TUDOMÁNYOS MŰHELY

Néhány gondolat a matematikai kutatásról

ELÖLJÁRÓBAN Jelen írásomban legalább annyi szó fog esni magáról a matematikáról, mint a matematikai kutatásról. Erre az késztet, hogy soraimat elsősorban matematikailag nem képzett olvasóknak szánom. Utalnom kell a matematika bizonyos fejlődési tendenciáira, különben érthetetlenekké válnak a kutatási problémák. A címet azonban nem valamilyen szerkesztői elgondolás sugallta: magam választottam. Hangsúlyozni szeretném vele, hogy elsősorban a kutatásról akarok néhány gondolatot kifejteni. A többi körítés. De nélkülözhetetlen.

Sietve szólok kutatótársaimhoz is. Elsősorban algebristákhoz. Azokhoz, akik alkotóerejük teljében vannak, és a fiatalokhoz. Előző soraim miatt ne tegyétek félre ezt az írást. Hozzátok is szólok. Egy programra akarok utalni, amit évek óta népszerűsítek. Itthon, Budapesten, Padovában és másutt. És sokan egyetértenek velem. Talán jó lenne megvalósítani. Még egyet: bocsássatok meg, ha néhány matematikai fogalmat nem teljes szigorral fogalmazok. Azt itt nem tehetem.

Mondanivalómat elsősorban személyes élményanyagomhoz kötöm. Mint előadó sok mindennel foglalkoztam. De mint kutató, főképpen algebrista vagyok. Tehát a beígért matematika helyett többnyire algebráról fogok írni. Ez a címmel kapcsolatos újabb visszaélésnek tűnik. Kissé az is. De nem túlzottan. Mert a jelenkori algebra behálózza az egész matematikát. Egyidejűleg iránytű és nélkülözhetetlen segédeszköz.

ÉRDEKLŐDÉS A MATEMATIKA IRÁNT Sokszor megkérdeznek: a matematikai kutatáshoz lényegében valóban csak ceruza és papír szükséges? Vagy: lehet-e egyáltalán még valami újat felfedezni a matematikában? Vagy: miképpen lehet új eredményekhez jutni a matematikában? Nem értek egyet azokkal a szaktársaimmal, akik az ilyen és hasonló kérdésekre csak legyintenek. Főleg ha elnéző vagy éppen lenéző mosollyal legyintenek. Mert ezek a kérdések „abszolút értékben" valóban naivak. De a lényeges szerintem az, hogy az emberek mindinkább látják: a matematika egyre nagyobb teret hódít. Hiszen a legklasszikusabb alkalmazási területein, a fizikán és a különféle műszaki diszciplínákon kívül behatolt minden természettudományba, a gazdaságtudományba, a nyelvészetbe, a társadalomtudományokba. Ezt látják az érdeklődők. Egyesek úgy vélik, hogy egy már teljesen kialakult matematikai apparátus alkalmazásáról van szó. Ez tévedés. Mások ösztönösen megérzik azt, hogy a matematika egyre növekvő hatékonyságát saját fejlődése biztosítja. Ez helyes. Ez a kérdés egyre nagyobb közönséget foglalkoztat, s erre csak a matematikus próbálhat választ adni. A legyintésből pedig vajmi kevés pozitívum érthető meg.

A MATEMATIKÁRÓL SZÓLÓ INFORMÁCIÓ NEHÉZSÉGEI Ezt talán le sem kellett volna írnom. Félek, hogy megsértettem valamelyik szaktársamat. Tehát megmagyarázom a legyintés leggyakoribb okát: sok mindent képtelenek vagyunk megmagyarázni a matematikailag nem képzett társalgónak. Egyszerűen azért, mert a matematika rendkívül elvont fogalomrendszerét és az azt leíró formalizmusrendszert gyakran nem lehet „közel hozni" a laikushoz. Egy ókori szállóige kissé módosított változatával élve: a matematikához nem vezet „királyi út". De azért vannak kérdések, amelyek intuitíve megérthetők.

Most pedig attól tartok, hogy soraimból akaratom ellenére is valamelyes szakmai gőg érezhető ki. Erről szó sincsen. Tudatában vagyok annak, hogy egy humanisztikus beállítottságú és foglalkozású ember nem emészthet fel életéből annyi energiát, hogy a matematika absztrakt világához közel jusson. Az viszont kétségtelen, hogy valamivel közelebb kell jutnia. De ez már az oktatás problémája. A jelen és a jövő oktatásáé. És az oktatás óriási erőfeszítéseket tesz ebben az irányban.

NÉHÁNY SZÓ AZ ALGEBRÁRÓL Ahhoz, hogy a jelenkori algebrai kutatásokról megközelítőleg helyes képet alkossunk, szólnom kell magának az algebrának a fejlődéséről. Ez elsősorban azért fontos, mert algebrán különböző korokban mást és mást értettek — és jelenleg az algebra szó mást fed, mint amire a nagyközönség általában gondol. Ebből a szempontból az algebra különbözik a matematika más klasszikus diszciplínáitól, amelyek nyilvánvalóan fejlődtek, gazdagodtak, mind átfogóbbá váltak vizsgálati tárgyuk és módszereik szempontjából, de struktúrájuk szempontjából nem változtak meg.

