Tanulmány

KOLMOGOROV, A KOZMIKUS MATEMATIKUS

Szász Domokos
az MTA rendes. tagja, egyetemi tanár, igazgató, BME Matematika Intézet, MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Valószínûségszámítási Osztály – szasz@math.bme.hu

Száz éve született Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903. április 25. – 1987. október 20.), a 20. század egyik kimagasló matematikus óriása, Leonhard Euler (1707-1783), Carl Friedrich Gauss (1777–1855) és Henri Poincaré (1854–1912) hagyományainak folytatója és kiteljesítõje.

Kolmogorov kozmikus matematikus volt. Tudományos érdeklõdését a legkülönfélébb jelenségek keltették fel: számos alapvetõ, mély és gyönyörû, tisztán matematikai kérdés mellett foglalkozott Novgorod 15–16. századbeli agrár- és tulajdonviszonyaival, a Naprendszer stabilitásának problémájával, orosz költõk – elsõsorban Puskin – stílusjegyeinek mennyiségi elemzésével, születési és halálozási folyamatokkal, a Föld forgástengelyének mozgásával, fémek kristályosodásával, a turbulencia jelenségével, a számítási komplexitás fogalmával és elméletével a modern számítástudomány alapjait fektette le, információelméleti módszereket vezetett be a dinamikai rendszerek elméletébe…

Páratlan sokoldalúságára jellemzõ, hogy a számelmélet kivételével a matematika majd' minden ágában ért el alapvetõ eredményeket: ilyenek a trigonometrikus sorok elmélete, a mértékelmélet, a halmazelmélet, az integrálelmélet, a konstruktív logika (intuicionizmus), a topológia, az approximációelmélet, a dinamikai rendszerek elmélete, az automataelmélet, az algoritmuselmélet, az információelmélet, a matematikai nyelvészet, a turbulenciaelmélet, az égi mechanika, a differenciálegyenletek elmélete, az alkalmazott matematika (biológia, geológia, ballisztika), stb.

Kolmogorovot sok matematikus elsõsorban a modern valószínûségelmélet megteremtõjeként ismeri. Ennek két magyarázata van: egyrészt 1933-ban megjelent *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* címû mûve valóban alapvetõ volt. A valószínûség matematikai elmélete ugyan már Blaise Pascal (1623–1662) és Pierre Fermat (1601–1665) klasszikus levelezésével megszületett (Rényi, 1967), és az is tény, hogy kiváló matematikusok, közöttük Abraham de Moivre (1667–1705), Pierre Simon Laplace (1749–1827), Carl Friedrich Gauss, Siméon Denis Poisson (1781–1840), Pafnutij Lvovics Csebisev (1821–1894), Andrej Andrejevics Ljapunov (1857–1918), Jarl Waldemar Lindeberg (1876–1932) már igen mély törvényeket megértettek a valószínûség naiv fogalma alapján is.

Kolmogorov a *Grundbegriffe*-ben egyfelõl valóban nem tett mást, mint a Henri Le-

Kolmogorov magyarázat közben

besgue (1875–1941) által kidolgozott mértékelméletet (és integrálelméletet) felhasználva fogalmazta meg a valószínûség axiómarendszerét. Ez az axiómarendszer azonban egyúttal egységes, egyszerû keretbe foglalta a korábbi eredményeket, továbbá egységes és egyszerû nyelvet biztosított a valószínûség és azután a sztochasztikus folyamatok elméletének. (A szakmabelieknek jegyzem meg, hogy egyúttal a Kolmogorov-féle alaptétel és a feltételes várható érték ugyanitt adott fogalma tették az axiómarendszert különösen hatékonnyá – lehetõvé téve többek között az alkalmazások szempontjából elsõrendû matematikai statisztika megalapozását is.) De Kolmogorov nemcsak az axiómarendszert vezette be, hanem a valószínûségszámítás, a sztochasztikus folyamatok elmélete és a matematikai statisztika számos alapvetõ törvényét, fogalmát, módszerét is felfedezte, így vitathatatlanul õ lett a modern elmélet megalapítója. Az axiómarendszer egyben jelentõs lépés volt a 6. Hilbert-probléma megoldásának irányában is. A nem matematikus olvasónak hadd írjam le, mik is a Hilbert-problémák. David Hilbert (1862–1943), az 1900-as Nemzetközi Matematikai Kongresszuson tartott fõ elõadásában összegyûjtött huszonkét problémát, amelyeket a 20. század legfontosabb matematikai problémáinak tartott. Az elõadás és annak hatása, amirõl máris elmondhatjuk, hogy a 21. századra is átnyúlik, páratlan a tudomány történetében, a matematikáéban is csak egyszer volt elképzelhetõ. A 6. probléma a „Fizika axiomatikus megalapozása" nevet viselte, és a bõvebb leírásból kiderült, hogy Hilbert itt többek között a valószínûségek axiomatikus megalapozására is gondolt. Ezt tette meg Kolmogorov a *Grundbegriffe*-ben és egyéb mûveiben, és ezzel vált ténylegesen a valószínûségszámítás különálló, roppant szép és érdekes felfedezések halmazából egységes tudományággá, a matematika szerves részévé.

