MATEMATIKAI MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA A FÖLDTUDOMÁNYOKBAN

Bárdossy György
az MTA rendes tagja
bar4750@iif.hu

Fodor János
az MTA doktora, egy. tanár, Óbudai Egyetem
fodor@uni-obuda.hu

Bevezetés

Mind bonyolultabbá váló civilizációnkban egyre nagyobb szükség van matematikai módszerek alkalmazására. Különösen érvényes ez a földtudományokra, ahol sok esetben közvetlenül nem mérhető jellemzőkkel rendelkező, bizonytalansággal is terhelt komplex problémákat kell megoldanunk. Annak érdekében, hogy ezt minél sikeresebben tehessük meg, az új eszközökön túl új gondolkodásmódra és az eszközök újfajta használatára is szükség van. Célunk az e téren szerzett több évtizedes tapasztalataink átadása, valamint az olvasók figyelmének felhívása új, hatékony módszerek alkalmazásának lehetőségeire.

A fő alkalmazási lehetőségek:

- nagyszámú adat mennyiségi értékelése,
- változók összefüggéseinek meghatározása,
- a számítási eredmények bizonytalanságának meghatározása,
- a döntések kockázatainak meghatározása.

Általános tapasztalatok

Az utóbbi évtizedekben különösen a bizonytalanságok és a kockázatok meghatározása vált fontossá. Mindehhez a fogalmak és a módszerek pontos ismerete szükséges. Ezek ma már ingyen megszerezhetők hiteles internetes forrásokból. Elengedhetetlenül fontossá vált a számítástechnika alkalmazása is. A számítógépek és az informatika gyors fejlődése lehetővé teszi olyan erőforrásigényes módszerek implementálását, amelyek reálisabb, bonyolultabb modelleket is képesek kezelni. Maguk a számítások lehetnek skaláris jellegűek, ha csakis a számokra terjednek ki, továbbá kiterjedhetnek az adatok térbeli helyzetére és folyamatok esetén azok időbeli változásaira.

Minden számítás első lépése a *modellalkotás.* Modellnek nevezzük a természeti valóság leegyszerűsített, de torzításmentes, az emberi elme számára áttekinthető és értékelhető megjelenítését. Első lépés az ún. szakterületi modellek megalkotása, például geológiai, geofizikai, geográfiai, geodéziai, meteorológiai stb. modellek. Ezeken belül megkülönböztetünk ún. tulajdonság-, ábrázolási, folyamat- és genetikai modelleket. Ezeknek a modelleknek természetesen egymással összhangban kell állniuk. Erre szolgál a modellek ellenőrzése, validálása. Ennek elkészülte után kerülhet sor a geomatematikai modellek elkészítésére. Ezek a leíró jellegű földtudományi modellek matematikai formába öntését jelentik. Minden további kutatás alapja a megbízható szakterületi és geomatematikai modellek együttese. A matematikai probléma megoldása analitikus vagy numerikus módszerekkel történhet, folyamatok esetén pedig differenciálegyenletek felhasználására van szükség.

Bármilyen módszerrel történik is a kiértékelés, szükség van az eredmények *bizonytalanságának* mennyiségi értékelésére. E fontos szakterület a legutóbbi időkig viszonylag elhanyagolt volt. A Springer Kiadónál megjelent könyvünkben (Bárdossy – Fodor, 2004) ezért megpróbáltuk teljes részletességgel bemutatni és elemezni a bizonytalanságok matematikai kiértékelését. Kiindulásul megkülönböztettük a biztos és a bizonytalan számokat. Az utóbbiak reprezentálására valószínűségeket, valószínűségi sávokat, intervallumokat, fuzzy számokat vagy hibrid számokat használnak, ezekről később szólunk részletesebben. Azt találtuk, hogy rendkívül fontos a bizonytalanságok osztályozása. Két fő csoportot különböztetünk meg: a természet térbeli és időbeli változékonyságából fakadó bizonytalanságokat, valamint a nem tökéletes ismeretekből eredő emberi hibaforrásokat. Az előbbiek megfelelő matematikai módszerekkel meghatározhatók, de csökkenteni nem lehet őket. Az emberi hibaforrások sokrétűek. Ide tartoznak a szakmai ismeretek hiányosságai, a nem reprezentatív mintavétel, a kutatás módszertani hibái, a mérési hibák, a hibás kiértékelés stb. Ezek meghatározhatók, csökkenthetők, de teljesen nem szüntethetők meg.