BETŰKALKULUS Az algebra valójában egyidős a matematikával. De mint különálló matematikai diszciplínát a XVI. század óta tartják nyilván. Ekkor teremtette meg Viète, latinosan Vieta, azt a formális betűkalkulust, amelyet ma minden kisdiák jól ismer.

A számokkal végzett műveletek szabályainak ez az absztrakt kifejezése, formalizálása — bármennyire egyszerűnek tűnik is ma — valósággal forradalmasította a matematikát. Lehetővé tette a már ismert általános szabályszerűségek rövid alakban való felírását és egyre újabb törvények felfedezését. A matematikus kezébe olyan eszköz került, amely hozzásegítette ahhoz, hogy hosszas és sok hibalehetőséget tartalmazó gondolatmeneteket játszi könnyedséggel elvégezzen. Jelentős szellemi erőfeszítést igénylő eszmefuttatások apró számítástechnikai problémákká szelídültek. Könnyen érzékelheti az olvasó a fenti megállapítások helyességét, ha megpróbálja szavakban, mondatokban elmondani a másodfokú egyenlet valóban egyszerű gyökképletében megfogalmazott törvényszerűséget. Még inkább érzékelheti, ha végiggondolja azokat a számításokat, átalakításokat, melyeket e gyökképlet levezetéséhez használunk — és megpróbálja ezeket az elemi algebra formalizmusrendszere nélkül mondatokban leírni. Márpedig az említett formalizmusrendszer felfedezése előtt ily módon kellett eljutni a matematikai igazságokhoz.

A formális betűkalkulust jelentő algebra tehát lehetővé tette a matematikus számára, hogy biztosabb kézzel nyúljon nehezebb feladatok megoldásához. És a matematikusok éltek is ezzel a lehetőséggel. Jelentős eredményeket értek el az algebrai egyenletek tanulmányozása terén. A fizikai jelenségek leírásának szükségességéből megszületett a mai néven matematikai analízisnek ismert diszciplína, a geometria algebrizálása révén az analitikus mértan. Ebben a lenyűgöző fejlődésben a Viète által megteremtett algebra egyszerű segédeszközzé vált.

EGYENLET-ELMÉLET

Az algebra igazi építményét, tárgyát a XVIII. század második felétől kezdve már kétségtelenül a polinomok zérushelyének vizsgálata, más szóval az algebrai egyenletek (röviden: egyenletek) elmélete alkotta. A név maradt, a tárgy megváltozott. Ma általában klasszikus algebra elnevezéssel szoktuk jelölni azt az algebrát, melynek tárgya az egyenletek elmélete. Ennek elemeivel ma már minden líceumot végzett diák megismerkedik.

A múlt század fordulóján és első felében az egyenletek elmélete tetőfoka felé közeledett. Azt a már korábban megfogalmazott sejtést, mely szerint minden n-ed fokú, komplex együtthatójú egyenletnek van gyöke a komplex számok körében, következésképpen pontosan n számú ilyen gyöke van — többféleképpen is bizonyították. A valós együtthatójú egyenletek tetszőleges, adott intervallumba eső (valós) gyökeinek számát meghatározták. Már korábban ismeretes volt az első-, másod-, harmad- és negyedfokú egyenletek gyökképlete. Most sikerült bizonyítani azt, hogy a négynél magasabb fokú általános egyenlet esetén ilyen gyökképletet találni nem lehetséges — ezért a keresésére irányuló kísérleteket is nyilvánvalóan fel kell függeszteni. Ez a negatív eredmény különösképpen kihangsúlyozta a valós együtthatójú egyenletek valós gyökeinek meghatározására szolgáló közelítő módszereknek nem csupán gyakorlati, hanem elvi jelentőségét is.

A JELENKOR ALGEBRÁJÁNAK BÖLCSŐJÉNÉL

Ilyen előzmények után sikerült megtalálni annak feltételét, hogy egy adott, tetszőlegesen választott egyenletnek egy adott számtestben (a számok egy olyan halmazában, amelyben a négy alapművelet elvégezhető) legyen megoldása. E jelentős eredmények természetesen nevekhez fűződnek. Nagy nevekhez. Itt jegyezzük meg csupán a legutóbb említett eredmény felfedezőjét: Évariste Galois. Ez a huszonegyedik életévében tragikus halált halt lángész üstökös volt a matematika egén. Eredményeivel kupolát emelt a klasszikus algebra épületére. De igazi jelentőségét nem kutatási eredményei képezik, hanem az a módszer, amelyet eredményei elérésére alkalmazott. Majdnem másfél évszázad távlatából világosan látszik, hogy vizsgálati módszerei döntő módon befolyásolták a matematika későbbi fejlődését, azt valósággal forradalmasították. Galois a vizsgált egyenlethez hozzárendelte gyökei sokaságának egy bizonyos permutációs csoportját (erről a fogalomról még lesz szó). E csoport szerkezetében találta meg a keresett feltételt. Ezzel ráirányította a figyelmet az ún. algebrai struktúrák vizsgálatára.

