fire wood. He further discusses the prospects of young forest-engineers and insists upon an improvement of their material situation. Finally he emphasizes again that the State Forest Department will not be able to do its duty imposed on it by the new Forestry Law unless by increasing the staff of its officials.

## Vektoriális kiegyenlítés.*)

**Irta: Sébor János, egyetemi nyilv. rk. tanár.**

Mélyen tisztelt Hölgyeim és Uraim!

Ki ne használt volna már Önök közül térképet, — akár egy turistakirándulásnál, akár más alkalommal? Vajjon gondoltak-e arra, hogy milyen műszaki munka, milyen számítási eljárások voltak szükségesek ahhoz, hogy egy-egy ilyen térkép, mely mindegyikünknek hű segítőtársa, vezetője az ismeretlen vidékeken — elkészüljön.

Nagyon messze kellene mennem és a szűkre szabott időm sem volna elég ahhoz, hogy egy-egy ilyen térkép elkészítésének összes részleteivel megismertessem Önöket. Célom tehát csak az lesz, hogy a legelemibb kiindulási eljárásokat ismertessem meg, egy a gyakorlatban még el nem terjedt, de igen jól használható új számítási eljárással.

A térkép maga tulajdonképen kicsinyített hű képe kell legyen a természetben levő pontoknak s így a pontokat összekötő egyeneseknek.

Legyen a térképen levő $A$, $B$ pont egy-egy mérési jellel állandósítva. Álljunk fel az $A$ pontban és tájékozzuk a térképünket a $B$ szerint, vagyis hozzuk a térképen lévő $A$ pontot a terepen levő $A$ pont fölé és az $AB$ egyenest a terepen lévő $AB$ egyenes fölé. Ha most a térképen lévő $AB$ hossznak a kisebbítési arányszám $K$-szoros értékét lemérném a terepen lévő $AB$ egyenesre, akkor a méréssemmel a $B$ pontba kellene jutnom. Azt látom azonban, hogy csak megközelítem ezt a pontot, de nem jutok a pontba. Ha kétszer-háromszor végzem

* A Műegyetem idei Soproni Nyári Egyetemének keretében tartott magas színvonalú és igen érdekes előadás, amelyet melegen ajánlunk a műszaki kérdésekkel foglalkozó kartársaink figyelmébe. (Szerk.)

el ezt a műveletet, mindig más-más pontba fogok jutni, bizonyos határokon belül. Tehát a térképen lévő $AB$ hossz nem felel meg teljesen a terepen lévő $AB$ hossznak.

Ha egy lépéssel tovább megyünk és felállunk a $B$ pontban a térképünkkel, a térképet az $AB$ szerint tájékozzuk és most a terepen, a térkép szerint $BC$ irányban lemérjük a $BC$ távolság $K$-szoros értékét, tapasztalni fogjuk, hogy nem jutottunk el a $C$ pontba, hanem csak megközelítettük azt és látjuk, hogy úgy a hosszban, mint az irányban eltérésünk van.

Az itt vázoltakból látjuk, hogy minden a térképünkön lévő pont nem felel meg és nem is felelhet meg teljesen pontosan a terepen lévő pontnak, hanem csak egy jó közelítő értéket ád.

Talán a jelenlévő mérnök kollégáimat kivéve, Önökben mélyen tisztelt hölgyeim és uraim, bizonyosfokú tekintélyrombolást vittem véghez, megrendítettem a bizalmukat a térképek pontosságában. Meg kell nyugtassam Önöket, a jövőben is bízhatnak a jó térképek pontosságában, mert hisz megfelelő számítási eljárások alkalmazásával a térképen lévő pontjaink annyira megközelítik a helyes pontokat, hogy azok relatíve a gyakorlat szükségleteinek megfelelően teljesen pontosaknak vehetők fel.

Nézzük, mik azok a körülmények, melyek ezt a pontatlanságot előidézik. Vegyünk fel két pontot a természetben, jelöljük meg ezt a két pontot élsen és mérjük le négyszer, ötször ezt a hosszat, azt fogjuk látni, hogy minden mérésünk más-más eredményt ad. Egy-kétszáz méteres távolságon több milliméter, sőt centiméter eltérésünk is lesz, bármilyen gondosan végezzük is méréseinket. Vajjon mi ennek az oka? Az okot elsősorban magunkban kell keresnünk, azután műszereinkben és végül más, a számításainkba be nem vonható mellékkörülményekben. Úgy az eddigi, mint az ezutáni fejtegetéseimből kizárom azokat a hibákat, melyek méréseinkből kiejthetők, így a figyelmetlenségből származó durva hibákat, vagy a számításba vonható szabályszerű hibákat; mint például a műszerek hőmérsékletokozta kiterjedéséből származókat.

