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2)$ mennyiség $\alpha_1\ 1 = a_1.\ cos.\ \alpha_1$ mennyiségből volna levonandó, holott a dolog természete, az idomot tekintve, épen az ellenkezőt kivánja, t. i.. hogy $(\alpha_1\ 1)$ az $(\alpha_2\ b)$-ből levonassék. Ezen látszólagos ellenmondás onnan ered, hogy az α_1 szögnek cosinusa nemleges jellegü lévén, ha a szintén nemleges tényezővel $(-a_1)$-val szoroztatik, a szorzatot tevőlegessé teszi. Tehát: $\alpha_1\ 2 = \alpha_2\ b - \alpha_1\ 1 = a_2 \times -\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2) - a_1 \times -\ cos.\ \alpha_1 = -a_2.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2) + a_1.\ cos.\ \alpha_1$ vagy közönségesen $a_1.\ cos.\ \alpha_1 - a_2.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2)$. Ebből kitetszik, hogy a tagok (szorzatok) összeadásának, vagy levonásának jellege mindenkor a sinusok és cosinusok helyezetétől függ.

Könnyebb áttekintés végett az egyes rendszálakat $y_1\ y_2\ y_3 \ldots$-val a metszékeket $X_1\ X_2\ X_3 \ldots$-val megjelölve, a fentebb 1, 2, 3. és 4. alatt eszközölt kiszámitások végeredményeit az alábbi két csoportba összeállitjuk.

1. $y_1 = a_1.\ sin.\ \alpha_1$;

2. $y_2 = a_1.\ sin.\ \alpha_1 - a_2.\ sin.\ (\alpha_1 + \alpha_2)$;

3. $y_3 = a_1.\ sin.\ \alpha_1 - \alpha_2.\ sin.\ (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3.\ sin.\ (\alpha_1 +_2 +_3)$;

4. $y_4 = a_1.\ sin.\ \alpha_1 - a_2.\ sin.\ (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3.\ sin.\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - a_4.\ sin.\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$.

1. $X_1 = a_1.\ cos.\ \alpha_1$;

2. $X_2 = a_1.\ cos.\ \alpha_1 - a_2.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2)$;

3. $X_3 = a_1.\ cos.\ \alpha_1 - a_2.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$.

4. $X_4 = a_1.\ cos.\ \alpha_1 - a_2.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - a_4.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)$.

E két csoportban eléggé világosan ki van fejezve azon szabály, melyszerint akár milyen számos oldalu idomnak ugy rendszálai, mint metszékei is kiszámithatók azon különbséggel, hogy tényezőkképen amott a sinusok, itt pedig a cosinusok szerepelnek. E mellett megjegyzendő, hogy az első pont rendszálának és metszékének értéke $= 0$.

Ha az α_1 α_2 α_3 háromszögben (lásd 2. ábrát) α_1 $\alpha_3 = a_3$ oldalt alapvonalnak vesszük, akkor az első rendszál, vagyis az α_2 pont rendszála $= a_1.\ sin.\ \alpha_1$, a második rendszál, vagyis az α_3 pont rendszála $= a_1.\ sin.\ \alpha_1 - a_2.\ sin.\ (\alpha_1 + \alpha_2) = 0$.

Ugyanezen háromszögben az első metszék : $a_1.\ cos.\ \alpha_1$, a második metszék : $a_1.\ cos.\ \alpha_1 - a_2.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2) = a_3$.

Egy négyszögben (lásd 3. ábrát) a harmadik rendszál : $a_1.\ sin.\ \alpha_1 - a_2.\ sin.\ (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3.\ sin.\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$,

a harmadik metszék : $a_1.\ cos.\ \alpha_1 - a_2.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = a_4$.

Egy ötszögben (lásd 4. ábrát) a negyedik rendszál : $a_1.\ sin.\ \alpha_1 - a_2.\ sin.\ (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3.\ sin.\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - a_4.\ sin.\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 0$,

a negyedik metszék : $a_1.\ cos.\ \alpha_1 - a_2.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2) + a_3.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - a_4.\ cos.\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = a_5$.