Pusztán valószínûségszámítási eredményeinek tömör áttekintése az *Annals of Probability*, a legrangosabb valószínûségszámítási folyóirat százötven oldalát töltötte ki, így Kolmogorov munkásságának még vázlatos leírása is meghaladná e folyóirat kereteit. Nagy a kísértés, hogy részletesebben leírjam, mi volt a motivációja az ún. Kolmogorov-Sinai-entrópia bevezetésével, vagy, elégedetlenül az általa megalapozott modern valószínûségszámítás – végtelen sorozatokra vonatkozó – alaperedményeivel (nagy számok törvényei, a centrális határeloszlás tételei stb.) hogyan próbálta megfogalmazni véges sorozatok valószínûségi törvényeit, ami a modern számítástudományban alapvetõ Kolmogorov-komplexitás kieszeléséhez vezette,[1] avagy leírjam, hogy miként jutott négy év alatt a 13. Hilbert-probléma megoldásához. Nem teszem, a bõvebben érdeklõdõknek inkább ajánlom az Annals of Probability említett kötetét, emellett négy olvasmányos honlapot:

[1] Ezek a vizsgálatai nem a *Grundbegriffe*-ben is alkalmazott mértékelméleti megalapozásra épültek, hanem a Richard von Mises (1883-1953) által kezdeményezett, a gyakoriság fogalmát használó fogalomalkotásra.

1. http://gap-system.org/~history/Mathematicians/Kolmogorov.html – életrajz és munkásság; 2. http://www.cwi.nl/~paulv/KOLMOGOROV.BIOGRAPHY.html – életrajz; 3. http://www.idsia.ch/~marcus/kolmo.htm – linkgyûjtemény; 4. http://kolmogorov.com/ – a tiszteletére létrehozott honlap

Hogyan is találkoztam én Kolmogorovval? Rényi Alfréd hatására egyetemista koromban nyáron, majd az egyetem elvégzése után is olvasni kezdtem Kolmogorov néhány cikkét, a *Grundbegriffe*-t, valamint Gnedenkoval közös könyvét a határeloszlások elméletérõl. Már akkor megfogott, hogy Kolmogorovnak rendkívüli kíváncsisága és érzéke is volt az új jelenségek iránt. Gondolkodásmódja lenyûgözõen célratörõ volt. Azt lehet mondani, hogy tipikusan nem nehéz és szövevényes technikákat alkalmazott, bizonyításai inkább a feladat természetébõl következtek. Érveléseiben mindig éppen az a gondolat jelent meg, amire ott szükség volt. Késõbb hallottam, érzékeltem, hogy igen magas szinten tudott heurisztikusan gondolkodni; pontos bizonyítások nélkül sem tévedett. Álljon itt erre egy példa:

Két tanítványával közös, 1962-ben megjelent cikkükben (Arató, 1962) a Föld forgástengelyének statisztikai leírását tûzték ki célul. Itt a tengelynek a Föld felszínén való mozgását a gömbfelszínen értelmezett komplex Gauss-folyamatnak tételezik fel, és két konkrét valószínûségi változó függetlenségét használják ki. A publikációban azonban ezt a függetlenséget nem bizonyították. A dolgozat nagy érdeklõdést keltett, és számos olvasó, aki a cikket alaposan olvasva fennakadt e függetlenségen, a tanítványokhoz fordult magyarázatért. Õk ezzel nem tudtak szolgálni, viszont arra emlékeztek, hogy e munka írásakor Kolmogorov az ujjaival mutogatva elmondott egy heurisztikus érvelést e függetlenséget alátámasztandó. Ezért, jóllehet az érvelés részleteit pontosan nem értették, az állítást bevették a dolgozatba.

