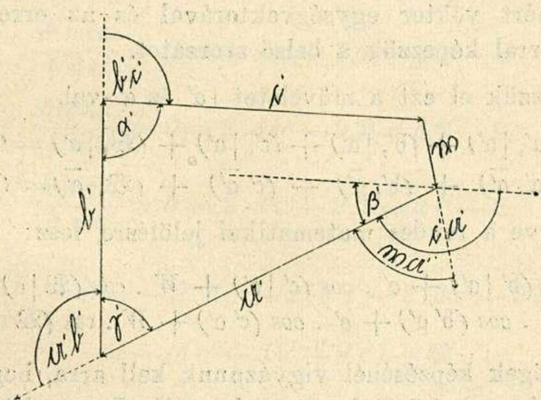
Vektoriális kiegyenlítés.*

Irta: Sébor János, egyetemi nyilv. rk. tanár.

(Befejező közlemény.)

Vegyünk fel most három pontot, vagyis egy háromszöget, megmértük mind a három szöget és mind a három oldalt. Mértünk tehát három irányértéket.

A három megmért szöget összeadjuk és a 180°-tól való eltérést egyenlően elosztjuk a három szögre, azaz szögzárlatot létesítünk. Ha most az így kiegyenlített szögekkel képezzük a három iránymértéket és az egyes irányokra a lemért hosszakat felhordjuk, akkor látni fogjuk, hogy a háromszögünk nem zár, hanem kapunk egy $\mathfrak{W}$ hibavektort.



70.

7. ábra.

Kellene, hogy a háromszög zárjon, tehát a javított vektorok esetében fenn kell álljon a következő egyenlet:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = 0$$

e helyett a megmért értékekből a következő egyenletet írhatom fel:

$$\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}' + \mathfrak{W} = 0 \; \ldots\ldots\ldots \; \mathrm{I.}$$

* A Soproni Nyári Egyetem keretében tartott előadás.

A kiegyenlített értékeket vonás nélkül, a mért értékeket pedig vonással jelöltem.

Minden egyes megmért oldalt javítanom kell egy kis értékkel, tehát kell, hogy legyen:

$$\mathfrak{a}' + d\,\mathfrak{a}' = \mathfrak{a};\ \mathfrak{b}' + d\,\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} \text{ és } \mathfrak{c}' + d\,\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}$$

tehát $\mathfrak{a}' + d\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' + d\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}' + d\mathfrak{c}' = 0$, mivel $\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}' = -\mathfrak{W}$ lesz:

$$d\,\mathfrak{a}' + d\,\mathfrak{b}' + d\,\mathfrak{c}' - \mathfrak{W} = 0 \ldots\ldots\ldots \text{II.}$$

Itt a kiegyenlítésnél tehát egy feltételhez kötött minimummal van dolgunk, mert a javítások négyzetei összegének minimumnak kell lenniök, de ki kell elégíteniök ezenkívül még a II. alatti egyenletet is.

A mathematikában tanult szabályok szerint tehát felírhatjuk az így tovább fejlesztett minimumfeltételt. Lesz:

$$(d\mathfrak{a}', d\mathfrak{a}') + (d\mathfrak{b}', d\mathfrak{b}') + (d\mathfrak{c}', d\mathfrak{c}') - 2\,(d\mathfrak{a}' + d\mathfrak{b}' + d\mathfrak{c}' - \mathfrak{W}, \mathfrak{L}) = Min.$$

ahol $\mathfrak{L}$ a korreláta vektort jelenti.

A $\mathfrak{W}$ érték számítható az I. egyenletből. Bármelyik ismert, tehát megmért vektor egységvektorával és az erre merőleges egységvektorral képezzük a belső szorzatot.

Végezzük el ezt a műveletet $|\mathfrak{a}'$ és $\overline{\mathfrak{a}'}$-val.

$$(\mathfrak{a}', |\mathfrak{a}') + (\mathfrak{b}', |\mathfrak{a}') + (\mathfrak{c}', |\mathfrak{a}') + (\mathfrak{W}, |\mathfrak{a}') = 0$$

$$(\mathfrak{a}', \overline{\mathfrak{a}'}) + (\mathfrak{b}', \overline{\mathfrak{a}'}) + (\mathfrak{c}' \overline{\mathfrak{a}'}) + (\mathfrak{W}, \overline{\mathfrak{a}'}) = 0$$

Áttérve a rendes matematikai jelölésre, lesz:

$$b'\,.\,cos\,(\mathfrak{b}'\,|\,\mathfrak{a}') + c'\,.\,cos\,(\mathfrak{c}'\,|\,\mathfrak{a}') + W\,.\,cos\,(\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{a}) = 0$$

$$a' + b'\,.\,cos\,(\mathfrak{b}'\,\mathfrak{a}') + c'\,.\,cos\,(\mathfrak{c}'\,\mathfrak{a}') + W\,.\,cos\,(\mathfrak{W}\,\mathfrak{a}) = 0$$