Ezek szerint tehát akárhány oldalu sokszög végső pontjának mind rendszála, mind metszéke egygyel kevesebb tagból áll, mint a hány oldala vagy szöge van az idomnak. Az egyes tagok jegyei akként változnak, hogy az első tevőleges, a második nemleges, a harmadik tevőleges, a negyedik ismét nemleges stb, tehát minden páratlan számu helyen álló tagnak jegye tevőleges, a páros számu helyen állóé pedig nemleges ugy a rendszálaknál, mint metszekeknél. Minden tag két tényezőből áll, melyeknek egyikét mindenkor a sokszögnek azon oldala képezi, mely a rendszálnak illetőleg metszéknek közvetlen szomszédságában fekszik, ugy hogy az első tag a sokszög első oldalát, a második tag annak második oldalát stb. bírja tényezőül; a tagok második tényezőjét képezi azon szögnek sinusa, illetőleg cosinusa, mely a rendszálat, illetőleg metszéket megelőző szögök összegéből áll. P. o. a négyszögnél a harmadik tag:

$a_3 . \cos. (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$.

Az itt előadottakból a sokszögtannak azon két főtantétele következik, miszerint:

a) Az utolsó pont rendszálának értéke akármely idomnál mindenkor egyenlő *0*-val.

b) Az utolsó pont metszéke akármely idomnál mindenkor egyenlö az alapvonallal.

E két főegyenletből már most leszármaztathatunk egy harmadik főegyenletet is, mely s sokszögtanban egy ismeretlen szögnek a többi adott elemekből való meghatározására szolgál.

Ha p. o. egy hatszögben (lásd 6-ik ábrát) minden oldal és minden szög, egy oldalnak és a mellette lévő két szögnek kivételével adva vagyon, akkor az ismeretlen α_1 szögöt ugy számithatjuk ki, ha a fentebbi két főegyenletből oly egyenletet alakitunk, melyben az ismeretlen a_6 oldal elő nem fordul. Ennek eszközlése végett az ismeretlen a_6 oldalt utolsónak, az első a_1 oldalt pedig alapvonalnak vesszük, s az idom ezen fekvésénél az utólsó α_1 pontnak rendszálát és metszékét kiszámitjuk.

A fentebbi tantételek szerint az előttünk fekvő idom utolsó rendszála, vagy is α_1 pontnak rendszála:

$a_2 . \sin. \alpha_2 - a_3 . \sin. (\alpha_2 + \alpha_3) + a_4 . \sin. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) -$ $a_5 . \sin. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + a_6 . \sin. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) = 0$, vagy pedig $- a_6 . \sin. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) = a_2 . \sin. \alpha_2 - a_3 . \sin.$ $(\alpha_2 + \alpha_3) + a_4 . \sin. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - a_5 . \sin. (+\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)$.

De miután $\sin. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + {}_5 + \alpha_6) = \sin. (720 - \alpha_1) = -$ $\sin. \alpha_1$ (mert a hatszög összes szögeinek összege 720^0 tesz), következőleg — $a_6 \times - sin. \alpha_1 = + a_6. sin. \alpha_1$; eszerint tehát: $a_6. sin. \alpha_1 = a_2. sin. \alpha_2 - a_3. sin. (\alpha_2 + \alpha_3) + a_4. sin. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - a_5\ sin. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)$ .... I.

Az utolsó (α_1) pontnak metszéke : $a_2. cos. \alpha_2 - a_3. cos. (\alpha_2 + \alpha_3) + a_4. cos. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - a_5. cos. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + a_6. cos. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) = a_1$ vagy pedig, ha ezen egyenlet első részének első négy tagját az ellenkező oldalra ellenkező jegygyel átvisszük, lesz :

$$a_6. cos. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) = a_1 - \{a_2\ cos. \alpha_2. - a_3. cos. (\alpha_2 + \alpha_3) + a_4. cos. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - a_5. cos. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)\}$$

De miután $cos. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) = cos. (720^0 - \alpha_1) = cos. \alpha_1$, ennélfogva, ha ez utóbbi mennyiséget (t. i. $cos. \alpha_1$) az egyenlet első részébe helyettesitjük, lesz :

$$a_6. cos. \alpha_1 = a_1 - [a_2\ cos. \alpha_2. - a_3. cos. (\alpha_2 + \alpha_3) + a_4\ cos. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - a_5. cos. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)] \ \ldots\ldots\ \text{II.}$$