Az állítást azután még évekig nem sikerült senkinek sem bizonyítania, míg végül A. A. Novikov, Kolmogorov szellemi unokája, aki egyik kiváló tanítványának, Albert Ny. Shirjaevnek aspiránsa volt, 1972-ben végre bizonyítást talált Kolmogorov heurisztikus érvelésére (Shirjaev, 1972), s ez kandidátusi értekezésének egyik fõ eredménye volt.

Mindezek alapján nem meglepõ az a páratlan tekintély, amelyet e géniusz a matematikusok között élvezett. Hadd illusztráljam ezt is egy példával. A Naprendszer stabilitásának problémáját már maga Isaac Newton (1642-1727) is felvetette, amint megértette a bolygók mozgását leíró egyenleteket. A kérdés természetesen az, hogy ha esetleg ezen egyenletek pontosan nem is oldhatók meg, a megoldások nem olyanok-e, hogy egy vagy több bolygó (akár maga a Föld) elrepül vagy beleesik a Napba? Ha csak két testet tekintünk, például a Napot és egy bolygót, akkor ez a középiskolában is tanult Kepler-probléma. Ekkor az egyenletek megoldhatók, a testek ellipszispályákon mozognak, és a rendszer stabil (megjegyzem, bizonyos kezdeti feltételekre az egyenleteknek instabil – parabola, illetve hiperbola – megoldásaik vannak).

A következõ kérdés nyilván a háromtest-probléma: pl. a Napra és két bolygóra írjuk fel Newton egyenleteit. Ezzel a problémával, sõt ennek egy leegyszerûsített formájával; a korlátozott háromtest-problémával (amikor az egyik égitest tömege viszonylagosan nagyon kicsi, például a három test a Nap, a Jupiter és a Vénusz) a legkiválóbb elmék birkóztak évszázadokon keresztül. A teljességre való törekvés nélkül említsünk meg néhány tudóst, akik egy-egy jelentõs észrevétellel elõbbre jutottak: Alexis Claude Clairot (1713–1765; 1752-ben egy vonatkozó dolgozata elnyerte a Szentpétervári Akadémia díját), Leonhard Euler (1707–1783), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813; 1772–ben Euler és Lagrange vonatkozó memoárjai elnyerték a Prix de L'Académie de Paris-t),

A dobogókõi Eötvös Loránd-menedékház elõtt: balról jobbra Arató Mátyás, Kolmogorov (takarásában Szász Domokos), Prékopa András, Rényi Alfréd, Vincze István, N. N.

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), George William Hill (1838-1914), George H. Darwin (1845–1912).

1954-ben Kolmogorov négyoldalas dolgozatot publikált a Szovjetunió Tudományos Akadémiája közleményeiben. Itt megfogalmazott tétele a probléma teljesen váratlan megoldását javasolta: a kezdeti feltételek számelméleti tulajdonságaitól függõen a megoldás hol stabil, hol instabil. A cikk természetesen azonnal felkeltette a szakértõk érdeklõdését, így Carl Ludwig Siegelét (1896–1981), és tanítványáét, Jürgen K. Moserét (1928–1999), akik már dolgoztak 1956-ban megjelent *Vorlesungen Über Himmelsmechanik* címû monográfiájukon. A gond azonban az volt, hogy Kolmogorov cikke nem tartalmazott bizonyítást, pusztán rövid utalást e verifikálás ugyancsak forradalmian új módszerére (egy gyorsan konvergáló algoritmikus eljárásra, amely valójában az egyetemen sokak által tanult Newton-féle eljáráson alapul).

Jürgen Moser mesélte nekem már a 90-es években, hogy Kolmogorovtól nem sikerült további információt szerezniük bizonyításáról. Viszont az a tény, hogy a tételt õ fogalmazta meg, olyan bizalmat alapozott meg bennünk, hogy Siegel javaslatára nekilátott a bizonyítás kidolgozásának. Ez öt év alatt sikerült is, és dolgozata 1962-ben meg is jelent. Vele párhuzamosan Kolmogorov tanítványa, Vlagyimir Igorjevics Arnold (sz. 1937) is nyert egy bizonyítást, amely 1963-ban jelent meg. Ma az elmélet, amelyet megalkotóik nevének kezdõbetûi alapján KAM-elméletnek neveznek, a dinamikai rendszerek alapjaihoz tartozik, a Kolmogorov által kigondolt és az Arnold és Moser által kidolgozott rendkívül hatékony módszert a legkülönfélébb területeken alkalmazzák. Megjegyzem, hogy egyetemi kurzuson csak a tétel kimondására és értelmezésére ma is egy dupla órát kell szánnom, a bizonyítás további négy dupla óra. Minderrõl további részletek is olvashatók Staar Gyula Jürgen Moserrel készített interjújában, a Természet Világa 1996. májusi számában.

