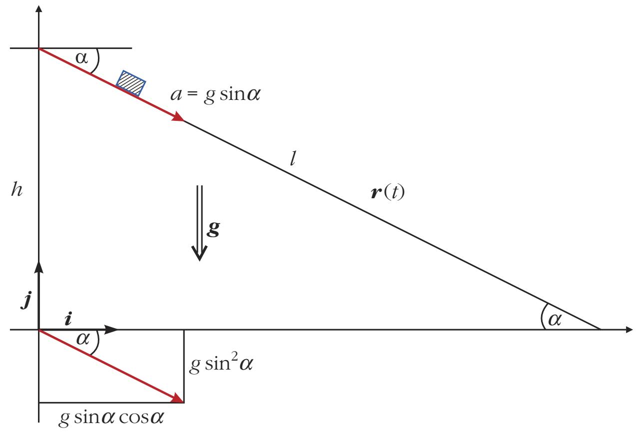
LEJTŐRŐL SÚRLÓDÁSMENTESEN LECSÚSZÓ TEST »PARADOXONA«

Hárs György
BME TTK Atomfizika Tanszék

A lejtőhöz rögzített inerciarendszerben



Egy h magasságú α szögű lejtő tetejéről súrlódás nélkül lecsúszik egy m tömegű test (lásd az ábrát).

A gravitációs erő lejtővel párhuzamos komponense: $F = mg\sin\alpha$.

A lejtő hossza:

$$l = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

A testen végzett munka:

$$W = F\,l = m\,g\sin\alpha\,\frac{h}{\sin\alpha} = m\,g\,h.$$

Itt szándékosan nem említünk potenciális energiát, mivel a munkatétel nem követeli meg az erőtér örvénymentességét, amely disszipatív erő is lehet. Alkalmazzuk a munkatételt, a testen végzett munka egyenlő a kinetikus energia megváltozásával:

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\boldsymbol{v}_2^2 - \frac{1}{2}\,m\boldsymbol{v}_1^2,$$

amiből

$$2\,g\,h = \boldsymbol{v}_2^2 - \boldsymbol{v}_1^2.$$

A vektor négyzete (önmagával képzett skaláris szorzata) egyenlő abszolút értékének négyzetével. A nem vastagított v betű a sebesség abszolút értékét jelöli.

$$v_2 = \sqrt{2\,g\,h + v_1^2}\,.$$

Az erőtérben mínusz $\boldsymbol{u}$ sebességgel mozgó inerciarendszerben

Ismeretes, hogy az inerciarendszerek dinamikai leírás szempontjából egyenértékűek. Tehát semmiféle tehetetlenségi erő nem léphet fel, ellentétben a gyorsuló (forgó) koordináta-rendszerekkel. Írjuk le a lejtőről való lecsúszás folyamatát a lejtő alapjával párhuzamosan, egyenletes $-\boldsymbol{u}$ sebességvektorral (tehát jobbról balra) haladó vonathoz rögzített vonatkoztatási rendszerből! Jelen leírásban semmiféle relativisztikus effektust nem veszünk figyelembe. Így ebben az inerciarendszerben minden korábbi sebességvektorhoz $\boldsymbol{u}$ sebességvektort kell hozzáadni. A kezdősebesség vektora $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}$, míg a végsebesség vektora $\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{u}$ lesz.

Alkalmazzuk tehát most is a munkatételt:

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\left(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{u}\right)^2 - \frac{1}{2}\,m\left(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}\right)^2,$$

amiből

$$\begin{aligned} 2\,g\,h &= \left(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{u}\right)^2 - \left(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}\right)^2 = \\ &= \boldsymbol{v}_2^2 + 2\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}^2 - \left(\boldsymbol{v}_1^2 + 2\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}^2\right) = \\ &= \boldsymbol{v}_2^2 - \boldsymbol{v}_1^2 + 2\,\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\right), \end{aligned}$$

tehát

$$m\,g\,h = \frac{1}{2}\,m\boldsymbol{v}_2^2 - \frac{1}{2}\,m\boldsymbol{v}_1^2 + m\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\right).$$

Látható, hogy a jobb oldalon megjelent egy új tag, amely a folyamat során bekövetkező sebességváltozás vektorának és a vonat sebességvektorának skaláris szorzatát tartalmazza. A lejtőhöz rögzített inerciarendszerben ilyen tag nem volt.