A szögek képzésénél vigyáznunk kell arra, hogy a szögek mindig a vektorok közötti szöget jelentik. Lesz tehát:

$$(\mathfrak{b}'\,\mathfrak{a}')\sphericalangle = 180^0 + \gamma;\quad (\mathfrak{c}'\,\mathfrak{a}')\sphericalangle = 180^0 - \beta';$$

$$(\mathfrak{b}'\,|\,\mathfrak{a}')\sphericalangle = (\mathfrak{b}'\,\mathfrak{a}') + 90^0 = 270^0 + \gamma;$$

$$(\mathfrak{c}'\,|\,\mathfrak{a}')\sphericalangle = (\mathfrak{c}'\,\mathfrak{a}') + 90^0 = 270^0 - \beta.$$

$$(\mathfrak{W}\,|\,\mathfrak{a})\sphericalangle = 90^0 + (\mathfrak{W}\,\mathfrak{a}).$$

Az előbbi két egyenlet tehát írható ilyen alakban is:

$$W.sin\,(\mathfrak{W}\,\mathfrak{a}) = b'.sin\,\gamma - c'.sin\,\beta = s$$

$$W.cos\,(\mathfrak{W}\,\mathfrak{a}) = -a' + b'.cos\,\gamma + c'.cos\,\beta = p.$$

Most már számítható a ($\mathfrak{W}\,\mathfrak{a}$) szög, ha a két egyenletünket osztjuk egymással:

$$tg(\mathfrak{W}\,\mathfrak{a}) = \frac{s}{p}$$

és a W hosszának az értéke, ha a két egyenletet négyzetre emeljük és összeadjuk, lesz:

$$W = \sqrt{s^2 + p^2}$$

Ugyanígy számíthatjuk ellenőrzésül ezt a két értéket még, ha a fenti I. vektoros egyenletünket felbontjuk $|\mathfrak{b}'$ és $\overline{\mathfrak{b}'}$, illetve $|\mathfrak{c}'$ és $\overline{\mathfrak{c}'}$ szerint.

Ismerve a W ellenmondás skalárértékét, visszatérhetünk a minimumfeltétel megfejtésére. Négy ismeretlenünk van, ha tehát a minimumegyenletünket sorba differenciáljuk az ismeretlenek szerint és nullával tesszük egyenlővé, kapjuk a négy normál egyenletünket. Lesz:

$$\frac{\delta\, min.}{\delta\, d\,\mathfrak{a}'} = 0 = 2.\,d\,\mathfrak{a}' - 2.\mathfrak{L} = d\mathfrak{a}' - \mathfrak{L}$$

$$\frac{\delta\, min.}{\delta\, d\,\mathfrak{b}'} = 0 = 2.\,d\,\mathfrak{b}' - 2.\mathfrak{L} = d\,\mathfrak{b}' - \mathfrak{L}$$

$$\frac{\delta\, min.}{\delta\, d\,\mathfrak{c}'} = 0 = 2.\,d\,\mathfrak{c}' - 2.\mathfrak{L} = d\,\mathfrak{c}' - \mathfrak{L}$$

$$\frac{\delta\, min.}{\delta\, \mathfrak{L}} = 0 = -2.\,d\,\mathfrak{a}' - 2.\,d\,\mathfrak{b}' - 2.\,d\,\mathfrak{c}' + 2\mathfrak{W} =$$

$$= -(d\,\mathfrak{a}' + d\,\mathfrak{b}' + d\,\mathfrak{c}') + \mathfrak{W}.$$

Az utolsó egyenletbe behelyettesítjük a $d\,\mathfrak{a}'$, $d\,\mathfrak{b}'$, $d\,\mathfrak{c}'$ értékét, lesz:

$$-3.\mathfrak{L} + \mathfrak{W} = 0 \text{ tehát: } \mathfrak{L} = \frac{\mathfrak{W}}{3} = d\,\mathfrak{a}' = d\,\mathfrak{b}' = d\,\mathfrak{c}'.$$

Vektorokról áttérve skalár értékekre, felbontjuk a vektoros egyenletünket úgy, hogy képezzük a belső sorozatot $\overline{\mathfrak{L}}$ és $|\mathfrak{L}$-el, lesz:

$$(\mathfrak{L}, \overline{\mathfrak{L}}) = \frac{1}{3}(\mathfrak{W}, \overline{\mathfrak{L}}).$$

$(\mathfrak{L}, |\mathfrak{L}) = \frac{1}{3}(\mathfrak{W}, |\mathfrak{L}) = 0$ ebből az egyenletből következik, hogy $\mathfrak{W}$ és $|\mathfrak{L}$ merőlegesek egymásra, tehát $\mathfrak{W}$ és $\mathfrak{L}$ párhuzamosak egymással.

Az első egyenletet felírva a megszokott matematikai alakban, lesz: $|L = \frac{1}{3} . W$ és mivel az irányuk egyenlő $\mathfrak{L} = \frac{1}{3}\mathfrak{W}$.

Ugyanígy, mivel $\mathfrak{L} = d\mathfrak{a}'$ felbontva $\overline{\mathfrak{L}}$ és $|\mathfrak{L}$ szerint, lesz:
$(\mathfrak{L}, \overline{\mathfrak{L}}) = (d\mathfrak{a}', \overline{\mathfrak{L}})$.
$(\mathfrak{L}, |\mathfrak{L}) = (d\mathfrak{a}', |\mathfrak{L}) = 0$ tehát a javítások iránya is párhuzamos a W irányával. Az első egyenletből számítható az L:

$$\mathfrak{L} = d\mathfrak{a}' = \frac{1}{3}\mathfrak{W} = d\mathfrak{b}' = d\mathfrak{c}'.$$

Látjuk, hogy a gyakorlatban a kisebb pontosságú méréseknél a záróhibával párhuzamos irányban való grafikus kiigazítás elméletileg teljesen helyes.