Ha már most az I. alatti egyenletet a II. alatti egyenlettel elosztjuk, lesz :

$$\frac{a_6.\ sin.\ \alpha_1}{a_6.\ cos.\ \alpha_1} = \frac{a_2. sin. \alpha_2 - a_3. sin. (\alpha_2 + \alpha_3) + a_4. sin. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - a_5. sin. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)}{a_1 - [a_2. cos. \alpha_2 - a_3. cos. (\alpha_2 + \alpha_3) + a_4. cos. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - a_5. cos. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)]},$$

és mivel $\frac{a_6. sin. \alpha_1}{a_6. cos. \alpha_1} = tang.\ \alpha_1$, tehát :

$$tang\ \alpha_1 = \frac{\text{számláló} \left\{ \begin{array}{l} a_2. sin. \alpha_2 - a_3. sin. (\alpha_2 + \alpha_3) + a_4. sin. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \\ - a_5. sin. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \end{array} \right.}{\text{nevező} \left\{ \begin{array}{l} a_1 - [a_2. cos. \alpha_2 - a_3. cos. (\alpha_2 + \alpha_3) + a_4. cos. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \\ - a_5. cos. (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5).] \end{array} \right.}$$

Ezen képletet mely a sokszögtannak III-ik főtantételét magában foglalja s mely az idomhoz képest kitágitható, vagy röviditható, szavakban következőleg lehet kifejezni:

Az ismeretlen szögnek érintője egyenlő azon törttel, melynek számlálóját az idom utolsóelőtti pontjának rendszála, nevezőjét pedig ugyanezen pont metszékének az alapvonal értékéből való levonásából eredő külömbség képezi.

Ha tehát valamely sokszögben egy oldal és a mellette lévő két szög ismeretlen, azokat a fentebb kifejtett képletek szerint lehet kiszámitani. Ezen eset akkor áll be rendszerint, midőn a sokszög egyik oldala sem alkalmas alapvonalnak, s igy kényszeritve vagyunk az idom valamaly alkalmas két pontja közt huzandó ismeretlen átlót alapvonalul felhasználni.

Ilyen számitások gyakorlati kivételét a következő pontban fogjuk látni.

B) Gyakorlati eljárás.*)

Midőn egy nagyobb erdőterületnek határait (külső szegélyzetét) egy szögmérő segitségével felmérni, annak pontjait sokszögtanilag meghatározni, a papirra felhordani, és e területnek térfogatát kiszámitani akarjuk, következő eljárást kell követnünk.

1. Mindenekelőtt, miután az egyes határvonalak a természetben kiigazitattak, s megállapitattak, egy kézirajz készitessék, mely a terület alakját lehetőleg hiven ábrázolja.

2. Ezekután megméretnek a kerületen lévő szögök és vonalak. Ha a vonalak mérése lejtős területen eszközöltetik, akkor a lejtnek magassági és mélységi szögei is megmérendők és a valódi (ferde) távolságok méretei a vizszintes irányra leszállitandók.

3. Az ekképen megmért szögök és a vizszintességre visszavezetett távolságok méretei egy táblázatba bevezettetnek. A következő táblázatban az idemellékelt rajz (7 ábra) oldalainak és szögeinek méretei vannak foglalva. Az alábbi kiszámitások is mind ezen idomra vonatkoznak.

---

*) Ezen eljárás Winkler után van előadva. Lásd „Praktische Geometrie“ von Winkler. Seite 233.

A) Táblázati kimutatása

az n.........i erdő kerületén felvett szögögnek és vonalaknak. (Lásd a mellékelt rajz 7-ik ábráját).