Hol a hiba? Melyik leírás helyes?

A kváziparadoxon feloldása

A hiba abból a – szemlélettel alátámasztott – tévedésből fakad, hogy a gravitációs erő által végzett munka a mínusz $\boldsymbol{u}$ sebességgel mozgó inerciarendszerben is mgh lenne, vagyis hogy csak a szintkülönbség számítana, mint a potenciális energiánál. Látni fogjuk, hogy ez nem igaz.

Hárs György címzetes egyetemi tanár a BME Atomfizika tanszéken kutat és oktat 1980 óta. Közben két évet töltött a University Utah USA egyetemén tömegspektroszkópiás kutatás keretében. 1994-től kezdve első éves angol nyelvű fizika-előadást tart. Kutatási és oktatási területei: tömegspektroszkópia, elektron- és ionoptikák, vákuumfizika, plazmafizika. Főbb eredményei: vibrációs átlagerő-potenciál alkalmazása pikomérleg berendezésben, nem impulzus indítású TOF berendezés kifejlesztése.

Bizonyítás

Az általánosítás céljából – a végzett munka levezetésénél – tetszőleges időinvariáns erőteret engedjünk meg. A kiindulásként exponált probléma ennek speciális eseteként jelenik majd meg.

Egy $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ időinvariáns erőtérben egy tömegpont mozog az $\boldsymbol{r}(t)$ vektor skalárfüggvénnyel jellemzett pályán.

A tömegponton végzett munka:

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

A mozgásegyenlet:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = m \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$

Behelyettesítve:

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} m \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Idő szerinti integrálásra térünk át. A tömegpont a t_1 és t_2 időpontokban rendre az $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ helyen tartózkodott.

$$W = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t.$$

Vegyük észre, hogy az integrálban ugyanazon függvény első és második idővariáltjainak szorzata szerepel.

Ismert az alábbi matematikai szabály:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2} f^2(x)\right).$$

Alkalmazzuk ezt a szabályt, most nem egy függvényre, hanem egy függvény első deriváltjára.

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\right].$$

Térjünk vissza az eredeti problémára! Itt $f(x) \equiv \boldsymbol{r}(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\right].$$

Helyettesítsünk be az integrálba:

$$W = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] \mathrm{d}t = m \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\left[\boldsymbol{v}^2(t)\right].$$

A $\boldsymbol{v}^2$ infinitezimális megváltozásainak összege (integrálja) nyilván a $\boldsymbol{v}^2$ teljes megváltozása lesz:

$$\frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\left[\boldsymbol{v}^2\right] = \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}_2^2 - \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}_1^2,$$

tehát

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}_2^2 - \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}_1^2 = E_{\mathrm{kin2}} - E_{\mathrm{kin1}}.$$

És íme, kijött a jól ismert munkatétel és a kinetikus energia. Itt az erő lehet bármilyen, akár disszipatív erő (csúszási súrlódás vagy közegellenállás) is. Az erőtérre vonatkozóan eddig csak annyi a kikötésünk volt, hogy időinvariáns legyen.

A további gondolatmenetben az erőtér már nem lesz időinvariáns, mivel egy mozgó vonathoz rögzített inerciarendszerből nézve az erőtér már időváltozót fog tartalmazni. Az ilyen erőteret nevezzük implicit módon idővariáns erőtérnek, megkülönböztetésül az explicit módon idővariáns erőtértől, amely – mondjuk – egy időben változó feszültséggel meghajtott elektródarendszer környezetében keletkező elektromos erőtér.

Lépjünk vissza a levezetés egy korábbi pontjára, és vegyük most figyelembe, hogy egy $-\boldsymbol{u}$ sebességgel haladó vonaton utazunk a leírtak szerint:

$$W = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t.$$

A koordináta transzformálódik ha $-\boldsymbol{u}$ sebességgel elhaladva nézzük:

$$\boldsymbol{r}(t) := \boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{u}\, t.$$

Behelyettesítve:

$$W^{\star} = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}^2\left(\boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{u}\, t\right)}{\mathrm{d}t^2} \frac{\mathrm{d}\left(\boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{u}\, t\right)}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t.$$

Itt $W^{\star}$ jelöli a vonathoz rögzített inerciarendszerben végzett munkát.