A hossz és szögjavítások kiszámítására írjuk fel az előzőkben már levezetett $d\mathfrak{a}'$ javítási vektor egyenletét.

$$d\mathfrak{a}' = da' . \overline{\mathfrak{a}'} + a' . |d\overline{\mathfrak{a}'}| . |\mathfrak{a}' = \frac{1}{3}\mathfrak{W}$$

$$d\mathfrak{b}' = db' . \overline{\mathfrak{b}'} + b' . |d\overline{\mathfrak{b}'}| . |\mathfrak{b}' = \frac{1}{3}\mathfrak{W}$$

$$d\mathfrak{c}' = dc' . \overline{\mathfrak{c}'} + c' . |d\overline{\mathfrak{c}'}| . |\mathfrak{c}' = \frac{1}{3}\mathfrak{W}$$

sorba felbontjuk $\overline{\mathfrak{a}'}$, $|\mathfrak{a}'$ illetve $\overline{\mathfrak{b}'}$, $|\mathfrak{b}'$ és $\overline{\mathfrak{c}'}$, $|\mathfrak{c}'$ szerint:

$$da' . \sin(\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}') + a' . |d\overline{\mathfrak{a}'}| . \sin(|\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}') = \frac{1}{3} . W . \sin(\mathfrak{W}\,\mathfrak{a}')$$

$$da' . \cos(\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}') + a' . |d\overline{\mathfrak{a}'}| . \cos(|\mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}') = \frac{1}{3} . W . \cos(\mathfrak{W}\,\mathfrak{a}')$$

$$db' . \sin(\mathfrak{b}'\,\mathfrak{b}') + b' . |d\overline{\mathfrak{b}'}| . \sin(|\mathfrak{b}'\,\mathfrak{b}') = \frac{1}{3} . W . \sin(\mathfrak{W}\,\mathfrak{b}')$$

$$db' . \cos(\mathfrak{b}'\,\mathfrak{b}') + b' . |d\overline{\mathfrak{b}'}| . \cos(|\mathfrak{b}'\,\mathfrak{b}') = \frac{1}{3} . W . \cos(\mathfrak{W}\,\mathfrak{b}')$$

$$dc' . \sin(\mathfrak{c}'\,\mathfrak{c}') + c' . |d\overline{\mathfrak{c}'}| . \sin(|\mathfrak{c}'\,\mathfrak{c}') = \frac{1}{3} . W . \sin(\mathfrak{W}\,\mathfrak{c}')$$

$$d c' . \cos (\mathfrak{c}' c') + c' . \,|\,\overline{d \mathfrak{c}'}\,|\, . \cos (\,|\,\mathfrak{c}' c') = \frac{1}{3} . W . \cos (\mathfrak{W} \mathfrak{c}')$$

Ezek az egyenletek írhatók a következő egyszerűbb alakban is.

$$-a' . \,|\, \overline{d \mathfrak{a}'} \,|\, = \frac{1}{3} . W . \sin (\mathfrak{W} \mathfrak{a}')$$

és ebből

$$|\, \overline{d \mathfrak{a}'} \,|'' = - \frac{206265}{3 . a'} . W . \sin (\mathfrak{W} \mathfrak{a}')$$

$$-b' . \,|\, \overline{d \mathfrak{b}'} \,|\, = \frac{1}{3} . W . \sin (\mathfrak{W} \mathfrak{b}')$$

és ebből

$$|\, \overline{d \mathfrak{b}'} \,|'' = - \frac{206265}{3 . b'} . W . \sin (\mathfrak{W} \mathfrak{b}')$$

$$-c' . \,|\, \overline{d \mathfrak{c}'} \,|\, = \frac{1}{3} . W . \sin (\mathfrak{W} \mathfrak{c}')$$

és ebből

$$|\, \overline{d \mathfrak{c}'} \,|'' = - \frac{206265}{3 . c'} . W . \sin (\mathfrak{W} \mathfrak{c}')$$

$$d \mathfrak{a}' = \frac{1}{3} . W \cos (\mathfrak{W} \mathfrak{a}') = L . \cos (\mathfrak{W} \mathfrak{a}')$$

$$d \mathfrak{b}' = \frac{1}{3} . W \cos (\mathfrak{W} \mathfrak{b}') = L . \cos (\mathfrak{W} \mathfrak{b}')$$

$$d \mathfrak{c}' = \frac{1}{3} . W \cos (\mathfrak{W} \mathfrak{c}') = L . \cos (\mathfrak{W} \mathfrak{c}')$$

Mivel irányértékeket számitottunk, javítani pedig szögeket akarunk, azért lesz:

$$d\alpha'' = |\, \overline{d \mathfrak{b}'} \,|'' - |\, \overline{d \mathfrak{c}'} \,|''$$

$$d\beta'' = |\, \overline{d \mathfrak{c}'} \,|'' - |\, \overline{d \mathfrak{a}'} \,|''$$

$$d\gamma'' = |\, \overline{d \mathfrak{a}'} \,|'' - |\, \overline{d \mathfrak{b}'} \,|''$$

Vegyünk fel egy példát. A példában fölöslegesen sok tizedessel számolok, hogy a számítás menete jobban érzékelhető legyen.