Láttuk, hogy $n$ mérés $n$ különböző mérési eredményt ád. Ha végtelen pontossággal tudnánk mérni, úgy mind ez az $n$

érték ugyanaz volna; egyenlő lenne az abszolút helyes értékkel. Ezt azonban nem tudom elérni, mert véges pontosságú műszerekkel dolgozom és a megfigyelőképességem is csak véges pontosságú, tehát csak bizonyos határok között tudok érzékelni. A végtelen fogalmát tehát csak elképzelni, de érzékelni nem vagyok képes, mert véges anyaggal, véges anyaghoz kötött szellem dolgozik. Meddő kísérlet volna tehát a végtelen pontosságot hajszolni.

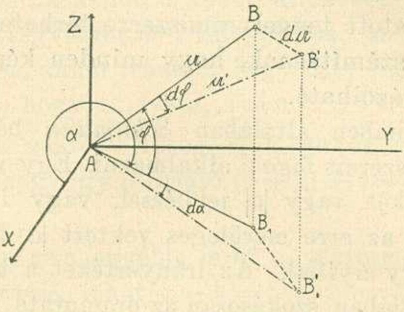
Azt mondottam, hogy csak bizonyos határok között tudok érzékelni. Ezeket a határokat a mai modern műszerekkel, mérési és számítási eljárásokkal igen szűk távolságra össze lehet szorítani, — az előbb vázolt okok miatt azonban teljesen egybeejteni nem.

Felvetődik most az a kérdés, hogy az előbb említett *n* mérési eredmény közül melyiket fogadhatom el helyesnek? minden bizonnyal egyiket sem, hanem ezekből az összes megfigyelési értékekből kell kiszámítanom a legvalószínűbb helyes értéket, — azt, amelyik legjobban megközelíti az abszolút helyes értéket. Ezeket a számítási eljárásokat, amelyeknek céljuk, hogy az *n* megfigyelésből a legvalószínűbb helyes értéket kiszámítsuk, nevezzük kiegyenlítő számításoknak.

A kiegyenlítési számításokat már több mint száz év óta a Gauss-féle legkisebb négyzetek elmélte alapján végezzük. Ennek az elméletnek a lényege az, hogy az *n* megfigyelésből a legvalószínűbb helyes értéket akkor kapom, ha az egyes megfigyelésekhez adott javítási értékek négyzeteinek az összege egy minimum. Ez a számítási eljárás teljesen kiforrott, — tiszta számokkal dolgozik.

A most tárgyalandó eljárás ugyanezen az alaptételen nyugszik, csak nem tiszta számértékekkel, hanem irányított mennyiségekkel dolgozik. A számítási eljárás tehát rövidebb, tömörebb, de a végeredmény ugyanaz, mint a régi eljárásnál. Előnye még ennek a számítási eljárásnak az, hogy könnyen, az értékek olyan új összefüggésére jöhetünk rá, amelyeket a közönséges számítási eljárásokkal csak hosszadalmas kísérletezések után láttunk volna meg.

Láttuk azt, hogy minden a terepen lévő vonalnak a térképen egy ugyanolyan irányú és értékű vonal felel meg, tehát a mért értékeink nem közönséges számértékek, — skalár értékek — hanem irányított mennyiségek, vagyis vektorok. A természetben lévő minden egyenest teljesen csak három érték határoz meg. Az egyik érték a hossz, a másik egy kezdő iránytól, a null iránytól, a harmadik pedig a vízszintestől való elhajlás.




56.

1. ábra.

Legyen $X\,Y$ a vízszintes sík. $X$ a kezdő irány. Ebben az esetben az $\mathfrak{a}$ irányított értéket az $\alpha$ vízszintes és a $\varphi$ hajlásszög, továbbá a távolság határozza meg. A méréseinknél mind a három értéket hibák terhelik, világos tehát, hogy a valószínű helyes érték egy másik $\mathfrak{a}'$ irányított mennyiség lesz, melyet úgy nyerek, ha a megmért $\mathfrak{a}$ vektor $a$ hosszának, $\alpha$ vízszintes szögének és $\varphi$ magassági szögének értékét javítom a megfelelő értékekkel.