ALGEBRAI STRUKTÚRÁK Mit nevezünk algebrai struktúrának? Egy halmazt, amelyben értelmezett egy vagy több művelet (vagy valamivel általánosabban: halmazt, amelynek elemei között értelmezett egy vagy több reláció). A műveletek jellege, száma és tulajdonságai alapján osztályozzuk a struktúrákat. A csoport például egyetlen (kétváltozós) művelettel ellátott olyan struktúra, amelyben a művelet asszociatív és invertálható.

A Galois által elhintett magok gyökeret vertek a matematika talajában, a szárba szökkent fa gyorsan terebélyesedett. Ez nem is meglepő, hiszen egyre több forrásból táplálkozott, így a számelméletből, a geometriából, a közben kialakult matematikai logikából és más matematikai diszciplínákból. A matematika egyre több ágában fedezték fel, hogy bizonyos alapvető tulajdonságok jellemzését egyrészt bizonyos algebrai struktúrák szerkezetének vizsgálata révén, másrészt bizonyos objektumok közötti relációk révén lehet megadni. Ezeknek a struktúráknak természetesen konkrét elemei vannak a különböző diszciplínákban: számok, geometriai transzformációk, logikai ítéletek stb. A relációk is konkrétak: oszthatóság, nagyságrendi rendezés, hasonlóság, ekvivalencia stb. De a műveletek tulajdonságai szempontjából a legkülönbözőbb matematikai diszciplínákban szereplő struktúrák közös vonásokat mutatnak. Hasonló megállapítás érvényes a relációk esetén is. Szükségessé vált tehát az absztrakt algebrai struktúra és az absztrakt reláció fogalmának megteremtése. Ehhez viszont le kellett mondani a különböző matematikai fogalmak egyéni jegyeiről. Meg kellett teremteni egy eléggé „színtelen" fogalmat, amely az összesség fogalmának matematikai kifejezője. Ez a halmaz absztrakt fogalma. Erre visszavezethető a reláció absztrakt fogalma. Ez utóbbira visszavezethető a művelet absztrakt fogalma. Most már tanulmányozhatók az absztrakt struktúrák, az olyanok, amelyeknél az elemek milyensége, „egyénisége" nem érdekel bennünket — csupán a műveletek tulajdonságai, az elemek közötti relációk tulajdonságai.

SZINTÉZIS Ez a gondolat-ökonómiai szempontok mellett azért is fontos, mert lehetővé teszi, hogy a különböző matematikai diszciplínákra magasabb, egységes szempont szerint tekintsünk. Lehetővé teszi, hogy felfedezzük és kifejezzük a közös vonásokat, hogy magasabb szempontból szintetizáljunk — tehát egyúttal egyszerűsítsünk. Ebben a szintetizáló folyamatban az egyes diszciplínák egymáshoz közelebb kerülnek, a közöttük levő éles határvonalak eltűnnek, feloldódnak. Látszólag különböző törvények azonosulnak, vagy egy általánosabb törvényszerűség speciális eseteinek bizonyulnak. Íme a XX. század algebrájának, az absztrakt struktúrák tudományának jelentősége. A jelenség megismétlődött: megmaradt az algebra elnevezés, de most már elsősorban az absztrakt algebrai struktúrák elméletét jelenti.

TOPOLÓGIA A leírt absztrakt apparátus még nem alkalmas arra, hogy a határértékkel és az ezzel kapcsolatos folytonossági fogalommal kapcsolatos kérdéseket lényegbevágóan tanulmányozhassa. Ezek a kérdések viszont át- meg átszövik a matematikát. A bonyolultabb fizikai jelenségek leírásának szükségességéből született a XVII. és XVIII. század fordulóján, Newton és Leibniz munkássága révén, a határérték fogalmára alapozott diszciplína: a matematikai analízis, a differenciál- és integrálszámítás tudománya. Módszerei lassan behatoltak a matematika sok más ágába. Még a látszólag nagyon távol álló számelmélet sem nélkülözheti őket. A klasszikus matematikai analízis ragyogóan betöltötte szerepét mindaddig, amíg a jelenségek leírására elegendő volt a valós számok halmazában, „terében" maradni. Bonyolultabb jelenségek szükségessé tették a klasszikus analízis módszereinek általánosabb terekre való kiterjesztését is. A kérdésnek magasabb szempontból való vizsgálata itt is szükségessé tette olyan halmazok, „terek" vizsgálatát, amelyekben a határérték és folytonosság fogalmának értelme van. Ehhez meg kellett találni egy olyan fogalmat, amely egy absztrakt halmazban bizonyos esetekben értelmezhető, és amellyel a határérték és folytonosság fogalma absztrakt módon meghatározható. Ez a „környezet" fogalma. Az adott halmaz minden eleméhez (szokásosabb kifejezéssel: az adott „tér" minden „pontjához") hozzárendelünk egy bizonyos részhalmazrendszert, az adott pont „környezeteit". Ha e környezetrendszerek bizonyos tulajdonságokkal rendelkeznek, akkor a vizsgált halmazban az említett fogalmak értelmezhetők. E halmazokat topologikus tereknek nevezzük. Ezekkel a topológia foglalkozik — századunk matematikájának másik nagy absztrakt ága.