Mért oldalak	Mért szögek	$-\frac{1}{3}W$	Javított szögek
$a' = 112.574$	$\alpha' = 72^0\,43'\,26''$	$+\ 9''$	$\alpha'' = 72^0\,43'\,35''$
$b' = 91.973$	$\beta' = 51^0\,16'\,14''$	$+\ 9''$	$\beta'' = 51^0\,16'\,23''$
$c' = 97.728$	$\gamma' = 55^0\,59'\,53''$	$+\ 9''$	$\gamma'' = 56^0\,00'\,02''$
	$179^0\,59'\,33''$	$+\ 27''$	$180^0\,00'\,00''$
	$-\,180^0\,00'\,00''$		
	$W = \ -27''$		

A számításhoz szükséges szögek képzése:

$$(\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}') = 123^0\,59'\,58''$$
$$(\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}') = 107^0\,16'\,25''$$
$$(\mathfrak{c}'\,\mathfrak{a}') = 128^0\,43'\,37''$$
$$360^0\,00'\,00''$$

Számítjuk a W és $(\mathfrak{W}\,\mathfrak{a}')$ és ebből a $(\mathfrak{W}\,\mathfrak{b}')$ és $(\mathfrak{W}\,\mathfrak{c}')$ szögek értékét.

$$b'\,.\,sin\,\gamma'' - c'\,.\,sin\,\beta'' = s = +\,0{\cdot}0084115126$$
$$-\,a' + b'\,.\,cos\,\gamma'' + c'\,.\,cos\,\beta'' = p = -\,0{\cdot}0045122035$$
$$W = \sqrt{s^2 + p^2} = 0{\cdot}009545 \text{ és } L = \frac{1}{3}\,.\,W = 0{\cdot}003182$$
$$tg\,(\mathfrak{W}\mathfrak{a}') = \frac{s}{p} = -\,1{\cdot}8641696$$
$$(\mathfrak{W}\,\mathfrak{a}') = 118^0\,12'\,37{\cdot}9''$$
$$(\mathfrak{W}\,\mathfrak{b}') = 242^0\,12'\,35{\cdot}9''$$
$$(\mathfrak{W}\,\mathfrak{c}') = 349^0\,29'\,00{\cdot}9''$$
$$d\,a' = L\,.\,cos\,(\mathfrak{W}\,\mathfrak{a}') = -\,0{\cdot}001504$$
$$d\,b' = L\,.\,cos\,(\mathfrak{W}\,\mathfrak{b}') = -\,0{\cdot}001484$$
$$d\,c' = L\,.\,cos\,(\mathfrak{W}\,\mathfrak{c}') = +\,0{\cdot}003129$$
$$|\,d\,\overline{\mathfrak{a}'}\,|'' = -\,\frac{1}{a'}\,.\,206265\,.\,L\,.\,sin\,(\mathfrak{W}\,\mathfrak{a}') = -\,5{\cdot}14''$$
$$|\,d\,\overline{\mathfrak{b}'}\,|'' = -\,\frac{1}{b'}\,.\,206265\,.\,L\,.\,sin\,(\mathfrak{W}\,\mathfrak{b}') = +\,6{\cdot}31''$$
$$|\,d\,\overline{\mathfrak{c}'}\,|'' = -\,\frac{1}{c'}\,.\,206265\,.\,L\,.\,sin\,(\mathfrak{W}\,\mathfrak{c}') = +\,1{\cdot}23''$$
$$d\alpha'' = |\,d\,\overline{\mathfrak{b}'}\,|'' - |\,d\,\overline{\mathfrak{c}'}\,|'' = +\,5{\cdot}08''$$
$$d\beta'' = |\,d\,\overline{\mathfrak{c}'}\,|'' - |\,d\,\overline{\mathfrak{a}'}\,|'' = +\,6{\cdot}37''$$
$$d\gamma'' = |\,d\,\overline{\mathfrak{a}'}\,|'' - |\,d\,\overline{\mathfrak{b}'}\,|'' = -\,11{\cdot}45''$$
$$0{\cdot}00$$

Megmért oldal	Javítás	Kiegyenlített oldal	Szögek az első javítás után	Javítás	Kiegyenlített szögek
$a' = 112{\cdot}574$	$-0{\cdot}001504$	$112{\cdot}572496$	$\alpha' = 72^0\,43'\,35''$	$+\ 5{\cdot}14''$	$\alpha = 72^0\,43'\,40{\cdot}14''$
$b' = 91{\cdot}973$	$-0{\cdot}001484$	$91{\cdot}971516$	$\beta' = 51^0\,16'\,23''$	$+\ 6{\cdot}31''$	$\beta = 51^0\,16'\,29{\cdot}31''$
$c' = 97{\cdot}728$	$+0{\cdot}003129$	$97{\cdot}731129$	$\gamma' = 56^0\,00'\,02''$	$-\ 11{\cdot}45''$	$\gamma = 55^0\,59'\,50{\cdot}55''$
			$180^0\,00'\,00''$	$0{\cdot}00$	$180^0\,00'\ 0{\cdot}00''$

A kiegyenlítés helyességéről meggyőződhetünk a sinus tétel alkalmazásával. A következő egyenlőségeket ki kell elégíteniök a kiegyenlített értékeknek.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\log a = 2{\cdot}0514323 \qquad \log b = 1{\cdot}9636533 \qquad \log c = 1{\cdot}9900329$$

$$\log\sin\alpha = 9{\cdot}9799602 \qquad \log\sin\beta = 9{\cdot}8921811 \qquad \log\sin\gamma = 9{\cdot}9185608$$

A hányadosok:

$$\log\text{-}a = 2{\cdot}0714721 \qquad = 2{\cdot}0714722 \qquad = 2{\cdot}0714721$$

Az előzőkben tárgyalt eljárásnál feltételeztük, hogy a szögmérésünk és a hosszmérésünk egyenlő pontosságú, tehát egyenlő súlyú volt. Ez nem teljesen helyes, mert hisz a szögmérést és hosszmérést más-más műszerrel és egymástól függetlenül végeztük. A két érték egymáshoz viszonyított pontossága, tehát súlya is más. Vegyük a szögek súlyát p^2_k és a hosszak súlyát g^2_k -tel egyenlőnek.