A megmért				Az elméleti összegre kiigazitott és számitásba veendő		Az idom részei
kerületi vonalak		kerületi szögök				
jegyei	mértéke bécsi ölekben	jegyei	mértéke fokokban és perczekben		jegyei	
a_1	150,12	α_{1+I}	115° 28′	115° 27′	.	Első idomrész
a_2	119,61	α_2	124° 48′	124° 47′	α_2	
a_3	48,65	α_3	310° 17′	310° 15′	α_3	
a_4	180,53	α_4	79° 32′	79° 31′	α_4	
a_5	255,79	α_5	112° 30′	112° 29	α_5	
a_V	140,50	α_{6+VI}	83° 3′	83° 2′	α_{6+VI}	Második idomrész
a_{IV}	128,96	α_V	90° 13′	90° 12′	α_V	
a_{III}	140,09	α_{IV}	324° 30′	324° 28′	α_{IV}	
a_{II}	292,15	α_{III}	105° 4′	105° 3′	α_{III}	
a_I	204,39	α_{II}	94° 47′	94° 46′	α_{II}	
	Összeg .	.	1140° 12′	1440°	.	

4. Az összes megmért belső szögök összeadatnak és azoknak őszszege a sokszög elméleti öszegével összehasonlittatik. Ha a különbség nem nagyobb, mint az I. B. pontban megallapitott elkerülhetlen eltérésnek annyiszorosa, hány szöge van az illető idomnak, akkor ezen különbség az összes szögök között egyenlően felosztatik; ha azonban ezen különbség jóval nagyobb a megengedhető eltérések öszegénél, akkor ez jele annak, hogy a mérésben valahol tévedés történt, mely minden esetre a hely szinén megvizsgálandó és ezután kiigazitandó.

Ha a szögmérés oly műszerrel történik, melyen egyes perczek leolvashatók, akkor a különbségnek az előttünk álló 7-ik ábránál nem szabad $10.30 = 300$ másodpercznél, vagyis 5 percznél többre terjednie. A fentebbi táblázatban e különbség 12 perczet tesz, tehát nagyobb, mint tulajdonképen megengedve van; de e példa önkényesen lévén választva, a különség csupán a számitás egyszerüsitése végett vétetett nagyobbnak, nehogy annak a szögök közötti elosztása miatt az egyes szögökre eső másodperczekkel keljen a számitást eszközölni. Az érintett módon kiigazitott szögök a fenti táblázat megfelelő rovatába igtattatnak.

5. Ha kézirajzban ábrázolt terület idomjának van oly hoszabb oldala, melyet alapvonalnak lehet felhasználni, igen előnyös, hogy a rendszálakat ezen oldalra vonatkozólag kiszámitjuk, mert igy az ismeretlen szög meghatározására szolgáló kiszámitásokat elkerülhetjük s ez által a munkát jelentékenyen megröviditlietjük. Ellenkező esetben kénytelenek vagyunk az idomot annak legtávolabbi pontjait öszekötő egyenes vonal által két részre osztani, minden egyes szögöt és oldalt a számitáshoz szükséges betükkel megjelölvén, a mint ezt a például felvett 7-ik ábra mutatja. Az osztó vonal által melyet a rendszálak és metszékek kiszámitásánál mindkét idomrészre nézve közös alapvonalul felhasználunk, négy ismeretlen szög származik t. i. α_1 α_6 α_{VI} és α_I, melynek elsejét, α_1-át a III. alatti főegyenletből kiszámitjuk, a többit pedig az ismert $\alpha_{(1+I)}$ és α_{6+VI} szögökkel egyszerü levonás által nyerjük.

6. Hogy az ismeretlen α_1 szögöt kiszámithassuk, szükséges, hogy az egyes szögökből polygonometrikus összeget képezzünk, a mint ezt az imént emlitett főegyenlet kivánja, melyeket azután az alábbi *B*) táblázatnak 3-ik rovatába bevezetünk.

B) Táblázat a mellékelt rajz 7-ik ábrájához.