A főbb geomatematikai módszerek

Ezek után az általános jellegű ismeretek után a földtudományokban már alkalmazott és alkalmazni ajánlott fő geomatematikai módszereket tekintjük át. Három fő csoportot különböztettünk meg:

- determinisztikus módszerek,
- sztochasztikus módszerek,
- nem sztochasztikus módszerek.

A determinisztikus módszerek gyorsak, egyszerűek, de nem közlik az eredmény bizonytalanságát. Elvben csak biztos, determinisztikus rendszerek értékelésére alkalmasak, minden más esetben csak közelítő értékűek.

A geomatematikában legelterjedtebbek a valószínűségelmélet alapján álló *sztochasztikus módszerek.* E módszerek két fő csoportra oszthatók. Első a statisztikus vagy frekventista módszerek csoportja, amely a gyakorisági eloszlást veszi alapul. E közismert módszerek lehetnek egy- és többváltozósak. A földtudományi alkalmazásokban különösen fontosak a változók összefüggéseit, korrelációját vizsgáló eljárások. Tapasztalataink szerint a földtudományokban a korrelációk többnyire nem lineárisak, ezért a lineáris összefüggést feltételező Pearson-féle korrelációs együttható használata csak akkor indokolt, ha meggyőződtünk a korreláció lineáris jellegéről. A sokváltozós módszerek is igen hasznosak. Említést érdemel a klaszterelemzés, a főkomponens- és a diszkriminancia-elemzés, valamint a parciális és a multikorrelációs értékelés. Mindezeket közismertnek tételezzük fel.

A másik fő csoport a *Bayes-elven* alapul, és főként időben előre haladó kutatásoknál alkalmazható sikeresen, például fúrásos nyersanyagkutatás esetén. Az értékelés a kimenetel valószínűségére vonatkozik, mégpedig újabb vizsgálatok előtt és után. A Bayes–Laplace-képlet segítségével kiszámíthatók az előzetes (prior) és az utólagos valószínűségek (posterior probabilities.) A számításoknál jól alkalmazhatók az ún. *maximum-likelihood* függvények és a szekvenciális diagramok. Mindezek a számítások a kutatások optimális befejezését teszik lehetővé. A Bayes-elvre alapuló módszerek a frekventista módszereknél jóval kevésbé elterjedtek, holott tapasztalataink szerint alkalmazásuk sok esetben igen hatásos.

A térbeli eloszlásokra vonatkozó rendkívül hatékony új módszert dolgozott ki a hetvenes években George Matheron francia professzor (Matheron, 1971), aki módszerét *Theory of regionalized variables* névvel illette. Sajnos, a közhasználatban e helyett a jóval kevésbé helytálló *geostatisztika* elnevezés terjedt el. Fő értéke a változók térbeli eloszlását leíró *variogramok* kidolgozása volt, amelyekkel a térbeli interpoláció és extrapoláció határait, az ún. hatástávolságokat lehet meghatározni. Ennek a földtudomány minden szakterületében óriási jelentősége van. Ezt fejlesztette tovább a pontokra és blokkokra vonatkozó *pont-* és *blokk-krigelés,* amely a térbeli átlagolásra nyitott lehetőséget. Hibaforrás itt az, hogy a krigelés lineáris egyenletrendszerek megoldására épül, holott tapasztalataink szerint a földtudományokban az összefüggések túlnyomó része nem lineáris jellegű. Váratlan előrelépést jelentett e téren a nemrég publikált *magasabb rendű sztochasztikus szimulációk módszere* (Mustapha–Dimitrakopoulos, 2010), amely a nem lineáris térbeli összefüggésekre is korrekt megoldást tesz lehetővé. A módszer hátránya, hogy eléggé nagy matematikai apparátus használatát teszi szükségessé.

A térbeli adathalmazok értékelését teszik lehetővé a *Markov-láncok,* amelyek időben egymásra következő események vagy térben egymást követő rétegek összefüggéseit világítják meg, például üledékes kőzetekben.

