Normális eloszlású minták számtani középértékeinek és szórásának egyszerűbb számítása

ROXER EGON

Az erdészeti kutatásokban, de a tervezőmunkák során is gyakran szükség van arra, hogy mért adatok, pl. a fák mellmagassági átmérőinek, magasságainak stb. számtani középértékét és szórását számítsuk. Az említett munkák során vizsgált adathalmazok, kivételes esetektől eltekintve, közel normális eloszlásúak. A tanulmány célja, hogy az ilyen közel normális eloszlású adathalmazokból vett mérési sorozatok számtani középértékének és szórásának számításához egyszerű módszereket nyújtson, és ezek mellett az irodalomban elfogadott 95%-os biztonsági szint (Prodan, 1961.) követelményeinek is eleget tegyünk.

Egy normális eloszlású mérési sorozat nagyság szerint rendezve

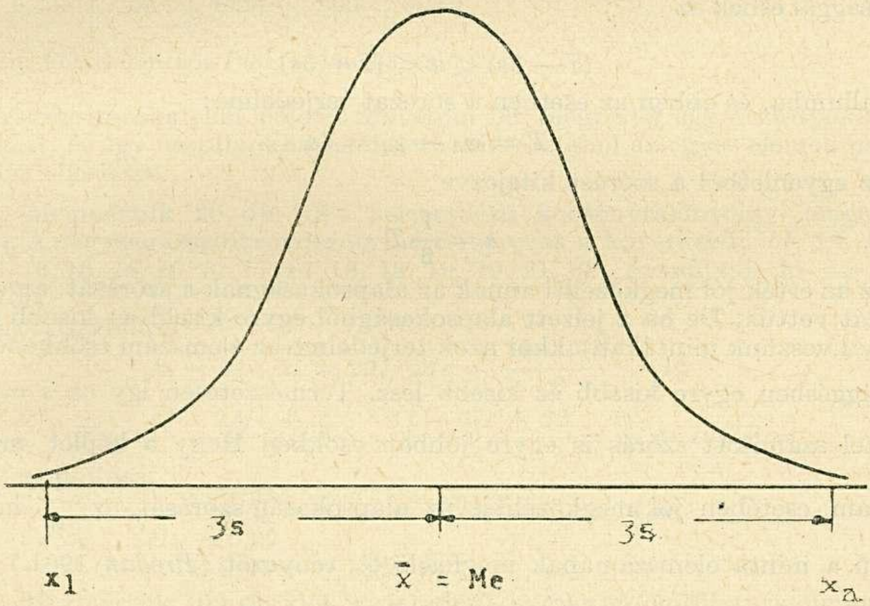
$$x_1, x_2, \dots Me, \dots x_n \tag{1}$$

alakban áll rendelkezésünkre. Ha a sorozat elemszáma elég nagy ($n > 300$), akkor a középső értéke a medián (Me) közel egyenlő a számtani középértékkel ($\bar{x}$)

$$Me \approx \bar{x} \tag{2}$$

és a sorozat első (x_1) és utolsó elemének (x_n) számtani átlaga (osztályba rendezett mintánál az első és utolsó osztályközép számtani átlaga) szintén megközelíti az $\bar{x}$ számtani közepet:

$$\frac{x_1 + x_n}{2} \approx \bar{x} \tag{3}$$



N ($\bar{x}$;s) eloszlású n > 300 elemszámú sokaság sűrűségfüggvénye

Ha azonban a sorozat elemszámát csökkentjük, romlik a sorozat szimmetriája és a fenti összefüggések külön-külön megbízhatatlanabbakká válnak. A két megfontolást egyesítve és a megbízhatóbb Me értéket kétszeres súllyal figyelembe véve, az alábbi képlet írható fel:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + 2Me + x_n}{4} \tag{4}$$

amely kis- és nagyszámú mintánál egyaránt gyorsan és a megkívánt 95%-os biztonsággal adja a minta számtani középértékét.

Osztályokba nem rendezett minták esetében x_1 = az első elem, x_n = az utolsó elem.

Me = a középső érték, az az x érték, amely két egyenlő számú részre osztja a nagyság szerint rendezett mintát. Páratlan elemszám esetében a középső, páros esetében pedig a két középső elem számtani átlaga adja a medián értéket (Me).