A kiegyenlítést, amint látjuk, egyszerre kellene elvégezni mind a három értékre nézve. Mivel azonban a geodéziában rendszerint külön végezzük el a vízszintes vetületi mérést és külön a magassági mérést, azért a kiegyenlítést is először a vízszintes vetületi mérésekre nézve végezzük el s csak azután külön, a magassági mérésekre vonatkozólag, ahol a vízszintes vetületbeli kiegyenlített méréseket már hibamenteseknek tételezzük fel. Így a következőkben én is csak síkban fogok dolgozni, ezzel a feladatunk leegyszerűsödik, amennyiben térbeli vektorok helyett, csak síkbeli vektorokkal kell foglalkoznunk.

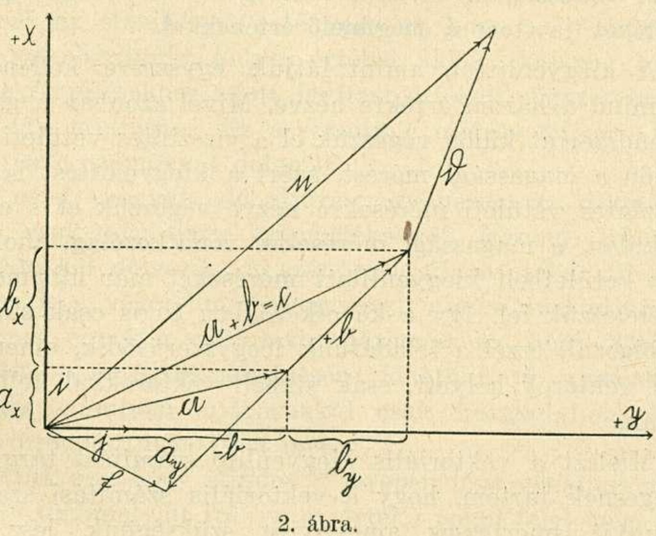
Mielőtt a vektoriális kiegyenlítő számítást tárgyalnám, szükségesnek tartom, hogy a vektoriális számítási szabályokból annyit ismertessek, amennyire szükségünk lesz. Látni fogjuk, hogy ezek a szabályok igen egyszerűek és könnyen megjegyezhetők.

A síkbeli vektor, vagy irányított mennyiség, egy meghatározás szerint nem más, mint a síknak egy függvénye, amely szerint a sík minden egyes pontjához egy skaláris érték és egy irányérték tartozik. Egy vektoriális képlet független a tengelyrendszertől, s így az eredményeimben bármilyen eltolt, vagy elforgatott tengelyrendszerre térhetek át. Egy nagy előnye ennek a számításnak, hogy minden képlet geometriailag könnyen ábrázolható.

Levezetéseimben általában *Schumann* bécsi műegyetemi tanár jelölési módszereit fogom alkalmazni. Egy vektort gót betűvel $\mathfrak{a}$, skalárértékét vagy $|\mathfrak{a}|$ jelöléssel, vagy latin betűvel, az egységvektort $\overline{\mathfrak{a}}$, az erre merőleges vektort $|\mathfrak{a}$ fogom jelölni, az irányt mindég egy nyíllal. Az irányértéket a kezdő, vagy null iránytól a geodéziában szokásosan az óramutató járásával egyező irányban fogom venni, tehát eltérek a matematikában szokásos iránytól.

Az eddigiekből látjuk, hogy az $\mathfrak{a}$ érték tulajdonképen a síkban csak két értékkel van teljesen meghatározva, írható tehát így is $a.\overline{\mathfrak{a}}$, ahol $a$ a hosszat $\overline{\mathfrak{a}}$ pedig az irányt jelöli meg

Legyen két voktorunk $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$, nézzük ezek összegezése




57.

2. ábra.

után milyen értéket kapunk? $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ érték, ha az ábrát megnézzük egy új irányértéket ád, amelynek skalár értéke nem egyenlő $a+b$ értékkel.

Ha ellenben vetületét a kezdőirányra $a_x$ és $b_x$-el és ennek az iránynak egységvektorát $\mathfrak{i}$-vel jelölöm, akkor írhatom, hogy $a_x . \mathfrak{i} + b_x . \mathfrak{i} = c_x . \mathfrak{i}$

Ugyanígy, ha a null irányra kilencven fokos szög alatt hajló irány egységvektorát $\mathfrak{j}$-vel jelölöm, az $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ vetületét $a_y$ és $b_y$-al jelölöm, akkor írhatom, hogy $a_y . \mathfrak{j} + b_y . \mathfrak{j} = c_y . \mathfrak{j}$. Látjuk most már azt is, hogy $a_x . \mathfrak{i} + a_y . \mathfrak{j} = \mathfrak{a}$

Ha három vektort összegezünk, akkor $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{d} = \mathfrak{n}$. Az ábrából kitünik, hogy így is írható $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{d} = \mathfrak{n}$, mert $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ és $\mathfrak{c} + \mathfrak{d} = \mathfrak{n}$.