A sztochasztikus módszerek egy kiemelt fontosságú csoportját képezik a *Monte-Carlo-módszerek,* amelyek az adott földtani képződményt vagy folyamatot jellemző egyes valószínűség-eloszlásokból vett, számítógép segítségével előállított ismételt mintavételből állnak. Említést érdemel, hogy a módszert a második világháború idején az ún. Los Alamos-i kutatócsoport dolgozta ki. A módszerre akkor rejtjeles elnevezést írtak elő, amelyre hazánk fia, Neumann János adta a Monte-Carlo-szimuláció elnevezést. A módszer igen széles körű alkalmazást nyert számítógépes programjának könnyű alkalmazhatósága és az eredmények jó értékelhetősége miatt. Hátránya, hogy gyakran nem veszi figyelembe a kis gyakoriságú értékeket, holott következményeiket tekintve sokszor ezek a legfontosabbak. Célszerű ezért kiegészítésül a *Latin hypercube* számítógépes mintavételt alkalmazni (Imam – Shortencarier, 1984), amely a kis gyakoriságokra is kiterjed. A Monte-Carlo-módszer igen érzékenyen reagál a változók közötti korrelációs kapcsolat nagyságára és előjelére. Ennek mellőzése is hibaforrás lehet. Megjegyezzük: az eljárás félkvantitatív vagy kvalitatív adatok, illetve a nem statisztikai jellegű bizonytalanság elemzésére alkalmatlan.

Különösen bonyolult feladat az ún. *kaotikus rendszerek* elemzése. Nem lineáris, dinamikus, hiperérzékeny rendszerek ezek, ahol a kiinduló állapot kis különbségei a továbbiakban érdemi eltérésekhez vezetnek. E rendszerek különösen a meteorológiai jelenségek esetében gyakoriak. Matematikai értékelésük rendkívül nehéz. A megoldáshoz ún. *attraktorokat* használnak, amelyek a kiinduló állapotot rögzítik pontok, hurkok vagy felületek formájában. A kaotikus rendszerekben az előre meghatározhatóság (predictability) határai jellegzetesen elmosódottak.

A fenti módszerekkel kapott eredmények bizonytalanságát fejezi ki egyetlen számmal az ún. *entrópia.*

Hibaforrás lehet az egyszerű és az összetett bizonytalanságok megkülönböztetése és a hibaterjedés törvényeinek mellőzése. Megoldást a *„nemsztochasztikus módszerek”* kidolgozása hozott, amelyek a klasszikus valószínűség-elmélet eszköztárához kínálnak alternatív megoldásokat, illetve annak különböző irányú kiterjesztéseit jelentik. A bemenő adatok bizonytalanságát képesek matematikailag leírni különböző típusú *bizonytalan számok* segítségével. Emellett biztosítják a korrekt hibaterjedést a számítások során. A következőkben e módszereket tekintjük át röviden.

Legegyszerűbb az ún. *intervallumanalízis.* A módszer a valós (crisp) számokat intervallumokkal helyettesíti, amelyek a bizonytalanság mértékét fejezik ki (Moore, 1966). Feltételezzük, hogy a bizonytalan szám igazi értéke valahol az intervallumban van. Az intervallumanalízisben nincsenek fokozatok, és ez a legegyszerűbb módszer a bizonytalanság kifejezésére. Az eljárás garantálja, hogy az aritmetikai műveletek során az igazi érték mindig az intervallumon belül marad, de ez a pontosság rovására megy. A számítások során ugyanis az intervallumok egyre szélesebbek lesznek, így a végeredmény túl konzervatív.

A *Dempster–Shafer-elmélet (DST)* a szubjektív valószínűség Bayes-féle elméletének általánosítása, a bizonyosság (evidence) matematikai elmélete. Megkülönbözteti a probléma *bizonytalanságát* (uncertainty) az *ismerethiánytól* (ignorance). A módszer egy állításnak nem a valószínűségét számolja ki, hanem azt, hogy mennyi annak valószínűsége, hogy a bizonyíték támogatja az állítást. A bizonyosságnak ezt a mértékét *bizonyosságfüggvénynek* (belief function) nevezik. Arthur P. Dempster kombinációs szabálya a bizonyosságok kombinációját teszi lehetővé (Dempster – Shafer, 1976; Yager – Liu, 2008). A módszer alkalmazása elég nagy matematikai felkészültséget és apparátust igényel.