A környezetrendszer megadása bizonyos reláció megadásával egyenértékű. Ily módon a struktúrák elmélete és a topologikus terek elmélete is két alappilléren, a halmaz és a reláció absztrakt fogalmain nyugszik.

TOPOLOGIKUS ALGEBRA

A legfontosabb vizsgálati területeken az algebrai és topologikus szerkezet egyidejűleg, összefonódva lép fel. Pontosabban, olyan algebrai struktúrákról van szó, amelyek egyúttal topologikus terek és az (algebrai) műveletek folytonosak. Ezek a topologikus struktúrák, amelyek már alkalmasak mind a műveletekkel (algebrai szempont!), mind a folytonossággal (topologikus szempont!) kapcsolatos törvényszerűségek leírására. Az előzőekből kitűnik, hogy ezek elmélete, a topologikus algebra egyrészt a klasszikus algebrában, másrészt a (klasszikus) matematikai analízisben gyökerezik, és a matematika majd minden ágából táplálkozva serdült fel.

IRÁNYTŰ A JELENKOR MATEMATIKÁJÁBAN

Lehetővé teszi a matematika legalapvetőbb kérdéseinek magas szinten való vizsgálatát. A matematikai fogalmaknak és módszereknek egy olyan szintézisét képezi, amely lehetővé teszi, hogy egységes törvényekbe foglaljuk össze a matematika különböző ágainak bizonyos alapvető — látszólag különböző — törvényeit. Lehetővé teszi azt az egyszerűsítő, szintetizáló vizsgálatot, amely nélkül nehezen képzelhető el a tájékozódás a jelenkor matematikájában, és ennek következtében a matematikának további fejlődése.

FÉLREÉRTÉSEK ELKERÜLÉSE CÉLJÁBÓL

Az említettekhez négy megjegyzést kell fűznöm.

Az egyik századunk két nagy matematikai diszciplínájának kialakulásával kapcsolatos. Az olvasónak tudnia kell egyrészt azt, hogy ezek kialakulásában sokkal több tényező játszott szerepet, mint amennyit írásom tükröz. Én csak a leglényegesebb szempontokra hívtam fel a figyelmet. Másrészt azt is tudnunk kell, hogy a kialakulás folyamata nem volt olyan töretlen, olyan egyszerűen logikus, mint ahogyan esetleg a vázlatos történeti áttekintésből kitűnik. Sok buktató, sok mellékút nehezítette a fejlődést.

Másik megjegyzésem: nehogy valaki arra a következtetésre jusson a fenti sorok alapján, hogy a matematika e két absztrakt ága helyettesíteni tudja a már kialakult diszciplínákat, azokat feleslegessé teszi. Földünkről nagy magasságból, mondjuk egy mesterséges holdról készített fénykép nem helyettesíti, nem teszi feleslegessé a pontos geodéziai mérések alapján készített részlettérképeket. Lehetséges, hogy e hasonlat méreteiben torzít, de mondanivalóm lényegét tükrözi. Másrészt a magasabb absztrakciójú ágak nemcsak táplálkoznak a konkrétebb diszciplínákból, hanem vissza is hatnak rájuk; rámutatnak azokra a problémákra is, amelyeknek további elmélyítése fontos.

NÉHÁNY NYITOTT PROBLÉMA AZ EGYENLETEK ELMÉLETÉBEN

Harmadik megjegyzésem bizonyos fokig a másodikhoz kapcsolódik, és az egyenletek elméletére, más szóval a klasszikus algebrára vonatkozik. Azt a megállapítást, hogy az ezen elmélet keretében felmerült legfontosabb problémákat már a múlt század első felében megoldották, nem szabad úgy érteni, hogy ez az elmélet teljesen lezárt. Még sok — kétségtelenül kisebb jelentőségű — probléma vár megoldásra a klasszikus elmélet keretében is. Elsősorban a gyököknek a komplex számsíkban való elhelyezkedésére vonatkozóan merülnek fel nyitott problémák. Ennél még fontosabb kérdéskomplexumot vet fel éppen a jelenlegi algebrának az egyenletelmélettel való ötvöződése: a klasszikus elmélet kiterjesztése bizonyos, a számtesteknél sokkal általánosabb absztrakt algebrai struktúrákban értelmezett egyenletek esetére. Sok közlemény jelent meg ezen a téren, egy összefüggő munka azonban a mai napig is hiányzik. Pedig megírása nem jelentene különösebb nehézséget, inkább kiterjedt bibliográfiai búvárkodást, rendszerezőképességet és a klasszikus keretben meglevő gondolatmenetek iránti erős kritikai szellemet igényelne.