A kivonás nem egyébb, mint a vektornak negativ irányban való összegezése, tehát $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{f}$

Nézzük a vektoros mennyiségek szorzási szabályait.

Skalár értékkel minden további nélkül szorozható a vektor és az eredmény ugyanolyan irányú, de a szorzatnak megfelelő skalár értékű vektor lesz, tehát: $m . \mathfrak{a} = m . a . \bar{\mathfrak{a}}$

Ha egy összeget szorzunk $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) . n$-el, akkor az előzőkből könnyen látható, hogy $n . (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = n . \mathfrak{a} + n . \mathfrak{b}$. Ugyanígy fordítva több vektor összegezésénél a közös skalár szorzó kiemelhető.

Vektornak vektorral való szorzásánál már vigyáznunk kell, itt kétféle szorzatot kell megkülönböztetnünk, az egyik a belső vagy skalár szorzat, a másik a külső vagy vektoros szorzat.

A belső szorzat eredménye egy skalár érték. Jelölése $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = a . b . \cos(\mathfrak{a} \mathfrak{b})$, vagyis az $a$ vetülete a $b$-n szorozva a $b$ abszolut értékével.

Ha tengelyrendszert veszünk fel, akkor $\mathfrak{a} = a_x . \mathfrak{i} + a_y . \mathfrak{j}$ és $\mathfrak{b} = b_x . \mathfrak{i} + b_y . \mathfrak{j}$, mivel $\mathfrak{i} . \mathfrak{i} = 1 . 1 . \cos 0^0 = 1$ és $\mathfrak{i} . \mathfrak{j} = 1 . 1 . \cos 90^0 = 0$ lesz $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = a_x . b_x + a_y . b_y$; $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ mert $\cos(\mathfrak{a}\, \mathfrak{b}) = \cos(\mathfrak{b}\, \mathfrak{a})$.

Csak két vektort lehet egyszer ez alá a művelet alá fogni, mert $\mathfrak{c} . (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ egy vektor, amelynek iránya a $\mathfrak{c}$ irányával egyenlő, a skalár értéke pedig $|\mathfrak{c}|$ szorozva $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ skalár értékkel.

$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ kifejezés nem állhat fenn, ennek semmi jelentősége sincs. Összetett vektor szerepelhet a szorzásnál, így $(\mathfrak{a}, (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$; $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = a \,.\, a \,.\, \cos 0^0 = a^2$

Ha két vektor egymásra merőlegesen áll, akkor $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$ tehát ez a merőlegesség feltétele.

A külső szorzat eredménye a térbeli vektoroknál egy vektor, azért is hívják ezt a sorozatot vektoros szorzatnak, ebből a szorzatból származó vektor merőleges a két vektor által kijelölt sikra. Sikbeli vektoroknál ez a szorzat szintén egy skalár eredményt ád. Jelölése $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = a \,.\, b \,.\, \sin (\mathfrak{a}\, \mathfrak{b})$ tekintettel arra, hogy $\sin (\mathfrak{a}\, \mathfrak{b}) = - \sin (\mathfrak{b}\, \mathfrak{a})$-val; $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = - [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]$.

Ezen kifejezés, amint látjuk, nem egyéb, mint egy négyszögnek területe.

Ha az egyes vektorokat a vetületeikkel fejezzük ki, akkor mivel $\mathfrak{i} \,.\, \mathfrak{i} = 1 \,.\, 1 \,.\, \sin 0^0 = 0$ és $\mathfrak{i} \,.\, \mathfrak{j} = 1 \,.\, 1 \,.\, \sin 90^0 = 1$ és $\mathfrak{j} \,.\, \mathfrak{i} = 1 \,.\, 1 \,.\, \sin 270^0 = -1$, lesz $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [a_x \,.\, \mathfrak{i} + a_y \,.\, \mathfrak{j}, b_x \,.\, \mathfrak{i} + b_y \,.\, \mathfrak{j}] = a_x \,.\, b_y - a_y \,.\, b_x$ vagy determináns alakjában felírva $\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$

$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = a \,.\, a \,.\, \sin 0^0 = 0$, tehát ez a párhuzamosság feltétele. Ugyanúgy mint a skalár szorzatnál, írható itt is $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b} + \mathfrak{c}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, \mathfrak{c}]$.