Az egyenlet egyes tagjainak számtani műtétjegyei	A szögök polygonometricus öszszegei: a szögök jegyei	A szögök polygonometricus öszszegei: a szögök mértéke fokokban és perczekben	Az előbbi rovatból leszármaztatott hegyes szögök és azok sinusai és cosinusai helyzetének megjelölése	sinus helyzete	cosinus helyzete	Az ismeretlen szög meghatározására szolgáló egyenlet egyes tagjainak logarithmikus kiszámitása	
+ +	α_2	124° 47'	180° 124° 47' 55° 13'	+	—	*log. sin.* 55°13' = 9.914510—10 *log.* 119,61 = 2.077768 +1.992278 = *log.* 98,24	*log. cos.* 55°13' = 9.756236—10 *log.* 119,61 = 2.077768 —1.834004 = *log.* 68,24
— —	$\alpha_2+\alpha_3$	310° 15' 435° 2'	435° 2' 360° 75° 2'	+	+	*log.* 48,65 = 1.687083 *log. sin.* 75° 2' = 9.985011—10 —1.627094 = *log.* 47,00	*log.* 48,65 = 1.687083 *log. cos.* 75°12' = 9.412052—10 —1.099135 = *log.* 12,56
+ +	$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$	79° 31' 514° 33'	540° 514° 33' 25° 27'	+	—	*log.* 180,53 = 2.256549 *log. sin.* 25°27' = 9.633189—10 +1.889738 = *log.* 77,58	*log.* 180,53 = 2.256549 *log. cos.* 25°27' = 9.955669—10 —2.212218 = *log.* 163,01
— —	$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$	112° 29' 627° 2'	627° 2' 540° 87° 2'	—	—	*log.* 255,79 = 2.407884 *log. sin.* 87° 2' = 9.999418—10 +2.407302 = *log.* 255,45	*log.* 255,79 = 2.407884 *log. cos.* 87° 2' = 8.713952—10 +1.121836 = *log.* 13,24

7. Miután a logarithmicus táblázatokban a függvények csupán 90^0-ig terjedő, vagyis az első negyedben fekvő szögök számára foglaltatnak, ennélfogva a szögök polygonometricus összegeit előbb hegyes szögökre leszármaztatni s ezeket a fentebbi táblázat 4-ik rovatába bevezetni szükséges. Evégett alakitjuk a (180^0)-nak annyi többesét, amint ezt az idom szögeinek száma követeli, jelen idomnál tehát 180, 360, 540, 720 fok. Ezen többesekből azután a fentebbi táblázat 3-ik rovatában foglalt polygonometricus összegek, vagy megforditva ezen összegekből a többesek vonatnak le, és pedig akképen, hogy a különbség 90 fokot soha meg nehaladja, a mint ez a táblázat 4-ik rovatából látható.

8. Hogy az ekképen nyert szögöknek megfelelő sinusok és cosinusok tevőleges vagy nemleges jellegét is a táblázat 5. és 6-ik rovatában megjelölhessük, kell, hogy az 5-ik ábrához folyamodjunk; ezen ábra szerint az első ($\alpha_2 = 55^0\ 13'$) szög a második negyedbe esvén, annak sinusa tevőleges, cosinusa nemleges, a második ($\alpha_2 + \alpha_3 = 75^0\ 2'$) szög az első negyedbe esvén, ugy sinusa mint cosinusa tevőleges, stb.

9. Az ismeretlen α_1 szög meghatározására szolgáló III-ik főegyenlet egyes tagjainak első tényezőit, az oldalakat az *A)* táblázat 2-ik rovatából, a szögök polygonometricus összegeit pedig, vagy is az egyenlet tagjainak második tényezőit a *B)* táblázat 4-ik rovatából helyettesitjük és ezeknek szorzatát az utóbbi táblázat utolsó rovatában logarithmusok segitségével eszközöljük.

Hogy pedig ezen számitásnál ugy a számláló, mint a nevező egyes tagjainak (+) és (—) jegyeit is biztosabban meghatározhassuk, a számláló és a nevező tagjainak számtani műtételi jegyeit az egyenletből a *B)* táblázat első rovatába átvisszük, ugy, hogy a felső jegy a sinusokra, az alsó pedig a cosinusokra vonatkozik. Ezen, nemkülönben a táblázat 5. és 6-ik rovatában foglalt jegyekből már most az utolsó rovatbeli szorzatok jegyei is meghatározhatók.