KATEGÓRIÁK

Negyedik megjegyzésem a további fejlődés irányára mutat rá. Az algebrai struktúrák elméletéből és a topologikus terek vizsgálatából született a szintézisfolyamatnak egy még magasabb foka: a kategóriák elmélete. Úgy tűnik, hogy ez az alig „tizenéves" diszciplína a matematika sokat ígérő ága.

KIKBŐL LESZNEK ALGEBRISTÁK, TOPOLÓGUSOK?

Már majdnem negyedszázados tanári és kutatói pályafutásom alatt arra a meggyőződésre jutottam, hogy a szintézisre, az általánosabb összefüggések meglátására, általában az erős fokú absztrakcióra egyesekben eleve adott hajlam rejtőzik. Ezt fel kell fedezni, mert természetszerűleg az ilyen irányú hajlammal rendelkezőkből válnak algebristák, topológusok. Másokat a részletkérdésekben való elmélyülés jellemez, ezekből jó kutatók válhatnak bizonyos szűkebb területeken. Természetesen a két kategória között merev határt nem lehet vonni, hiszen mindkét típusú kutatónak rendelkeznie kell a másik típus bizonyos jegyeivel. És mindkét típusú kutatóra egyformán szükség van.

Huszonöt évvel ezelőtt, még egyetemi hallgató koromban kezdtem az algebrai struktúrák elméletével foglalkozni. Magánszorgalomból. Alig két esztendő után kezdtem ismeretséget kötni a topológiával és a topologikus algebrával. Szintén magánszorgalomból. E kérdések oktatása ugyanis csak néhány évvel később vonult be a kolozsvári egyetem programjába. Egy akkori professzorom fedezte fel hajlamomat ennek az absztrakt világnak a tanulmányozására. Egy szűkebb körű tantárgyból vizsgáztam, a készülődés során sok könyvet átlapoztam, egészen moderneket is, és feleletem során a struktúrák elmélete szempontjából világítottam rá a felmerült kérdésekre. Persze akkor még nem voltam ennek tudatában, hiszen még a struktúrák elméletének elemeit sem ismertem. Honnan olvasta ezt? — kérdezte professzorom. Megmondtam. — Tetszik magának ez a nézőpont? — kérdezte. Igen — válaszoltam. — Szeretne mélyebben megismerkedni hasonló kérdésekkel? — Igen. — Akkor jöjjön be hozzám vizsgái után, ajánlok egy jó könyvet... Nos, így lettem ennek az absztrakt világnak tanulmányozója, később kutatója.

A TANÍTVÁNY HÁLÁJA

A történelem szeszélye úgy hozta, hogy alig indultam el a tudományos kutatás útján, nagyon fiatalon, egyedül maradtam algebrista Kolozsváron. Még kevés tapasztalatom volt, és elszigetelten mindig nagyon nehéz előrehaladni. De az absztrakt világnak annyira megszállottjává váltam, hogy egyedül is kitartottam mellette. És amikor említett tanárom hosszú évek után viszszatért, hogy az őt megillető kormánybotot átvegye, már egy kis algebrista csoport várta. Fiatalok, akikben sikerült elültetnem az algebra iránti szenvedély magvait. Azóta is sok fiatalt segítettem, többükből kiváló kutató, jó munkatárs vált. Ugyannyira, hogy sok részleteredményünkről már nehezen lehetne eldönteni az egyéni hozzájárulás mértékét. De ez nem is fontos: azok hosszas éjszakák együttes munkájának közös eredményei. Volt mesterem iránti hálaérzetemet pedig hatványozottan visszakapom fiatal munkatársaimtól. Szép érzés. Egyetlen esetben tapasztaltam magatartásbeli elcsúszást, ezt is a fiatal kor számlájára írtam, azzal próbáltam mentegetni. Arról, amit hosszú ideig ösztönösen végeztem, most már pontosan kialakult véleményem van: a tanítvány úgy róhatja le háláját tanítója iránt, ha a kutatás fáklyáját még fiatalabbaknak adja át. Ezt kérem fiatal munkatársaimtól, tanítványaimtól.

EGY SOKAT KUTATOTT PROBLÉMAKÖR

Tudományos közleményeim között tallózva egy gyakran visszatérő téma szerepel, ez a struktúrák ún. direkt szorzatával kapcsolatos. Ezt a fogalmat itt még csak megközelítő pontossággal sem tudom leírni. Elegendő csupán annyit megjegyezni, hogy az az algebra egy olyan fontos módszerével kapcsolatos, amely bizonyos struktúrák vizsgálatát egyszerűbb szerkezetű struktúrák vizsgálatára vezeti vissza. Ez a fogalom először csak véges számú elemet tartalmazó, ún. véges struktúrák esetén létezett, később általánosították — bizonyos végességi feltételek mellett — végtelen struktúrák esetére is. Ezek a végességi feltételek abban a tényben fejeződnek ki, hogy ha valamely struktúra bizonyos részstruktúráinak direkt szorzata, akkor minden eleme bizonyos — a részstruktúrákhoz tartozó — véges számú elem szorzata.