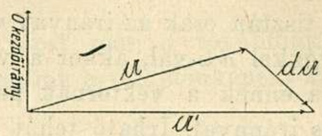
Minden vektoros egyenlet, mint például $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ felbontható két egyenletre, ha valamelyik az egyenletben előforduló vektorral először skalár, majd vektorosan megszorozzuk. Vagy ugyanezt érjük el azáltal, ha valamely az egyenletben előforduló vektorral és az erre merőleges vektorral képezzük a skaláris szorzatot. Ez tulajdonképen geometriailag kifejezve nem egyéb, mint az egyenletben előforduló vektorok vetületének a képzése arra a vektorra, amellyel a szorzást végeztük és az erre merőleges irányra. Valahányszor a vektoros számításról át akarunk térni a rendes számításra, mindég ezt az eljárást kell követnünk.

Összetett szorzásokat és a határozatlan szorzást, mivel arra a kiegyenlítő számításainkban nem lesz szükség, nem tárgyalom.

A kiegyenlítő számításoknál az $\mathfrak{a}$ vektor a $d\,\mathfrak{a}$ javítás következtében egy $\mathfrak{a}'$ vektorrá változik át. Látjuk, hogy a $d\,\mathfrak{a}$

változás következtében a vektornak nemcsak a hosszértéke, hanem az irányértéke is megváltozik. Az ábránk szerint:

$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + d\mathfrak{a}$, ebből a $d\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' - \mathfrak{a}$

58. 


3. ábra.

Nézzük, mi lesz egy belső szorzat differenciálja? Legyen a két vektor $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$, amelyek a változás után, az $\mathfrak{a}'$ és $\mathfrak{b}'$ értékbe mennek át.

A változás lesz tehát: $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}', \mathfrak{b}') - (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} + d\mathfrak{a}$$

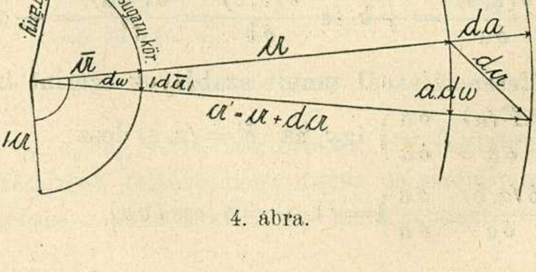
$$\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} + d\mathfrak{b}$$ lesz tehát:

$$d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a} + d\mathfrak{a}, \mathfrak{b} + d\mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a}, d\mathfrak{b}) + (d\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) + + (d\mathfrak{a}, d\mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

A $(d\mathfrak{a}, d\mathfrak{b})$ mint másodrendű végtelen kis érték elhanyagolható, lesz tehát: $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}, d\mathfrak{b}) + (d\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, itt a szorzatokban a tagok sorrendjére nem kell ügyelnünk, mert hiszen cosinuszos szorzatról van szó. Írhatjuk továbbá: $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = d\,\mathfrak{a}^2 = 2(\mathfrak{a}, d\mathfrak{a})$

Hasonlóképen nyerjük a külső sorozat változását: $d[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}, d\mathfrak{b}] + [d\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$, itt ügyelnünk kell a szorzatokban a tagok sorrendjére, mert sinuszos szorzatról van szó. A tagok sorrendjének megváltoztatásával, az előjel megváltozik.

Vizsgáljuk most egy vektor változásánál előforduló tényezőket.

59. 


4. ábra.

Ha az $\mathfrak{a}$ vektorban egy $da$ változás áll elő, vagyis a skalárérték változik meg egy differenciális kis értékkel, úgy a változás iránya megegyezik az $\mathfrak{a}$ vektor irányával, az előző szerint tehát írható $da\,.\,\bar{\mathfrak{a}}$

Ha a vektor tisztán csak az irányát változtatja meg egy differenciális kis értékkel $d\omega$-val, akkor a változás skalárértéke lesz $a\,.\,d\omega$, az iránya ennek a vektornak pedig egyenlő lesz az $\mathfrak{a}$ vektorra merőleges iránnyal. Írható tehát $a\,.\,d\omega\,.\,|\mathfrak{a}$.

Az egységvektor $\bar{\mathfrak{a}}$ változása, mivel a hossza állandó, lesz az ábra szerint $|d\bar{\mathfrak{a}}|\,.\,|\mathfrak{a}$, a $|d\bar{\mathfrak{a}}|$ érték tehát egyenlő $d\omega$-val.