A hosszváltozás és irányváltozás súlyára nézve a következőket kell megjegyeznünk. A hosszmérés középhibáját *Jordán* szerint írhatjuk a következő alakban:

$$m_a = c\sqrt{a}$$

A g^2_k súly tehát fordítottan aránylik az a értékéhez.

A szögméréseket rendesen ugyanazzal a műszerrel, ugyanaz a megfigyelő, ugyanolyan körülmények között végzi, tehát középhibáikat minden további nélkül egyenlőnek vehetjük fel. Jelöljük m_ω-val. Az irányváltozás ívértéke lineárisan nő az oldalhosszal. A súlya p^2_k tehát fordítottan aránylik az a^2_k értékhez. A g^2_k és p^2_k közötti összefüggést könnyen felállíthatjuk, ha az előbbiek szerint meggondoljuk, hogy g^2_k törve p^2_k -el egyenesen arányos az a_k értékkel. Lesz:

$$\frac{1}{g^2_k} = c^2 . a_k \quad \text{és} \quad \frac{1}{p^2_k} = m^2_\omega . a^2_k$$

ahol c Jordán szerint $= +0{\cdot}015$ és $m_\omega = +0{\cdot}5'$

Számítsuk ki a $d\mathfrak{a}'$ skalár értékét:

$$(d\mathfrak{a}', d\mathfrak{a}') = (d\alpha' . \bar{\mathfrak{a}} + a' . d\omega . |\mathfrak{a}, d\alpha' . \bar{\mathfrak{a}} + a' . d\omega . |\mathfrak{a}) =$$
$$= (d\,a')^2 + (a' . d\,\omega)^2 = |d\,\mathfrak{a}'|^2$$

Ha az előbbi meggondolás alapján kiszámított súlyokat behozom, akkor lesz:

$$g^2_k . (d\,a')^2 + p^2_k\,(a'\,d\,\omega)^2$$

Ezeknek a javítási értékeknek kell most már a minimumát számítanom, figyelembe véve a mellékfeltételt, azt tudniillik, hogy a javítások összegének egyenlőnek kell lenni az ellenmondással. Lesz:

$$(g_a . d\,a' . \bar{\mathfrak{a}}' + p_a . a' . |d\,\bar{\mathfrak{a}}'| . |\mathfrak{a}', g_a . d\,a' . \bar{\mathfrak{a}}' + p_a . a' . |d\,\bar{\mathfrak{a}}'| . |\mathfrak{a}') +$$
$$+ (g_b . d\,b' . \bar{\mathfrak{b}}' + p_b . b' . |d\,\bar{\mathfrak{b}}'| . |\mathfrak{b}', g_b . d\,b' . \bar{\mathfrak{b}}' + p_b . b' . |d\,\bar{\mathfrak{b}}'| . |\mathfrak{b}') +$$
$$+ (g_c . d\,c' . \bar{\mathfrak{c}}' + p_c . c' . |d\,\bar{\mathfrak{c}}'| . |\mathfrak{c}' . g_c . d\,c' . \bar{\mathfrak{c}}' + p_c . c' . |d\,\bar{\mathfrak{c}}'| . |\mathfrak{c}') -$$
$$- 2(d\,\mathfrak{a}' + d\,\mathfrak{b}' + d\,\mathfrak{c}' - \mathfrak{W}, \mathfrak{L}) = Min.$$

Hét ismeretlenünk van, tehát hét normálegyenletet kell felállítanunk. Lesznek a normálegyenleteink:

$$\frac{\delta\,Min.}{\delta\,d\,a'} = 0 \qquad \frac{\delta\,Min.}{\delta(a' . |d\,\bar{\mathfrak{a}}'|)} = 0$$
$$\frac{\delta\,Min.}{\delta\,d\,b'} = 0 \qquad \frac{\delta\,Min.}{\delta(b' . |d\,\bar{\mathfrak{b}}'|)} = 0$$
$$\frac{\delta\,Min.}{\delta\,d\,c'} = 0 \qquad \frac{\delta\,Min.}{\delta(c' . |d\,\bar{\mathfrak{c}}'|)} = 0$$
$$\frac{\delta\,Min.}{\delta\,\mathfrak{L}} = 0$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket, lesz:

$$\left.\begin{array}{l}
(g_a . \bar{\mathfrak{a}}', g_a . d\,a' . \bar{\mathfrak{a}}' + p_a . a' . |d\,\bar{\mathfrak{a}}'| . |\mathfrak{a}') - (\bar{\mathfrak{a}}', \mathfrak{L}) = 0 \\
(g_b . \bar{\mathfrak{b}}', g_b . d\,b' . \bar{\mathfrak{b}}' + p_b . b' . |d\,\bar{\mathfrak{b}}'| . |\mathfrak{b}') - (\bar{\mathfrak{b}}', \mathfrak{L}) = 0 \\
(g_c . \bar{\mathfrak{c}}', g_c . d\,c' . \bar{\mathfrak{c}}' + p_c . c' . |d\,\bar{\mathfrak{c}}'| . |\mathfrak{c}') - (\bar{\mathfrak{c}}', \mathfrak{L}) = 0
\end{array}\right\} \dots\dots\dots \mathrm{III.}$$