10. A számlálónak és nevezőnek a táblázat utolsó rovatában kiszámitott egyes tagjait a III-ik főegyenletbe helyettesitvén, lesz :

$$\frac{98{,}_{24} - 47{,}_{30} + 77{,}_{58} + 255{,}_{45}}{150{,}_{12} - (-68{,}_{24} - 12{,}_{56} - 163{,}_{01} + 13{,}_{24})} = \frac{384{,}_{27}}{380{,}_{69}} =$$

tang. α_1, vagy :

log. $384{,}_{27}$ — *log.* $380{,}_{69} = 2{,}_{584636} - 2{,}_{580571} = 0{,}_{004043} =$ *log. tang.* 45° 15′ 51″. A keresetett α_1 szög tehát 45° 15′ 51″-et tészen, melyet azonban egyszerübb számitás végett kereken 45° 16′-re kiegészithetünk. Az előttünk fekvő I-ső idomrész ismeretlen α_1 szöge ekképen kiszámitva lévén, a második ismeretlen, t. i. α_6 szögöt is megtaláljuk, ha az α_1 α_2 α_3 α_4 α_5 szögök összegét, az idomrész szögeinek összegéből 720°-ból levonjuk; tehát 720°—672° 18′ = 47° 42′ Hasonlóképen nyerjük a II-ik idomrész α_{I} és α_{VI} ismeretlen szögeit is, ha azokat az ismert α_{1+I} és α_{6+VI} szögökből levonjuk. Az *A)* táblázat szerint $\alpha_{1+I} = 115^0\,27'$, $\alpha_{6+VI} = 83^0\,2'$, tehát $\alpha_I = 115^0\,27' - 45^0\,16' = 70^0\,11'$; $\alpha_{VI} = 83^0\,2' - 47^0\,42' = 35^0\,20'$.

11. Miután már most mindkét idomrész összes szögei ismeretesek, hozzá foghatunk a rendszálak és metszékek meghatározásához is, arra pedig a fentebb *A*) pontban kifejtett I. és II. főegyenletet felhasználjuk, még pedig az I-sőt a rendszálak, a II-ikat a metszékek meghatározására. Az egyenletek egyes tagjainak tényezőit mindkét idomrészre nézve a fentebbi 4—9 pontokban előadott módon meghatározva, az alábbi *C)* táblázatba bevezetjük.

C) Táblázat a mellékelt

Az egyenlet egyes tagjainak számtani műtét jegyei	A szögök polygonometricus összegei: a szögök jegyei	a szögök mértéke fokokban és perczekben	Az előbbi rovatból leszármaztatott hegyes szögök s sinusaik és cosinusaik helyzetének megjelölése	sinus helyzete	cosinus helyzete
+	α_1	45° 16′	45° 16′	+	+
			180°		
		124° 47′	170° 3′		
−	$\alpha_1+\alpha_2$	170 3′	9° 57′	+	−
			540°		
		310° 15′	480° 18′		
+	$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$	480° 18′	59° 42′	+	−
			559° 49′		
		79° 31′	540°		
−	$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$	559° 49′	19° 49′	−	−
			720°		
		112° 29′	672° 18′		
+	$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5$	672° 18′	47° 42′	−	+
+	α_I	70° 11′	70° 11′	+	+
			180°		
		94° 46′	164° 57′		
−	$\alpha_I+\alpha_{II}$	164° 57′	15° 3′	+	−
			270°		
		105° 3′	180°		
+	$\alpha_I+\alpha_{II}+\alpha_{III}$	270°	90°	−	0
			594° 28′		
		324° 28′	540°		
−	$\alpha_I+\alpha_{II}+\alpha_{III}+\alpha_{IV}$	594° 28′	54° 28′	−	−
			720°		
		90° 12′	684° 40′		
+	$\alpha_I+\alpha_{II}+\alpha_{III}+\alpha_{IV}+\alpha_V$	684° 40′	35° 20′	−	+

rajz 7-ik ábrájához.

A metszékek és rendszálak meghatározására szolgáló egyenlet egyes tagjainak logaritmikus kiszámitása.