A *valószínűségi korlátok elmélete* (Ferson et al. 1999) kombinálja a valószínűség-számítást az intervallumanalízissel. A bizonytalanságot egy alsó és egy felső kummulativ eloszlásgörbe közti terület nagysága fejezi ki. Minél nagyobb e terület, annál nagyobb a bizonytalanság. A valószínűségi korlátok a *crisp* számok, intervallumok és valószínűség-eloszlások általánosításaiként foghatók fel. E módszer nagy előnye, hogy különböző valószínűség-eloszlásokat (például normális, lognormális, exponenciális) és korrelációkat alkalmazhat a tanulmányozott változókra. A valószínűségi korlátok keskenyebbek lesznek az adott földtani képződményre vonatkozó több empirikus információ esetén. Az eljárás hátránya, hogy az elvégzendő számítások komplikáltabbak.

A *lehetőségelmélet* (possibility theory), amely az intervallumanalízis általánosításának is tekinthető, egy a bizonytalanság számszerűsítésére alkalmas modellt kínál egy esemény bekövetkezésének lehetősége alapján (Zadeh 1978, Dubois – Prade, 1988). Az elmélet azt veszi alapul, hogy nem minden típusú bizonytalanság kezelhető valószínűségi eloszlásokkal. Ehelyett tagságfüggvényeket használ a nem számszerűsített bizonytalanságra. Egy változó esetén egy valós szám tagságértéke (amely 0 és 1 között változhat) azt fejezi ki, hogy e szám a változónak milyen mértékig elfogadható, elhihető értéke.

Az ehhez kapcsolódó *fuzzy halmazok elmélete* (fuzzy set theory) a bizonytalanságot gyakran *fuzzy számok* segítségével fejezi ki. Ezek a bizonytalanság becslését különböző lehetőségi szinten fejezik ki. A fuzzy számok definíció szerint unimodálisak, és legalább egy helyen el kell érniük az 1 szintet, vagyis a teljes lehetőséget. A geológiában főleg háromszög és trapéz alakú fuzzy számokat alkalmaznak. Ezek lehetnek szimmetrikusak és aszimmetrikusak is. Az adott változó lehetséges (szóba jöhető) legkisebb és legnagyobb értékei reprezentálják a fuzzy száma *tartójának* alsó és felső korlátját. A változó összes értéke e két korlát közé esik. Azok az értékek, amelyek lehetőségének foka 1 (ezek alkotják a fuzzy szám *magját*) a leginkább elképzelhető értékei a változónak. A fuzzy számok a valós (crisp) számok általánosításai, mivel ez utóbbiak olyan fuzzy számként foghatók fel, amelyek tartója egyetlen pontból áll. Az aritmetikai műveletek kiterjeszthetők fuzzy számokra is. Ezek nagy előnye, hogy nem kívánják meg a változók közti korreláció és a valószínűség-eloszlás típusának ismeretét. A numerikus összehasonlítás és rendezés céljából a fuzzy számokat visszakonvertálhatjuk crisp számokká. Ezt az eljárást *defuzzifikálásnak* nevezik. A fuzzy számok fő előnye az, hogy a korábbi geológiai tapasztalat beépíthető a fuzzy számok konstrukciója során. A módszer lehetővé teszi a félkvantitatív vagy kvalitatív bemenő adatok kiértékelését is. A geológiai populációk gyakori átmenetei szintén reprezentálhatók fuzzy számok segítségével.

A *hibrid aritmetika* a valószínűség-eloszlásokat kombinálja intervallumokkal, fuzzy számokkal és valószínűségi korlátokkal. A módszer lehetővé teszi bármely korábban említett „bizonytalan szám” használatát, és ez nagy előnye.

A *neurális hálózatok* rugalmas csomópontokból állnak, amelyek egy példákra épülő tanulási folyamat során tárolják a tapasztalati tudást, és elérhetővé teszik azt számunkra. Különösen alkalmasak olyan komplex geológiai rendszerek és folyamatok kiértékelésére, illetve összetevőinek szétválasztására, amelyeket túl bonyolult megérteni a hagyományos modellezés segítségével. Egy betanított neurális hálózat úgy tekinthető, mint egy „szakértő”. Neuro-fuzzy rendszereket is kifejlesztettek, az adatokban meglévő bizonytalanság nézőpontjából (Fullér, 2000).

A reménybeli nyersanyagkészletek felkutatásának elősegítésére dolgozták ki a *weights of evidence* nevű módszert és számítógépes programot (Agterberg, 1989), amely az előfordulások legjellemzőbb ismérveit súlyozza. A bizonytalanságok jobb leírására később a fuzzy tagságfüggvényeket is alkalmazták (Cheng–Agterberg, 1999). A módszert a hazai bauxitkutatásban a közelmúltban sikerrel alkalmaztuk.