Kolmogorovval magyar matematikusok is igen jó kapcsolatot tartottak fent. Az MTA már 1965-ben tiszteleti tagjává választotta, 1973-ban az ELTE-n doctor honoris causa lett, hazánkban többször is járt. Egyik látogatásának (ez épp az 1964-es lehetett) emlékszem néhány részletére is. Elõadást tartott a turbulencia Kolmogorov-féle elméletérõl, amibõl igen keveset értettünk. Beszédét amúgy is nehezen lehetett érteni, nem volt igazán jó elõadó. Utána viszont szívesen diszkutált, adott bõvebb magyarázatokat mind elõadásának részleteirõl, mind bármilyen érdekes témáról. Voltunk vele az Operaházban, emlékszem arra, hogy igencsak tetszett neki Kisfaludy Stróbl Zsigmond Bartók-szobra. Kirándulni voltunk a Pilisben: Dobogókõ, Vadállókövek, Prédikálószék, lelkesen élvezte. Egyébként is sokoldalú sportember volt: sízett, kirándult, evezett, futott… (A kiránduláson Rényi figyelmét is felhívta a testedzés fontosságára, amikor látta, hogy felérve egy emelkedõ tetejére, Rényi erõsen elfáradt.) Magát Kolmogorovot még a 80-as évek második felében is láttam a Lomonoszov Egyetem körül futni a hóban. Ekkor már majdnem teljesen vak volt, és egy kutya vezette.

E megemlékezés kivonatos, mégis meg kell említenem, hogy Kolmogorov sokoldalú tudományos munkássága mellett igen komolyan foglalkozott a fiatalok matematikai nevelésével is. Moszkvában bentlakásos középiskolát hozott létre azzal a céllal, hogy a tehetséges fiatalok az egész államszövetség területérõl igényes matematikai képzésben részesülhessenek – függetlenül családjuk anyagi helyzetétõl és a helyi iskolák színvonalától.

Kolmogorov és Juergen Moser (az 1962-es stockholmi Nemzetközi Matematikai Kongresszuson)

Számos elismerésben részesült, mind külföldön, mind a Szovjetunióban díjak, tiszteleti akadémiai tagságok, tiszteleti doktorátusok sora jelzi tekintélyét. Ezek közül talán a legrangosabb az 1980-ban elnyert Wolf-díj. Olyan matematikus volt, aki nemcsak nagyszerû eredményeket ért el, hanem talán mélyebben és szélesebben gondolkodott a matematikáról, mint mások, és ez tette lehetõvé e páratlan teljesítményt. Ilyen tudósokra joggal alkalmazható a „kozmikus" jelzõ, amit szûkebb értelemben Kolmogorov már pusztán az égi mechanikára vonatkozó korszakalkotó felfedezéseivel is kiérdemelt.

Kulcsszavak: *Kolmogorov, valószínûségszámítás, KAM-elmélet*

Cikkünk második és harmadik illusztrációját Staar Gyula szívességébõl közölhetjük.

IRODALOM

Rényi Alfréd (1967): *Levelek a valószínûségrõl.* Akadémiai Kiadó, Budapest. Legújabb kiadás: (1994), TYPOTeX, Budapest

The Annals of Probability. 1989. **17**, 813–964.

Arató Mátyás – Kolmogorov, Andrej Ny. – Szinaj (Sinai), J(Y)akov G. (1962): Evaluation of the Parameters of a Complex Stationary Gauss-Markov Process. Soviet Math. Dokl. 3, 1368–1371. (oroszul: (1962): Ob ocenke parametrov kompleksnovo stacionarnovo gaussovskovo markovskovo processa, DAN SSSR, 146, **4**, 747–750.)

A. A. Novikov (1972): Ob ocenkah parametrov diffuzionnyh processov. Studia Sci. Math. Hung. **7**, 201-209.