$$\left.\begin{array}{l}
(p_a . |\mathfrak{a}', g_a . d\,a' . \bar{\mathfrak{a}}' + p_a . a' . |d\,\bar{\mathfrak{a}}'| . |\mathfrak{a}') - (|\mathfrak{a}', \mathfrak{L}) = 0 \\
(p_b . |\mathfrak{b}', g_b . d\,\mathfrak{b}' . \bar{\mathfrak{b}}' + p_b . b' . |d\,\bar{\mathfrak{b}}'| . |\mathfrak{b}') - (|\mathfrak{b}', \mathfrak{L}) = 0 \\
(p_c . |\mathfrak{c}', g_c . d\,\mathfrak{c}' . \bar{\mathfrak{c}}' + p_c . c' . |d\,\bar{\mathfrak{c}}'| . |\mathfrak{c}') - (|\mathfrak{c}', \mathfrak{L}) = 0
\end{array}\right\} \dots\dots\dots \mathrm{IV.}$$

$$d\,a' . \bar{\mathfrak{a}}' + a' . |d\,\bar{\mathfrak{a}}'| . |\mathfrak{a}' + d\,b' . \bar{\mathfrak{b}}' + b' . |d\,\bar{\mathfrak{b}}'| . |\mathfrak{b}' +$$
$$+ d\,c' . \bar{\mathfrak{c}}' + c' . |d\,\bar{\mathfrak{c}}'| . |\mathfrak{c}' - \mathfrak{W} = 0 \dots\dots\dots \mathrm{V.}$$

Elvégezve a III és IV. egyenletekben a skalár szorzatokat és rendes matematikai alakra hozva, nyerjük a da, db, dc és az $a'.|d\mathfrak{a}'|, b'.|d\mathfrak{b}'|, c'.|d\mathfrak{c}'|$ értékeket mint az L és $(\mathfrak{a}'\mathfrak{L})$, illetve $(\mathfrak{b}'\mathfrak{L}), (\mathfrak{c}'\mathfrak{L})$ szövegek függvényét.

$$\left.\begin{aligned} d\,a' &= \frac{1}{g^2_a}.L.\cos(\mathfrak{a}'\mathfrak{L}) \\ d\,b' &= \frac{1}{g^2_b}.L.\cos(\mathfrak{b}'\mathfrak{L}) \\ d\,c' &= \frac{1}{g^2_c}.L.\cos(\mathfrak{c}'\mathfrak{L}) \end{aligned}\right\} .\mathrm{VI.} \quad \left.\begin{aligned} a'.|d\,\mathfrak{a}'| &= \frac{1}{p^2_a}.L.\sin(\mathfrak{a}'\mathfrak{L}) \\ b'.|d\,\mathfrak{b}'| &= \frac{1}{p^2_b}.L.\sin(\mathfrak{b}'\mathfrak{L}) \\ c'.|d\,\mathfrak{c}'| &= \frac{1}{p^2_c}.L.\sin(\mathfrak{c}'\mathfrak{L}) \end{aligned}\right\} ..\mathrm{VII.}$$

Ezeket az értékeket helyettesítjük az V. egyenletbe.

$$\frac{1}{g^2_a}.L.\cos(\mathfrak{a}'\mathfrak{L}).\overline{\mathfrak{a}'}+\frac{1}{p^2_a}.L.\sin(\mathfrak{a}'\mathfrak{L}).|\mathfrak{a}'+\frac{1}{g^2_b}.L.\cos(\mathfrak{b}'\mathfrak{L}).\overline{\mathfrak{b}'}+$$
$$+\frac{1}{p^2_b}.L.\sin(\mathfrak{b}'\mathfrak{L}).|\mathfrak{b}'+\frac{1}{g^2_c}L.\cos(\mathfrak{c}'\mathfrak{L}).\overline{\mathfrak{c}'}+$$
$$+\frac{1}{p^2_c}.L.\sin(\mathfrak{c}'\mathfrak{L}).|\mathfrak{c}'-W.\overline{\mathfrak{W}}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{VIII.}$$

A W értékét és $(\mathfrak{a}'\mathfrak{W})$, $(\mathfrak{b}'\mathfrak{W})$ és $(\mathfrak{c}'\mathfrak{W})$ szögeket ugyanúgy számítjuk, mint ahogy azt a súlyok nélküli feladatunkban számítottuk.

Most már csak az L, $(\mathfrak{a}'\mathfrak{L})$, $(\mathfrak{b}'\mathfrak{L})$ és $(\mathfrak{c}'\mathfrak{L})$ értékeket kell számítanunk.

Mivel $(\mathfrak{a}'\mathfrak{L})\sphericalangle = (\mathfrak{a}'\mathfrak{W})\sphericalangle + (\mathfrak{W}\mathfrak{L})\sphericalangle$ számítjuk a $(\mathfrak{W}\mathfrak{L})$ szög értékét. Hogy ezt az értéket nyerjük, képezzük a VIII. egyenlet belső szorzatát $|\mathfrak{W}$-vel.