A mért pontok, pl. fúrások közötti interpolációra nyújtott az eddigieknél pontosabb módszert az ún. *copulák* (magyarul kötelékek) módszere. Ez az adott változók együttes, sokváltozós standardizált eloszlásával dolgozik, egységesített marginális értékekkel. A módszert Bárdossy András (2008) talajvizek összetételének térképi értékelésére alkalmazta a hagyományos geostatisztikai interpolálásnál pontosabb és részletesebb eredménnyel.

Különböző dimenziókban ismétlődő alaki jelenségek jobb értékelését teszi lehetővé a *fraktálgeometria* módszere. A jelenséget Benoît Mandelbrot (1982) ismerte fel, és azóta használata széles körben elterjedt.

Térbeli irányított tulajdonságok értékelésére szolgának a *trend-felszín elemzések, a vektormező elemzések* és a *pólus-eloszlás diagramok.*

Idősorok, például víz vagy légköri áramlatok értékelésére alkalmas az ismert Fourier-elemzés módszere, valamint a periodogramok készítése.

A módszerek földtudományi alkalmazásának tapasztalatai

Befejezésül a felsorolt módszerek földtudományi alkalmazásának tapasztalatait tekintjük át. A legtöbb ismertetett módszert az ásványi nyersanyagkutatásban és a készletek kiszámításában alkalmazzák. Tapasztalataink szerint ezek közül a Bayes-statisztika alkalmazása nyújtja a legtöbb új lehetőséget. A geofizikai kutatásokban a fenti módszerek speciális felhasználását jelenti az ún. *inverz-értékelés,* amely az elméleti modellek és a mért eredmények egybevetésével történik. A bányászatban és a bányaföldtanban a mennyiség/minőség (grade/tonnage) összefüggések értékelése jelent geomatematikai újdonságot (Singer–Menzie, 2010).

Rendkívül fontos feladatkört jelent a természeti veszélyforrások (földrengések, cunamik, vulkánkitörések, hurrikánok stb.) előrejelzése, amelyben a Bayes-statisztikának van különös jelentősége. A hulladékelhelyezésben elsősorban a radioaktív hulladék biztonsági elemzéseiben van kiemelt szerepe a sztochasztikus és nemsztochasztikus módszereknek. A környezettudományban a hagyományos statisztikai módszerek mellett a nemsztochasztikus módszerek alkalmazása jelentene előrelépést. A meteorológiában ugyanez a helyzet, kiegészítve a kaotikus rendszerek értékelésének módszereivel. Végül a hidrológiában a nemsztochasztikus módszerek és a copulák alkalmazása ajánlott.

A földtudomány minden szakterületének kutatásai során sor kerül cselekvésről vagy nem cselekvésről való *döntésre*. Mindkettőnek lehetnek jó vagy rossz következményei. Ezek meghatározását, előrejelzését teszi lehetővé a matematikai *kockázatelemzés.* Ennek elvi lépései a következők:

- az összes lehetséges kimenetel meghatározása;
- a kimenetelek valószínűségeinek kiszámítása (erre a sztochasztikus és nemsztochasztikus módszerek együttes alkalmazása a leghelyesebb);
- az egyes kimenetelek következményeinek kiszámítása (lehetnek anyagiak, technikaiak, ökológiaiak, környezetiek stb).

A kiinduló feltételek és a számítások eredményeinek bizonytalansága miatt az eredmények bizonyos mértékig a tervezettől eltérő, véletlen jellegűek lehetnek. E bizonytalansági tényezőkkel és következményeikkel 2004-ben megjelent könyvünkben részletesen foglalkoztunk. Legfontosabb tapasztalataink a következők: Gyakran előfordul, hogy a kis valószínűségű kimeneteleket nem veszik figyelembe, holott sok esetben ezek következményei a legsúlyosabbak. Tudomásul kell venni, hogy a kimenetelek valószínűsége is csak bizonytalansággal határozható meg, amit közölni is kell. A következmények nagysága is bizonytalan. Az ún. érzékenységelemzések (sensitivity analysis) szolgálnak a befolyásoló tényezők szerepének meghatározására. Itt is kiemelt fontosságúak lehetnek a kis gyakoriságú tényezők, sőt az is előfordulhat, hogy kiütő értékeknek (outliers) minősítik őket.