Az első tényező:

$$\frac{\mathrm{d}^2\left(\boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{u}\, t\right)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2},$$

a második tényező:

$$\frac{\mathrm{d}\left(\boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{u}\, t\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{u}.$$

Behelyettesítve:

$$W^{\star} = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{u}\right) \mathrm{d}t.$$

Beszorzás és szétválasztás után:

$$W^\star = m\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + m\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}t.$$

Vegyük észre, hogy az első integrál pontosan megegyezik az időinvariáns esetében korábban már levezetett munkatétellel.

$$m\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1^2.$$

A jobb oldalon szereplő második integrál esetében vegyük figyelembe, hogy

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t},$$

ezért

$$m\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}t = m\boldsymbol{u}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= m\boldsymbol{u}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t).$$

Az infinitezimális megváltozások integrálja pedig a teljes megváltozással egyenlő:

$$m\boldsymbol{u}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t) = m\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\right).$$

Összesítve a tapasztalatokat, tehát:

$$W^\star = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1^2 + m\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\right).$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet jobb oldala átírható az alábbi módon:

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1^2 + m\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{u}\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}\right)^2$$

és így

$$W^\star = \frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{u}\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}\right)^2.$$

Tehát a $-\boldsymbol{u}$ sebességgel mozgó inerciarendszerből nézve is pontosan kijön a munkatétel állítása, vagyis hogy a tömegpontra ható erők munkájának integrálja $W^\star$ a $-\boldsymbol{u}$ sebességgel mozgó rendszerben kifejezett kinetikus energiák különbsége. Itt a $\boldsymbol{v}$ sebességek az időinvariáns erőtérhez rögzített inerciarendszerben értelmezett sebességek. Ezekhez hozzáadva a mozgó inerciarendszer sebességvektorának ellentettjét, a $-\boldsymbol{u}$ sebességgel mozgó rendszerben értelmezett sebességeket kaptuk. Tehát minden rendben van a munkatétellel, amit tanítunk, az helyes.

Egy fontos tanulság azonban van

Egy mozgó inerciarendszerben fellépő gravitációs munkavégzés nem számítható a megszokott módon a potenciális energiák különbségeként.

Vagyis h szintkülönbség esetében a gravitációs tér által végzett $W^\star$ munka:

$$W^\star = mgh + m\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\right),$$

nem pedig csak

$$W = mgh.$$

Ahol $\boldsymbol{u}$ a mozgó megfigyelő sebességvektora, míg $\boldsymbol{v}_1$ és $\boldsymbol{v}_2$ a kezdő- és a végsebességvektorok.

A fenti *Az erőtérben mínusz $\boldsymbol{u}$ sebességgel mozgó inerciarendszerben* című fejezetben exponált kvázi-paradoxon feloldása az, hogy a gravitációs erő munkavégzését az itt leírtak szerint korrekt módon helyettesítsük be:

$$mgh + m\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\right) = \frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{u}\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}\right)^2.$$

A tömeget időlegesen elhagyva az egyenletből:

$$2gh + 2\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\right) = \left(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{u}\right)^2 - \left(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}\right)^2,$$

majd a zárójeleket felbontva

$$2gh + 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}_1 =$$

$$= \boldsymbol{v}_2^2 + 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}^2 - \boldsymbol{v}_1^2 - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{u}^2,$$

egyszerűsítve

$$2gh = \boldsymbol{v}_2^2 - \boldsymbol{v}_1^2,$$

majd visszaírva a tömeget:

$$mgh = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_1^2.$$

Teljes egyezésben az elvárt eredménnyel.

Tekintsünk most egy szabadon eső testet, és vizsgáljuk meg egyenletes $-\boldsymbol{u}$ sebességvektorral (tehát jobbról balra) haladó vonathoz rögzített vonatkoztatási rendszerből. Az $m\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)$ skaláris szorzat vízszintesen haladó megfigyelő és függőlegesen zuhanó test esetében nulla járulékot ad az $\boldsymbol{u}$ és a $(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)$ vektorok egymásra való merőlegessége miatt, és ilyenkor megkapjuk a jó megoldást, semmi probléma sem látszik. Ha azonban a lejtőn lecsúszó tömegpontra alkalmazzuk a munkatételt, amikor a skaláris szorzat nem esik ki, mivel az érintett vektorok nem merőlegesek egymásra, akkor a csak gravitációs magasságkülönbségek figyelembe vétele alapján elvégzett számítás rossz eredményre vezet.