A teljes $d\mathfrak{a}$ változás tehát felírható, mint ennek a két részváltozásnak a vektoriális összege. Lesz:

$$d\mathfrak{a} = d\,a\,.\,\bar{\mathfrak{a}} + a\,.\,d\omega\,.\,|\mathfrak{a}$$

Az ábráról látjuk azonnal, hogy

$$|d\mathfrak{a}| = \sqrt{(d\,a)^2 + (a\,.\,d\omega)^2} \text{ és } tg(\mathfrak{a}\,d\,\mathfrak{a}) = \frac{a\,.\,d\omega}{d\,a}$$

Vizsgáljuk egy vektornak egy vektor szerinti változását. *Müller*-től származó definició szerint, ha egy $F$ érték függvénye az $\mathfrak{a}$ vektornak, akkor $F(\mathfrak{a})$ differenciálhányadosa $\mathfrak{a}$ szerint az a vektor, amelynek belső szorzata az $\mathfrak{a}$ vektor változásával $d\mathfrak{a}$-val, egyenlő az $F$ érték változásával $dF(\mathfrak{a})$-val, vagyis:

$$dF(\mathfrak{a}) = \left(\frac{dF(\mathfrak{a})}{d\mathfrak{a}}, d\mathfrak{a}\right)$$

Ha $F = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ függvénye tehát két vektornak, lesz:

$d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \left(\frac{\delta(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}{\delta\mathfrak{a}}, d\mathfrak{a}\right) + \left(\frac{\delta(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}{\delta\mathfrak{b}}, d\mathfrak{b}\right)$ az előbb láttuk, hogy $d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}, d\mathfrak{a}) + (\mathfrak{a}, d\mathfrak{b})$. Ha tehát az $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ változók egymástól független vektorok, következik a két egyenlet összehasonlításából:

$$\frac{\delta(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}{\delta\mathfrak{a}} = +\mathfrak{b} \text{ és } \frac{\delta(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}{\delta\mathfrak{b}} = \frac{\delta(\mathfrak{b},\mathfrak{a})}{\delta\mathfrak{b}} = +\mathfrak{a}$$

A differenciálásnál tanult szabályok szerint írhatjuk:

$\frac{\delta F(\mathfrak{a})}{\delta\mathfrak{a}} = \left(\frac{\delta F(\mathfrak{a})}{\delta\mathfrak{a}}, \frac{\delta\mathfrak{a}}{\delta a}\right)$ így ha $F = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ lesz:

$$\frac{\delta(\mathfrak{a}.\mathfrak{b})}{\delta a} = \left(\frac{\delta(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}{\delta\mathfrak{a}}, \frac{\delta\mathfrak{a}}{\delta a}\right) = (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = b\,.\,cos(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a})$$

$$\frac{\delta(\mathfrak{a},\mathfrak{a})}{d\,a}=2.a\,; \quad \frac{\delta(d\,\mathfrak{a},d\,\mathfrak{a})}{\delta\,d\,a}=2.d\,a$$

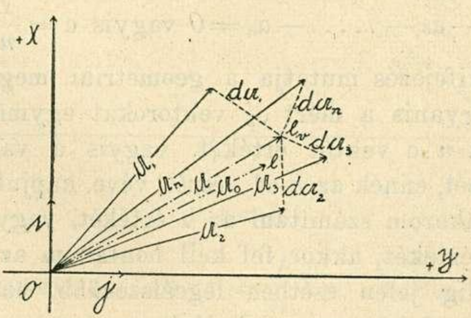
$$\frac{\delta(d\,\mathfrak{a},d\,\mathfrak{a})}{d(a.\,d\,\omega)}=2.a.d\,\omega\,; \quad \frac{\delta(d\,\mathfrak{a},d\,\mathfrak{a})}{\delta\,d\,\omega}=2.a^2.d\,\omega$$

Megismerve most már a továbbiakban szükséges alapműveleteket, áttérhetünk a tulajdonképeni kiegyenlítő számítások tárgyalására.

A vektoriális számításoknak két irányával ismerkedhetünk meg az irodalomban. A régebbi irányban *Fridrich* dolgozott, aki a komplex számsíkban lévő vektorokat, az úgynevezett Gauss-féle vektorokat használta. Ez az irány nem talált követőkre, talán az oka az, hogy jelölései kissé nehézkesek.

A másik iránynak fő művelője *Schumann* bécsi műegyetemi tanár, akinek ebben az irányban igen nagy munkássága van. Ezt az irányt követik az újabb irodalomban. Állíthatjuk, hogy *Schumann* egy külön iskolát létesített a vektoriális kiegyenlítő számításokra.