Osztályokba rendezett minták esetében viszont x_1 = a legkisebb osztályközép, a legnagyobb osztályközepet pedig x_n helyett x_k-val jelöljük.

$$Me = x_0 + d\frac{\frac{n}{2} - n_b}{f_j} \tag{5}$$

ahol az x_0 az az osztályhatár, amely a mintát két közel egyenlő részre bontja, d az osztályköz, $\frac{n}{2}$ a minta elemszámának fele, n_b az x_0-tól balra (lefelé) eső elemek száma, f_j az x_0-tól jobbra (felfelé) eső szomszédos osztály gyakorisága.

A szórás közelítő számítása:

Egy $n > 300$ elemszámú normális eloszlású mérési sorozat elemei 99,7%-os biztonsággal esnek az

$$(\bar{x} - 3s) < x < (\bar{x} + 3s) \tag{6}$$

intervallumba, és ebben az esetben a sorozat terjedelme:

$$T = x_n - x_1 = 6s \tag{7}$$

Az egyenletből a szórást kifejezve

$$s = \frac{1}{6}T \tag{8}$$

Ez az érték jól megközelíti annak az alapsokaságnak a szórását, amelyből a mintát vettük. De ha a jelzett alapsokaságból egyre kisebb és kisebb elemszámmal veszünk mintákat, akkor azok terjedelme az elemszám csökkenésével összefüggésben egyre kisebb és kisebb lesz. Természetesen így az $s = \frac{1}{6} \cdot T$ képlettel számított szórás is egyre jobban csökken Hogy a képlet minden elemszám esetében jól megközelítse az alapsokaság szórását, az $\frac{1}{6}$ helyett célszerű a minta elemszámának megfelelő C_n tényezőt (*Prodan* 1961.) használni,

$$s = T \cdot C_n \tag{9}$$

Ezzel a képlettel gyorsan, 95%-os biztonsággal (Prodan 1961.) számíthatjuk kis- és nagymintából az alapsokaság szórását.

Ha a mérési sorozat elemei ismertek, akkor

$$T = x_n - x_1 \qquad (10)$$

Ha az osztályokba rendezett mérési sorozatok elemei nem állnak rendelkezésre, akkor

$$T = x_k - x_1 + \frac{d}{2} \qquad (11)$$

ahol $\frac{d}{2}$ = az osztályköz fele.

A C_n értéket a mérési sorozat elemszámának megfelelően az *I. táblázatból* írjuk ki. (Prodan, 1961. p. 100. 48. tábl.)

I. táblázat

Az $s = T \cdot C_n$ képletben szereplő C_n tényező a minta elemszámának függvényében (Prodan [1961] után, ha a valószínűségi szint $P \leq 5\%$)

n	c_n	n	c_n	n	c_n
2	1,100	12	0,321	60	0,214
3	0,620	15	0,295	70	0,208
4	0,505	20	0,271	80	0,203
5	0,440	25	0,258	90	0,200
6	0,410	30	0,247	100	0,198
7	0,383	35	0,238	150	0,186
8	0,363	40	0,231	200	0,180
9	0,348	45	0,226	300	0,171
10	0,335	50	0,221	600	0,160

(Prodan: Forstbiometrie 1961. p. 100. 48. tábl.)

II. táblázat

109 db idős sarjeredetű kocsánytalantölgy 8 osztály szerint rendezett mellmagassági átmérői

i	x_i	f_i
1	20	2
2	24	9
3	28	20
4	32	27
5	36	25
6	40	15
7	44	9
8	48	2
		109

A számításokat két példán mutatom be, mégpedig egy osztályokba nem rendezett, és egy osztályokba rendezett mintán, ahol az egyes elemek nem állnak rendelkezésre.

1. Megmértük 20 db idős sarjeredetű kocsánytalantölgy magasságát m-ben. A nagyság szerint rendezett mérési sorozat a következő: *11*, 13, 14, 15, 15, 15, 16, 16, *16*, *16*, 17, 17, 17, 18, 18, 19, 19, 21, *22*. Számítsuk ki az $\bar{x}$ és s mutatóit.

Az $\bar{x}$ érték számítása:

$$x_1 = 11\,;\; x_n = 22\,;\; Me = \frac{16 + 16}{2} = 16$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + 2Me + x_n}{4} = \frac{11 + 32 + 22}{4} = \frac{65}{4} = 16{,}25\ m$$

Az „s" számítása.