log.	150, 12	=2.176439	*log.*	150, 12	=2.176439
log. sin.	45° 16′	=9.851497—10	*log. cos.*	45° 16′	=9.847454—10
		+2.027936=*log.* 106,64			+2.023893=*log.* 105,66
log.	119, 61	=5.077767	*log.*	119, 61	=2.077767
log. sin.	9° 57	=9.237515—10	*log. cos.*	9° 57′	=9.993418—10
		—1.315182=*log.* 20,67			+2.071185=*log.* 117,81
log.	48, 65	=1.687083	*log.*	48, 65	=1.687083
log. sin.	59° 42′	=9.936210—10	*log. cos.*	59° 42′	=9.702885—10
		+1.623195=*log.* 42,00			—1.389968=*log.* 24,55
log.	180, 53	=2.256549	*log.*	180, 53	=2.256549
log. sin.	19° 49′	=9.530215—10	*log. cos.*	19° 49′	=9.973489—10
		+1.786764=*log.* 61,20			+2.230038=*log.* 169,84
log.	255, 79	=2.407884	*log.*	255, 79	=2.407884
log. sin.	47° 42′	=9.869015—10	*log. cos.*	47° 42′	=9.828023
		—2.276899=*log.* 189,19			+2.235907=*log.* 172,15
log.	204, 39	=2.310460	*log.*	204, 39	=2.310460
log. sin.	70° 11′	=9.973489—10	*log. cos.*	70° 11′	=9.530215—10
		+2.283949=*log.* 192,29			+1.840675=*log.* 69,29
log.	292, 15	=2.465606	*log.*	292, 15	=2.465606
log. sin.	15° 3′	=9.414408—10	*log. cos.*	15° 3′	=9.984842—10
		—1.880014=*log.* 75,86			+2.450448=*log.* 282,13
log.	140, 09	=2.146407			
log. sin.	90°	=9.000000			
		—2.146407=*log.* 140,09			140,09×*cos.* 90°=140.09
log.	128, 96	=2.110455	*log.*	128, 96	=2.110455
log. sin.	54° 28′	=9.910506—10	*log. cos.*	54° 28′	=9.764308—10
		+2.020961=*log.* 104,95			+1.874763=*log.* 74,95
log.	140, 50	=2.147676	*log.*	140, 50	=2.147676
log. sin.	35° 20′	=9.762177—10	*log. cos.*	35° 20′	=9.911584—10
		—1.909853=*log.* 31,26			+2.059260=*log.* 114,62

12. A fentebbi táblázat utolsó rovatában foglalt szorzatokat, melyek a rendszálak és metszékek egyes részeit kifejezik, a megfelelőleg röviditett két főegyenletbe helyettesítve, azoknak összeadása, illetőleg levonása által nyerjük az egész rendszálakat és metszékeket. Igy például az I-ső idomrész α_3 pontjának rendszála: $y_2 = a_1 . sin. \alpha_1 - a_2 . sin. (\alpha_1 + \alpha_2) = 106,_{64} - 20,_{67} = 85,_{97}$; ugyanezen pont metszéke $X_2 = a_1 . cos. \alpha_1 - a_2 . cos. (\alpha_1 + \alpha_2) = 105,_{66} + 117,_{81} = 223,_{47}$.

Mindkét idomrész rendszálainak és metszékeinek egyes alkatrészei, valamint az egész rendszálak és metszékek is a 421. lapon következő *D)* táblázatba átnézetesen összeállittatnak.

13. Ha az idom szögei és oldalai teljes pontossággal volnának megmérhetők, akkor az I-ső főegyenlet szerint az idom utolsó rendszála értékének 0-val egyenlőnek kellene lennie; ez azonban a megelőző szakaszban elősorolt elkerülhetlen eltérések miatt igen ritkán fordul elő s rendesen a 0-tól különböző, csekély mennyiséget kapunk eredményül, mely az idomnak tökéletes berekesztése végett, a rendszálak egyes részeire aránylagosan felosztandó, a mennyiben az a körzővel egyátalában még megmérhető.

Ezen külömbség például az első idomrésznél — $0,_{02}$ tesz, mert az utolsó rendszál a fentebbi táblázat szerint: $(106,_{64} - 20,_{67} + 42,_{00} + 61,_{20}) - 189,_{19} = 189,_{17} - 189,_{19} = - 0,_{02}$ mely mennyiség nem jelentékenysége miatt ugyan — mert kisebbitett mértékben körzővel meg sem mérhető — de azért, hogy a kiigazitás módja szemlélhetővé tétessék, osztatott el az 1-ső és 4-ik rendszál részei között. Ezen kiigazitást, ha t. i. különbség merül fel, a metszékek alkatrészei is igénylik.