Két lényegbevágó kérdés merült fel e fogalommal és a vele kapcsolatos módszerrel kapcsolatban. Az egyik ahhoz a megfigyeléshez kötődik, hogy számos struktúra direkt felbonthatatlan, azaz nem írható fel bizonyos részstruktúráinak direkt szorzataként. Ezeknél a struktúráknál a direkt felbontással kapcsolatos vizsgálati módszer nyilvánvalóan hatástalan. Felmerül tehát a kérdés, hogy magát a fogalmat miképpen lehet oly módon általánosítani, hogy a hozzá kapcsolódó módszer szélesebb struktúraosztályra alkalmazható legyen anélkül, hogy hatékonyságában lényegesen mögötte maradjon az eredeti módszerének. A probléma aktualitását közvetve az a sok kísérlet is bizonyítja, amely az utóbbi két évtizedben a probléma megoldására irányult. Legfontosabb ilyen irányú eredményünk a Lengyel Tudományos Akadémia folyóiratában jelent meg.

A másik kérdés a módszer alkalmazási területének azon korlátaihoz kapcsolódik, amelyek az említett végességi feltételek következményei. De az ezekről való lemondás azzal lenne egyenértékű, hogy minden struktúraelemet végtelen szorzat alakjában állítsunk elő. Ehhez viszont határértékfogalom szükséges, más szóval megoldása csak a topologikus algebra keretében remélhető. Mintegy 17 évvel ezelőtt fogalmaztam meg ezt a lényegbevágónak tűnő problémát, s mintegy 15 év telt el addig, amíg sikerült kielégítő módon megoldani. Sokáig egyedül dolgoztam rajta, később fiatal munkatársaimmal. Legfontosabb eredményünk olasz földön, Padova ősi egyetemének folyóiratában jelent meg.

Az utóbb említett probléma megoldására irányuló tapogatózások sok „mellékterméket" eredményeztek. Egyik-másikat legalább olyan fontosnak ítélem meg, mint magát az említett eredményt. Így például még 1956—1958-ban sikerült bizonyos topologizálási eljárásokat kidolgozni absztrakt algebrai struktúrák széles osztályaira. Később különféle matematikai diszciplínák keretében fontos szerepet játszó bizonyos algebrai struktúrák — látszólag különböző — topológiáinak közös gyökerére sikerült bukkanni. Ez a már említett szintézis-folyamatnak egy példája. Ezek és hasonló eredmények hazai, továbbá magyarországi és olasz folyóiratokban láttak napvilágot.

VÉLEMÉNYCSERE Az említett kérdésekről sokat beszéltem itthon és külföldi egyetemeken. Többen „ráharaptak" a problémákra, ami azok továbbfejlesztésének záloga. Magam is sokat gazdagodtam mások észrevételeiből. Ez az élő kapcsolat, gondolatcsere egyik fő biztosítéka annak, hogy a kutató lépést tartson a korral. Ez semmivel sem pótolható. Ezért kell lehetővé tenni, hogy a kutató minél több tudományos rendezvényen részt vegyen, minél több olyan intézményt meglátogasson, ahol szakemberekkel találkozhat. Világszerte mindinkább szokásossá válik a tudományos rendezvényeket kisebb helyeken, gyakran üdülőhelyeken tartani. A nagy centrumok ugyanis sok figyelmet vonnak el. Kisebb helyeken viszont a rendezvény időtartamára valóságos nagy családdá kovácsolódnak össze a résztvevők. Együtt ülnek az előadásokon, a szervezett és spontán kialakuló vitákon, együtt étkeznek. És ha szükségessé teszi a lazítás, hát együtt szórakoznak. Ne sajnálja senki ezt a kutatótól, mert ő is ember. Legfennebb annyiban különbözik az átlagtól, hogy amikor egy kiadós úszás után kifekszik a homokra sütkérezni, akkor tovább folytatja kollégájával véleménycseréjét. De ha történetesen nem matematikáról, hanem egy épület stílusáról, egy aktuális eseményről vagy egy feltűnő hölgy kecses mozdulatairól beszélnek, akkor sem vétettek a társadalom ellen. A lényeges az, hogy amikor a „család" felbomlik, akkor minden résztvevő tudásban, gondolatokban gazdagabban távozik. Másrészt: a „családtagok" megismerik egymás életproblémáit, azok mindenütt fellelhető — legfönnebb különböző típusú — nehézségeivel együtt. Ez emberileg közelebb hozza őket. Ennek nagyon fontos társadalmi kihatása is van. Egyszerű igazság, melyre már a középkor mesteremberei is rájöttek, és segédeiket elküldték „világot látni". Ezeket az egyszerű igazságokat mindenkinek magáévá kell tennie, akinek akár tudományos, akár pénzügyi, akár bármely más adminisztratív szempontból szava van a kutatók találkozásának létrejöttében. Mert aki erre képtelen, az egy adott pillanatban feltétlenül a fejlődés kerékkötőjévé válik.