$x_n = 22$; $x_1 = 11$; $T = x_n - x_1 = 22 - 11 = 11$ m

$n = 20 \ldots C_n \approx 0{,}27$

$s = T \cdot C_n = 11 \cdot 0{,}27 = \pm\ 2{,}97\ m$

2. Megmértük 109 db idős sarjeredetű kocsánytalantölgy mellmagassági átmérőit cm-ben. A mérési adatokat a *II. táblázat* szerint osztályokba rendeztük.

Az „$\bar{x}$" érték számítása:

$$x_0 = 34;\; d = 4;\; \frac{n}{2} = 54{,}5;\; n_b = 58;\; f_j = 25$$

$$Me = x_0 + d = \frac{\frac{n}{2} - n_b}{f_j} = 34 + 4\,\frac{54{,}5 - 58}{25} = 34 - \frac{14}{25} = 33{,}44 \text{ cm}$$

$$x_1 = 20;\; x_k = 48;$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + 2Me + x_k}{4} = \frac{20 + 66{,}88 + 48}{4} = 33{,}72 \text{ cm}$$

Az „s" számítása:

$$x_1 = 20;\; x_k = 48;\; \frac{d}{2} = 2;\; n = 109$$

$$T = x_k = x_1 + \frac{d}{2} = 48 - 20 + 2 = 30;\; C_{100} = 0{,}198$$

$$s = T \cdot C_n = 30 \cdot 0{,}198 = \pm\, 5{,}94$$

Mindkét képletet sokszorosan ellenőriztem, és az erdészeti kutató és tervező munkánál előforduló közel normális eloszlású minták „$\bar{x}$" és „s" mutatóinak számítására igen alkalmasnak találtam 95%-os biztonsággal, egyetlen esetben sem tapasztaltam lényeges eltérést.

IRODALOM

Dr. Michail Prodan: Forstliche Biometrie. BLV Verlagsgesellschaft München, Bonn, Wien, 1961.

Роксер Э.: УПРОЩЕННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СРЕДНИХ ВЕЛИЧИН И РАССЕИВАНИЯ ПРОБ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

В статье автор публикует два приема, требующих мало вычислений для исчисления арифметических средних величин и рассеивания данных, изученных при лесохозяйственных исследовательских и планировочных работах. Один прием служит для исчисления данных, рассортированных по классам, а другой для нерассортированных.

Roxer E.: VEREINFACHTE BERECHNUNG DER ARITHMETISCHEN MITTELWERTE UND DER STREUUNG VON MUSTERN MIT NORMALVERTEILUNG.

Zwei Verfahren werden mitgeteilt, durch die mit wenig Rechenarbeit die Berechnung des arithmetischen Mittelwerts und der Streuung von Datenanhäufungen mit nahezu normaler Verteilung möglich wird. Die Notwendigkeit der Prüfung solcher Datenanhäufungen zeigt sich bei den forstlichen Forschungs- und Planungsarbeiten. Je nach dem, ob die Daten in Klassen geordnet worden sind oder nicht, kann das eine oder das andere Verfahren angewandt werden.

Szukacsov akadémikus magas kitüntetése. A Szovjetunió Legfelső Tanácsának Elnöksége 80. születésnapja alkalmából a biológiai tudományok fejlesztésében elért kimagasló eredményeiért *V. N. Szukacsov* akadémikust Lenin-renddel, a Szocialista Munka Hőse címmel, valamint a Sarló és Kalapács aranyéremmel tüntette ki. Szukacsov a legnagyobb szovjet tudós-biológus, az általános erdőművelés, a növényföldrajz, a növényrendszertan és geológia elismert szaktekintélye. Az élőtermészet komplex tanulmányozásával foglalkozó új tudományág, a biogeocönológia megalapítója. Számos nagyjelentőségű erdészeti expedíciót vezetett, tanszékeket, laboratóriumokat, kísérleti erdőgazdaságokat szervezett, valamint létrehozta és hosszú időn át vezette a Szovjetunió Tudományos Akadémiája Erdészeti Intézetét.

Szukacsov akadémikust, a szovjet növényföldrajzi iskola vezetőjét magas kitüntetése alkalmából köszöntik magyarországi tisztelői is.

(A Lesznoje Hozjajsztvo 1965. évi 7. száma közlése alapján: *dr. Keresztesi Béla.*)