A vektoros kiegyenlítésnél vegyük fel először a legegyszerűbb esetet, amikor két pont kölcsönös helyzetét akarjuk meghatározni. Legyen a két ponton $o$ és $e$, a két pontot összekötő irányított érték $\mathfrak{a}_o$, a kezdő irány $+x$. Mérem az $\alpha$ szöget és az $a$ távolságot $n$-szer. Mind az $n$-szer más-más értéket kapok.




60.

5. ábra.

Kapom az $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, .... $\mathfrak{a}_n$ vektorokat. Ha végtelenszer ismétlem meg a méréseimet, feltéve, hogy durva és szabályos hibám nincs, akkor a helyes $e$ pont körül egy ponthalmazt, — nevezketjük így, —, az $e$-hez tartozó ponttartományt kapnám. Kérdés, hol lesz az $e$ pontnak a legvalószínűbb helyes fekvése? Az előzőkből tudjuk már, hogy Gauss után ott, ahol a javítások négyzeteinek az összege egy minimum.

Ha tehát a valószínű helyes pontot $e_v$-vel jelölöm, az $o$-t az $e_v$-vel összekötő vektort $\mathfrak{a}$-val, az $\mathfrak{a}_1$ vektort egy $d\,\mathfrak{a}_1$ értékkel, az $\mathfrak{a}_2$-t, $d\,\mathfrak{a}_2$-vel, és így tovább, az $\mathfrak{a}_n$ vektort $d\mathfrak{a}_n$-nel kell javítanom. Tehát kell, hogy:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + d\,\mathfrak{a}_1 \quad \text{lesz tehát:} & d\,\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2 + d\,\mathfrak{a}_2 & d\,\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_2 \\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_3 + d\,\mathfrak{a}_3 & d\,\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_3 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_n + d\,\mathfrak{a}_n & d\,\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_n \end{array}$$

A javítások négyzetei összegének az első differenciál hányadosát kell egyenlővé tennem $0$-val, hogy a minimumot kapjam. A négyzet nem egyéb, mint a vektornak önmagával való szorzata. A szorzat kétféle lehet, vagy belső, vagy külső. Itt csak a belső jöhet figyelembe. mert ez a skalárértékek négyzetével egyenlő, míg a külső szorzat egyenlő $0$-val.

Lesz tehát: $\Sigma(d\,\mathfrak{a}_k,\ d\,\mathfrak{a}_k) = Min.$ vagy írható így is :

$\Sigma(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_k,\ \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_k) = Min.$ Ahol $k = 1$-től $n$-ig.

Elvégezve a differenciálást az előbb felírt képletek segítségével, lesz:

$2\Sigma\,\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_k = 0$ Felbontva a $\Sigma$ jelet:

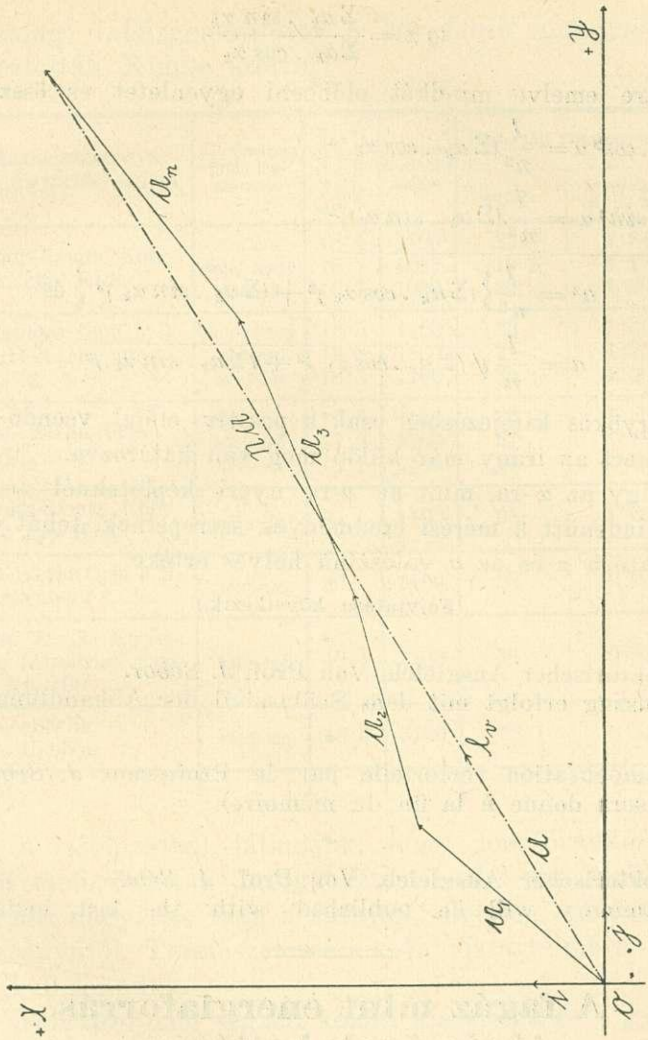
$n.\,\mathfrak{a} - \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_3 - \dots\dots - \mathfrak{a}_n = 0$ vagyis $\mathfrak{a} = \frac{1}{n}\Sigma\,\mathfrak{a}_k$