Rövidebb jelölés kedvéért, mivel az $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ és $\mathfrak{c}'$-re nézve mindig három-három értéket kell összegeznünk, az összegezést [ ] jellel fogom jelölni és $\mathfrak{k}$ jelöli sorban az $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ és $\mathfrak{c}'$ értékeket. Lesz:

$$\left[\frac{1}{g^2_k}.L.\cos(\mathfrak{k}\mathfrak{L}).(\bar{\mathfrak{k}},|\mathfrak{W})+\frac{1}{p^2_k}.L.\sin(\mathfrak{k}\mathfrak{L}).(|\mathfrak{k},|\mathfrak{W})\right]-W.(\overline{\mathfrak{W}},|\mathfrak{W})=0$$

$$\left[-\frac{1}{g_{2k}}.L.\cos(\mathfrak{k}\mathfrak{L}).\sin(\mathfrak{k}\mathfrak{W})+\frac{1}{p^2_k}L.\sin(\mathfrak{k}\mathfrak{L}).\cos(\mathfrak{k}\mathfrak{W})\right]=0$$

Mivel $(\mathfrak{k}\mathfrak{L})=(\mathfrak{k}\mathfrak{W})+(\mathfrak{W}\mathfrak{L})$ lesz:

$$\left[-\frac{1}{g^2_k}.L.\{\cos(\mathfrak{k}\mathfrak{W}).\cos(\mathfrak{W}\mathfrak{L})-\sin(\mathfrak{k}\mathfrak{W}).\sin(\mathfrak{W}\mathfrak{L})\}.\sin(\mathfrak{k}\mathfrak{W})+\right.$$

$$+\frac{1}{p^2_k}L.\{sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W}).cos(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})+cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W}).sin(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})\}.cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})\Big]=0$$

$$-L.\left[\frac{sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W}).cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})}{g^2_k}\right].cos(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})+L.\left[\frac{sin^2(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})}{g^2_k}\right].sin(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})+$$

$$+L.\left[\frac{sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W}).cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})}{p^2_k}\right].cos(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})+L.\left[\frac{cos^2(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})}{p^2_k}\right].sin(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})=0$$

$$sin(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L}).\left[\frac{1}{p^2_k}+\left(\frac{1}{g^2_k}-\frac{1}{p^2_k}\right).sin^2(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})\right]-$$

$$-cos(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})\left[\left(\frac{1}{g^2_k}-\frac{1}{p^2_k}\right).sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W}).cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})\right]=0$$

$$tg(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})=\frac{\left[\left(\frac{1}{g^2_k}-\frac{1}{p^2_k}\right).sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W}).cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})\right]}{\left[\frac{1}{p^2_k}+\left(\frac{1}{g^2_k}-\frac{1}{p^2_k}\right).sin^2(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})\right]}.$$

A ($\mathfrak{W}\,\mathfrak{L}$) szög most már számítható.

Az L értékének kiszámítására képezzük a VIII. egyenlet belső szorzatát $\overline{\mathfrak{W}}$-vel.

$$\left[\frac{1}{g^2_k}.L.cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{L}).(\bar{\mathfrak{k}},\overline{\mathfrak{W}})+\frac{1}{p^2_k}.L.sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{L}).(|\mathfrak{k}\,\overline{\mathfrak{W}})\right]-W.(\overline{\mathfrak{W}},\overline{\mathfrak{W}})=0$$

$$\left[\frac{1}{g^2_k}.L.cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{L}).cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})+\frac{1}{p^2_k}.L.sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{L}).sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})\right]-W=0$$

$$\Big[\frac{1}{g^2_k}.L.\{cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W}).cos(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})-sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W}).sin(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})\}.cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})+$$

$$+\frac{1}{p^2_k}.L\,\{sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W}).cos(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})+cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W}).sin(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})\}.sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})\Big]=W$$

$$L.\left[\frac{cos^2(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})}{g^2_k}\right].cos(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})-L.\left[\frac{sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W}).cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})}{g^2_k}\right].sin(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})+$$

$$+L\left[\frac{sin^2(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})}{p^2_k}\right].cos(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})+L.\left[\frac{sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W}).cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})}{p^2_k}\right].sin(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})=W$$

$$L=\frac{W}{\left[\frac{1}{p^2_k}+\left(\frac{1}{g^2_k}-\frac{1}{p^2_k}\right).cos^2(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})\right].cos(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})-}$$

$$\frac{1}{-\left[\left(\frac{1}{g^2_k}-\frac{1}{p^2_k}\right).sin(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W}).cos(\mathfrak{k}\,\mathfrak{W})\right].sin(\mathfrak{W}\,\mathfrak{L})}$$

Ismerve most már az L értékét is, a javítások számíthatók a VI. és VII. egyenletekből.

Irodalom, amelyben a vektor számítás a geodéziában nyer alkalmazást:

Schreiber. Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen, 1908. Das Pothenot'sche Problem in vektor-analytischer Behandlung.

Hammer. Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen, 1922. Vektorielle und Rechenschieber Auflösung trigonometrischer Aufgaben.

Faltus. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, 1927. Graphische Fehlerrechnung mit Anwendung von Williot-Plänen.

Friedrich. Neue Grundlagen und Anwendungen der Vektorrechnung. 1921. Könyv.

Friedrich. Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen, 1927. Ueber Punktgenauigkeit.