EGY PROGRAMRÓL Látogatásaim, személyes ismeretségeim, közvetett úton szerzett információim alapján állíthatom, hogy mi, algebristák, túlnyomó többségünkben meglehetősen elszigetelten dolgozunk. Ez részben történelmi, részben szervezési okokkal magyarázható. A tudományos központok ugyanis ma is elsősorban az egyetemek. Úgy vélem, hogy nagyobb arányú összefogásra maga az algebra szintézisre törekvő tendenciája ad lehetőséget. A csoport fogalmáról már szó esett. A gyűrű olyan kétműveletes algebrai struktúra, amelyben az egész számok esetében megismert számítási szabályoknál valamivel általánosabb számítási szabályok érvényesek. A csoportelmélet és a gyűrűelmélet az algebrai struktúrák elméletének két legjobban kidolgozott, klasszikus fejezete. Jól kidolgozott módszerekkel elért, lényegbevágó eredményekkel büszkélkedő, de ugyanakkor számos nyitott kérdést tartalmazó elméletek. Korosztályomban kiváló csoportelméletesek és kiváló gyűrűelméletesek vannak. Már kevesebben dolgoznak mindkét területen. Alig 16 évvel ezelőtt kristályosodott ki egy algebrai struktúrafogalom, amelyet legtöbben omega-csoport néven ismernek. Ez természetes módon általánosítja a csoport és gyűrű fogalmát, de nem túlságosan általános ahhoz, hogy a két elméletben ismert legfőbb kutatási módszerek egymásra hatását, közös általánosítását megakadályozná. Nos, sok helyen propagáltam már, itthon és külföldön egyaránt az omega-csoportok elméletének részletes kifejlesztését. Ezt teszem most is. Ez a szintézis kétségtelenül gazdagítaná külön-külön a két említett elméletet, és nagyszabású tudományos együttműködést is lehetővé tenne. Jelenleg ezen a téren ugyanis az a helyzet, hogy a figyelem egy kétségtelenül magasabb fokú szintézis, az általános algebrai struktúrák, az ún. univerzális algebrák vizsgálata felé fordult. Ez szükséges és helyes. Magam is végeztem kutatásokat ebben az irányban. De ennek az erős általánosításnak nyilvánvalóan sok csoport- és gyűrűelméleti módszerről le kell mondania, mert messze távolodott a két klasszikus elmélettől, éppen magasabb fokú absztrakciója miatt. A csoportelmélet és gyűrűelmélet leglényegesebb eredményeinek szintézise az omega-csoportok szintjén, úgy vélem, generációm feladata. És azé a generációé, amely közvetlen tudományos ráhatásunk folytán dolgozik. Az utóbbi esztendőkben két nagyon értékes doktori disszertációt mutatott be két fiatal munkatársam. Ezekben a csoportelmélet keretében elért korábbi eredményeinket általánosították omega-csoportok esetére.

A MATEMATIKAI KUTATÁS TECHNIKAI ALAPJAIRÓL

Úgy érzem, szólnom kell néhány olyan jóindulatúan naiv kérdésről is, amelyet cikkem elején említettem. Arra remélhetőleg sikerült rávilágítani, hogy a matematika fejlődik, és igenis lehet újat felfedezni a matematikában. Az új eredményeket mennyiségileg jellemzi bizonyos fokig az a nagyszámú közlemény, amely a világ különböző folyóirataiban megjelenik. Az utóbbi esztendőkben mintegy 20 000-re tehető az évente megjelenő közlemények száma. Ez ijesztően nagy szám, amely egyben világosan rámutat arra is, hogy manapság már nem létezhet a matematika minden területén egyformán tájékozott, „univerzális" matematikus. Egyben a már említett szintézis-tendencia fontosságát is hangsúlyozza. Nos, a kutató rendelkezésére kell állnia egy olyan könyvtárnak, amely az időnként megjelenő monográfiákat és a közlemények zömét tartalmazó fontosabb folyóiratokat rendszeresen beszerzi. A kolozsvári matematikai intézet könyvtára ilyen. Az említett beszerzés nagy pénzügyi és főleg áldozatkész szervezői munkát igényel, a folyóiratanyag nagy részét ugyanis a könyvtárak helyi szakfolyóiratok cseréjével szerzik be. Ez természetesen feltételezi a megfelelő nívójú folyóiratkiadást. Tehát a megfelelő nívójú helyi tudományos kutatómunkát is. Egy matematikai közlemény áttanulmányozása hosszadalmas művelet. Ez szükségessé teszi ún. referáló lapok kiadását. Ezek a megjelenő közlemények leglényegesebb eredményeire (esetleg módszereire) rávilágító rövid tartalmi kivonatokkal segítik a kutatót munkájában. A húszas évek óta Németországban adnak ki ilyen jellegű folyóiratot, a negyvenes évektől kezdve az Amerikai Egyesült Államokban, az ötvenes évektől kezdve a Szovjetunióban is. Ezek szerkesztése egész Földünket behálózó nemzetközi együttműködést feltételez. E sorok íróját az amerikai folyóirat kérte fel munkatársnak. A gazdaságilag fejlett országok matematikai intézeteiben, azok könyvtáraiban automatikus másológépek állnak a kutatók rendelkezésére. A kiválasztott közleményről fényképmásolatot készíthet a kutató. Ezzel részben „földrajzi függetlenséget" élvez munkájában, másrészt a folyóiratok kivételével nem akadályoz másokat. Ma már léteznek olyan dokumentációs központok is, amelyek nagy szakértő-gárdát foglalkoztatva, elektronikus számítógépek memóriaegységeibe táplálják az évről évre felhalmozódó anyagot. A kutató pedig az őt érdeklő problémakör teljes bibliográfiáját rövid idő alatt kézhez kaphatja. Persze, ez nagy pénzügyi befektetést igényel. Nos, a jól felszerelt könyvtár előfeltétele a kutatásnak. A modern technikai feltételek elősegítik, lerövidítik a kutató dokumentációs munkáját. De van egy tényező, amelyet semmilyen technikai „csodával" nem lehet helyettesíteni. Ez a kutatók közvetlen, szóbeli véleménycseréje. Erről már írtam.