Ez a kifejezés mutatja a geometriai megoldását a feladatnak, ha ugyanis a mért $\mathfrak{a}_k$ vektorokat egymásután felhordjuk, kapjuk az $n.\mathfrak{a}$ vektor értékét, vagyis a valószínű helyes vektor $n$-szeresét, ennek az $n$-ed részét véve, kapjuk az $e_V$ pontot.

Ha ki akarom számítani az $\mathfrak{a}$ értékét, vagyis a megfelelő hossz és szög értékét, akkor fel kell bontanom az előbbi egyenletet, még pedig jelen esetben legcélszerűbb, ha először $\mathfrak{i}$-vel, azután $\mid \mathfrak{i} = \mathfrak{j}$-vel képezem a skaláris szorzatot.

*Lesz:* $(\mathfrak{i}, \mathfrak{a}) = \frac{1}{n}\Sigma(\mathfrak{i}, \mathfrak{a}_k)$

$(\mathfrak{j}, \mathfrak{a}) = \frac{1}{n}\Sigma(\mathfrak{j}, \mathfrak{a}_k)$ rendes mathematikai alakba írva:




6. ábra.

lesz az első egyenlet: $a . \cos(\mathrm{i}\,a) = \frac{1}{n} \Sigma a_k . \cos(\mathrm{i}\,a_k)$

mivel $\cos(\mathrm{j}\,a) = \cos(90^0 - \mathrm{i}\,a) = \sin(\mathrm{i}\,a)$ lesz a második egyenlet:

$$a . \sin(\mathrm{i}\,a) = \frac{1}{n} \Sigma a_k . \sin(\mathrm{i}\,a_k)$$

$\mathrm{i}\,a \sphericalangle = \alpha$ a megfelelő szögérték a null iránytól. Ezt behelyettesítve és a két egyenletet osztva egymással, kapjuk:

$$tg\,\alpha = \frac{\Sigma a_k \,.\, sin\,\alpha_k}{\Sigma a_k \,.\, cos\,\alpha_k}$$

Négyzetre emelve mindkét előbbeni egyenletet és összegezve, lesz: $a^2 . cos^2 \alpha = \frac{1}{n^2} (\Sigma a_k \,.\, cos\,\alpha_k)^2$

$$a^2 . sin^2 \alpha = \frac{1}{n^2} (\Sigma a_k \,.\, sin\,\alpha_k)^2$$

$$a^2 = \frac{1}{n^2} \left\{ (\Sigma a_k \,.\, cos\,\alpha_k)^2 + (\Sigma a_k \,.\, sin\,\alpha_k)^2 \right\} \text{ és}$$

$$a = \frac{1}{n} \sqrt{(\Sigma a_k \,.\, cos\,\alpha_k)^2 + (\Sigma a_k \,.\, sin\,\alpha_k)^2}$$

ahol a gyökös kifejezésben csak a pozitív előjel veendő figyelembe, mert az irány már külön meg van határozva.

Ugy az $\alpha$-ra, mint az $a$-ra nyert képleteknél a jobboldalon mindenütt a mérési eredmények szerepelnek, tehát ezekből számítható a $\alpha$ és az $a$ valószínű helyes értéke.

(Folytatása következik.)

*

**Vektorischer Ausgleich.** Von Prof. *J. Sébor.* Auszug erfolgt mit dem Schlussteil der Abhandlung.

*

**Compensation vectorielle** par le Professeur *J. Sébor.* (Le résumé sera donné à la fin du mémoire).

*

**Vektorischer Ausgleich.** Von Prof. *J. Sébor.* Summary will be published with the last instalment.

# A fagáz mint energiaforrás járóművek hajtására.

**Írta: Dr. vitéz Bokor Rezső.**

(Befejező közlemény.)

A fagáznak alkalmazását járóművek hajtására a hazai nyersanyagnak, a fának felhasználásán kívül még indokolja: *gazdaságossága.* Laboratóriumi kísérletek szerint, ahol a generator ugyanolyan rázásnak volt kitéve, mint a járóművön, a különböző gyártmányú német és osztrák (csak