Schumann. Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen, 1926. Vektoranalytischer Ausgleich geschlossener geodätischer Figuren in der Ebene.

Schumann. Wiener Akademie der Wissenschaften 1927. Über vektorischen Ausgleich geschlossener geodätischer Figuren in der Ebene im Falle beliebiger Gewichte für Strecken und Richtungen.

Schumann. Mitteilungen aus dem Markscheidewesen, 1927. Beitrag zum vektorischen Ausgleich ebener geodätischer Netze bei Verschiedenheit der Gewichte für Strecken und Richtungen.

Schumann. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1929. Über Gewichtsbestimmung und Fehler-Quadratsumme bei gemischten Messungen.

Schumann. Wiener Akademie der Wissenschaften. 1929. Vektorische Ausgleichungen eines ausgemessenen Dreiecks.

Schumann. Wiener Akademie der Wissenschaften. 1930, 1932. Untersuchung über den vektorischen Ausgleich von Dreiecksnetzen I. II. und III. Mitteilung.

Schumann. Festschrift Eduard Dolezal. 1932. Über Schwerpunktbeziehungen bei einem fehlerzeigenden Vielecke.

Schumann. Mitteilungen aus dem Markscheidewesen. 1930. Vektorische Ausgleichungen bei merfachem Bogenschitt.

Schumann. Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen. 1932. Uebereinanderlegen von Dreiecksnetzen.

Baeschlin. Schweitzerische Zeitschrift für Vermessungswesen. 1928. Einführung in die vektorische Ausgleichung.

Schrutka. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen. 1927. Vektorische Darstellung der Theorie des Polarplanimeters.

Basch. Wiener Akademie der Wissenschaften. 1928. Die Fehlertensoren und das Fehlerübertragungsgesetz der vektoralgebraischen Elementaroperationen.

Basch. Festschrift Eduard Dolezal. 1932. Zur Fehlertheorie der Verbindungsgeraden geodätisch ermittelter Punkte.

Basch. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 1928. Fehlertensoren und Fehlerübertragung.

Basch. Wiener Akademie der Wissenschaften. 1929. Fehlertensoren. Fehleraffinoren und allgemeine Fehlerübertragungsgesetze.

Basch. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 1929. Viktorische Fehlertheorie und geodätische Fehlerübertragung.

Basch. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen. 1931. Die Vektorgleichung für das Rückwärtseinschneiden in der Ebene.

Ulbrich, Sébor. Erdészeti kísérletek. 1929. Kettősen tájékozott sokszögvonalak kiegyenlítése vektor-analitikus számításokkal.

Ulbrich, Sébor. A soproni m. kir. Bányamérnöki és Erdőmérnöki Főiskola bányászati és kohászati osztályának közleményei. 1931. Numerische Studie über Auswahl und Ausgleich von Dreieckskketten.

Ulbrich. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 1930. Allgemeine mathematische Theorie der Umfahrungsplanimeter in vektor-analitischer Darstellung.

Ulbrich. Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen. 1930. Rückwärtseinschneiden in vektor-analytischer Darstellung.

Ulbrich. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen. 1931. Grundlagen der Vektorrechnung und ihre Anwendung auf geodätische Probleme.

Sébor. Festschrift Eduard Dolezal. 1932. Die Aufgabe des unzugänglichen Abstandes, (Hansen-Problem) in vektor-analytischer Behandlung.

Walek. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen. 1933. Anwendung der Vektorrechnung auf die Snellius'sche Dreiecksaufgabe.

Rosak. Deutsche Zeitschrift für Vermessungswesen. 1937. Vektorischer Ausgleich eines angeschlossenen, symetrischen Kranzes.

Reimann. Térképészeti Közlöny. II. kötet. 1932—1933. A Hansen-féle pontkapcsolás vektoranalítikai megoldása.

*

Vektorischer Ausgleiche. Von Prof. J. *Sébor.* (Schluss.)

In der Geodesie bedeutet jede gemessene Linie eine gerichtete Strecke, es ist also zweckmässig sich des vektorialen Rechnungsverfahrens zu bedienen, besonderes bei den Ausgleichsrechnungen.

Verf. bespricht vor allem die Grundformeln des vektorischen Ausgleichs in der Ebene und erläutert das Verfahren, nach welchem die bei den — zwecks Feststellung der gegenseitigen Lage von zwei Punkten vorgenommenen — „*n*“ Messungen auftretenden Abweichungen vektorisch auszugleichen sind. Nachher werden die bei der Bestimmung von 3 Punkten, bzw. ihrer gegenseitigen Lage sich ergebenden wahrscheinlichsten richtigen Werte berechnet uzw. zuerst mit gleichen, dann mit verschiedenen Gewichten. Ersterer Fall wird auch mit einem Zahlenbeispiel beleuchtet.

*

Compensation vectorielle, par le Professeur J. *Sébor.* (Fin.)

Après l'exposé des formules fondamentales, l'Auteur fait connaître en détail la compensation vectorielle des erreurs dans le cas où l'on a exécute *n* mesures pour la détermination de la position de 2 ou 3 points dans le plan. Le dernier de ces cas est illustré par un exemple numerique.

*

Vectorial compensation. By Prof. J. *Sébor.* (Final part.)

After the basic formulae the author discusses detailed the vectorial compensation of deviations appearing when "*n*" measurements are made in order to ascertain the relative position of two or theree points in the plane, and gives for the latter case a numerical instance.