Tapasztalataink szerint a hagyományos kockázatelemzési módszerek, például az ún. *worst case analysis,* nem mindig vezetnek megbízható eredményekhez. Helyette a fuzzy logika és az ún. hibrid módszerek alkalmazását ajánljuk. Sajnos napjainkig is gyakran szakértői véleményt (expert's opinion) használnak matematikailag korrekt kockázatelemzés helyett. A következmények katasztrofálisak lehetnek (például az idei kőolaj- és földgázkiömlés a Mexikói öbölben). Nem tartozik a földtudomány szakterületéhez, de az ajkai vörösiszap-katasztrófát is el lehetett volna kerülni – véleményünk szerint – megfelelő kockázatelemzésekkel.

Az elmondottak alapján a földtudományokban a geomatematikai alkalmazások optimális sorrendje a következő:

- szakterületi és geomatematikai modellezés;

- reprezentatív mintavétel, beleértve a szükséges méréseket;
- számítógépes adatbázisok kialakítása;
- az alkalmazandó geomatematikai módszerek kiválasztása;
- a mérettartomány-hatás (scaling effect) figyelembe vétele;
- a számítási eredmények bizonytalanságának meghatározása;
- kockázatelemzés a szükséges döntések meghozatalához;
- átlátható és világos jelentés készítése az esetleges alternatív lehetőségek bemutatásával.

Tapasztalataink szerint a mérettartomány-hatás mind térbeli, mind időbeli tekintetben jelentős lehet, nem hanyagolható el.

Záró következtetések

A matematikai módszerek sikeres alkalmazásához a földtudományi és a matematikai szakemberek szoros együttműködése szükséges.

Célszerű több alternatív matematikai módszert alkalmazni, mert eredményeik többnyire kiegészítik egymást.

A szakértői vélemény többnyire nem nyújt kellő biztonságot a szükséges döntések meghozatalához. Matematikailag korrekt, korszerű biztonság elemzések elvégzését nélkülözhetetlennek tartjuk.

Kulcsszavak: *geomatematika, bizonytalanság, kockázatelemzés, nemsztochasztikus bizonytalanságkezelő módszerek*

IRODALOM

Agterberg, Frits (1989): Computer Programs for Mineral Exploration. *Science*. 245, 76–81.

Bárdossy András – Li, Jing (2008): Geostatistical Interpolation Using Copulas. *Water Resources Research.* 44, 1–15.

Bárdossy György – Fodor János (2004): *Evaluation of Uncertainties and Risks in Geology.* Springer, Berlin–Heidelberg, http://books.google.com/

Cheng, Quiming – Agterberg, Frits (1999): Fuzzy Weights of Evidence Method and its Application in Mineral Potential Mapping. *Natural Resources Research*. 8, 27–35. • http://www.springerlink.com/content/lxxw81047v8n6306/

Dempster, Arthur – Shafer, Glenn (1976): *A Mathematical Theory of Evidence.* Princeton University Press

Dubois, Didier – Prade, Henri (1988): *Possibility Theory.* Plenum Press, New York.

Ferson, Scott – Root, W. – Kuhn, R. (1999): Risk Assessment with Uncertain Numbers. *Applied Biomathematics*, New York

Fullér Róbert (2000): *Introduction to Neuro-Fuzzy Systems*. Physica-Verlag, Heidelberg

Imam, R. L. – Shortencarrier, M. J. (1984): *A Fortran 77 Program and Users' Guide for the Generation of Latin Hypercube and Random Samples for use with Computer Models.* Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico

Mandelbrot, Benoît B. (1982): *Fractal Geometry of Nature*. Freeman and Co., New York

Matheron, Georges (1971): *The Theory of Regionalized Variables and its Applications*. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau • http://cg.ensmp.fr/bibliotheque/public/MATHERON_Ouvrage_00167.pdf

Moore, Ramon E. (1966): *Interval Analysis.* Prentice-Hall. Englewood Cliffs, New Jersey.

Mustapha, Hussein – Dimitrakopoulos, Roussos (2010): High-order Stochastic Simulation of Complex Spatially Distributed Natural Phenomena. *Mathematical Geosciences*. 42, 457–485. • http://www.springerlink.com/content/t751vpr35472x006/

Singer, Donald A. – Menzie, W. David (2010): *Quantitative Mineral Resource Assessments.* Oxford University Press

Yager, Ronald R. – Liu, Liping (2008): *Classic Works of the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions*. Springer, Berlin.

Zadeh, Lotfi (1978): Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility. *Fuzzy Sets and Systems*. 1, 3–28.