Miután az $\alpha_{I+I}\ \alpha_{6+VI}$ alapvonal mindkét idomrészszel közös, könnyen megfogható, hogy annak mindkét idomrészből kiszámitott hossza a II-ik főegyenlet szerint kell, hogy egymással egyenlő

D) Táblázat a mellékelt rajz 7-ik ábrájához.

Az idom pontjainak jegyei	Az eredetileg kiszámitott				A kiigazitott				A térfogat tényezői		Az előbbi tényezők alapján kiszámitott térfogat (a tényezők szorzata) ☐ ölekben
	részei		egész		részei		egész		alapvonal (metszékek egyes részei)	magasság (a rendszálak)	
	a rendszálaknak	a metszékeknek	rendszálak	metszékek	a rendszálaknak	a metszékeknek	rendszálak	metszékek			
					Első idomrész.						
α_1	0,00	0,00	—	—	—	—	—	—	—	—	—
α_2	+106,64	+105,66	106,64	105,66	+106,65	+105,67	106,65	105,67	105,67	$\frac{106,65}{2}$	5634,85
α_3	— 20,67	+117,81	85,97	223,47	— 20,67	— 117,82	85,98	223,49	117,82	$\frac{106,35 \quad 85,98}{2}$	11347,83
α_4	+ 42,00	— 24,55	127,97	198,92	+ 42,00	— 24,55	127,98	198,94	— 24,55	$\frac{85,98 \quad 127,98}{2}$	— 2626,36
α_5	+ 61,20	+169,84	189,17	368,76	+ 61,21	+169,85	189,19	368,79	169,85	$\frac{127,98 \quad 189,19}{2}$	21935,66
α_6	—189,19	+172,15	— 0,02	540,91	—189,19	+172,16	0,00	540,95	172,16	$\frac{189,19}{2}$	16235,48
					Második idomrész.						
α_{I}	0,00	0,00	—	—	—	—	—	—	—	—	–
α_{II}	+192,29	+ 69,29	192,29	69,29	+192,28	+ 69,28	192,28	69,28	69,28	$\frac{192,28}{2}$	6660,58
α_{III}	— 75,86	+282,13	116,43	351,42	— 75,86	+282,12	116,42	351,40	282,12	$\frac{192,28 \quad 116,42}{2}$	43545,20
α_{IV}	—140,09	0,00	— 23,66	351,42	—140,10	0,00	— 23,68	351,40	0, 0	$\frac{116,42-23,68}{2}$	0,00
α_{V}	+104,95	+ 74,95	81,29	426,37	+104,94	+ 74,94	81,26	426,34	74,94	$\frac{81,26-23,68}{2}$	2157,52
α_{VI}	+ 81,26	+114,62	0,03	540,99	— 81,26	+114,61	0,00	540,95	114,61	$\frac{81,26}{2}$	4656,60
									Összes térfogat . .		109597,36

legyen. Ha tehát a két idomrész elemeiből kiszámított eredmény nem egyenlő, akkor a különbség a metszék (alapvonal) részei között felosztandó, mint ez a renszálaknál is történt és a fentebbi táblázatból kivehető. Jelen ábránkban az első idomrész

alapvonala . . . . $= 540{,}_{91}$,
a második idomrészé . . . . $= 540{,}_{99}$,
a különbség tehát . . . . $= 0{,}_{08}$,

melynek fele a kiegyenlités végett az első eredményhez hozzá adatott, a másodikból levonatott. E szerint a kiigazitott alapvonal $540{,}_{95}$ ölet tészen. A $0{,}_{04}$ ölet tevő különbség a metszék négy hoszabb alkatrészére egyenlően felosztatott.

14. Az előttünk fekvő 7-ik ábrára tekintve, láthatjuk, hogy annak térfogata az egyes metszékrészek és rendszálak által képezett háromszögök és dülényekből (trapez) áll, melyeknek alapvonalát az egyes metszékrészek, magasságát pedig a rendszálak képezik, melyeket a *D*) táblázat 10-ik és 11-ik rovatába, szorzataikat a 12-ik rovatba összeállitva, az utóbbiak összegéből az egész idom térfogatát nyerjük. Megjegyzendő azonban, hogy oly háromszögök vagy dülények, melyek más nagyobbakban fekszenek, az utóbbiakból levonandók.

(Vége köv.)