ELŐNYÖK, HÁTRÁNY

Nos, a széles körű dokumentációs munka, a véleménycseréket követő ráhatások után a matematikai kutatáshoz valóban nem szükséges más technikai berendezés, mint papír és ceruza. Ez bizonyos értelemben előnyt jelent a kísérleti tudományok művelőivel szemben. „Földrajzi függetlenséget" biztosít a matematikus kutatónak. Nem köti helyhez. Ugyanakkor a kísérleti eredmények hiánya nagy nehézséget, a kísérleti tudományok művelőivel szemben hátrányt jelent a matematika kutatójának. Hiszen kutatásának nincs közvetlen empirikus alapja. A szorgalmas dokumentáció minden kutatómunkának alapfeltétele. Csupán szorgalommal nagy eredményeket semmilyen tudományágban nem lehet elérni. Csupán szorgalommal kis eredményeket sem lehet elérni a matematikában. Persze a tapasztalt kutató nagy segítséget adhat a fiatalnak, ha annak az alapötletet megadja. Ilyen esetben már elegendő lehet a szorgalmas, figyelmes, kitartó munka is.

AZ ALAPÖTLET A helyes problémafelvetéshez és annak megoldásához szükséges alapötlet megadása a problémakörnek sokoldalú tanulmányozása mellett is általában nehéz. Tapasztalatom szerint az ehhez szükséges pszichikai állapot (talán ezt az állapotot nevezik a költők „ihlet"-nek) csak úgy alakulhat ki, ha a kutató valósággal együtt él a problémával. Munkája, pihenése alatt egyaránt. Az ötlet kikristályosodása a legkülönbözőbb pillanatokban lehetséges. Legtöbb esetben véleménycserék alkalmával vagy a rákövetkező napokban, hetekben. Ilyen szempontból minden kutatónak sok szép — teljesen szubjektív — emléke van. A gyűrűk topologizálására adott egyik módszerem mindig felvillantja bennem a Balaton képét. Egy szép nyári éjszakán bukkantam rá az alapötletre a holdsütötte vízparton üldögélve... Sötét éjszakában szalad a vonat, a megpattintott ablakon az Alpok hűvös levegője áramlik be. Szemben velem egy spanyol lány alszik, szép madonnaarcára hullámokban hull fekete haja. Azóta évek teltek el, a néhány órás beszélgetés emléke bizonyára nem maradt volna meg bennem, hacsak egy már hetek óta nyersen megoldott csoportelméleti probléma általános, harmonikus keretbe való beágyazásának ötlete nem éppen ezekben a pillanatokban született volna meg... Objektíve bizonyára nincs semmi kapcsolat e tények között. Vagy ha van, hát annak a felderítése már a pszichológusok feladata. De a kutatóban szép emlékként forrnak össze.

UTÓSZÓ HELYETT Képeket villantottam fel a matematika fejlődési tendenciáiról, a kutatás egyes problémáiról, eredményekről, néhány olyan programpontról, amelyről eddig csak zárt körű matematikus társaságban beszéltem, lazább társalgás keretében. Tudom, hogy nem érintettem a kutatás sok problémáját. Azt is tudom, hogy egy-egy felvillantott gondolat alapos tanulmányt igényelne. Egyetlen célom volt: kissé „emberközelbe" hozni a matematikai kutatást, kutatót. Nyilván nem én döntöm el, hogy sikerült-e avagy sem. Egy matematikai közlemény minden megállapításához két logikai érték egyikét lehet hozzárendelni: igaz vagy hamis. Ebben az írásomban azonban matematikáról írtam és nem matematikát. Írásom tehát nyilván nem mentes a szubjektív vonásoktól. Állításaimhoz az említett két logikai érték közötti számos más logikai értéket is hozzá lehet rendelni: „nagyjából igaz", „majdnem biztosan hamis" stb. De ez az értékelés szintén nem mentes a szubjektív vonástól. Ami pedig a formát illeti, az feltűnően elüt egy matematikai közlemény megszokott tömör, zárt formájától. Ha úgy tetszik, nevezzük csevegésnek. De egyszer a matematikus is megteheti ezt. Mert ugyebár... ő is ember.

Maurer Gyula