

• Az indukált feszültség függése a gerjesztőáramtól. Az indukált áram értéke egyértelmű kapcsolatban áll a mágnesezési görbe lokális hajlásszögével (lásd az 1. ábrát), de a mágnesezés indukcióhoz csak az indukált feszültség illesztőgörbéje függvényének integrálása árán jutunk el. Fizikailag ez egy szép feladat, de mérésekre nemigen alkalmas a kettős függvénykapcsolat elkerülhetetlen hibái miatt. Ebben én csak az áttételes fizikai jelenségeket értékeltem.

• A hangerő függése a gerjesztőáramtól olyan, mint egy Hall-szondás indukciómérő eszköz, hiszen a hangerő egyenes kapcsolatban áll a mágnesezés indukcióval, a H_1 mikrofon-hangszóró által mért hangjel pedig lineáris kapcsolatban áll a hangerővel. Ezt a közvetlen kapcsolatot jól illusztrálja a 18. ábra, ahol a hangjel áttételes függése a gerjesztőáramtól megtevésztően hasonlít a mágnesezési görbéhez.

• A megengedhető legnagyobb gerjesztőáram. Valamikor egy ilyen görbe segített a helyes értékű gerjesztőáram meghatározásában. Ha megengedünk egy 10%-os hangerőcsökkenést ($B/B_{\max} = 0,9$), akkor a gerjesztőáramot 52,15 mA értékről 38,80 mA-re csökkenthetjük (lásd a 18. ábrát), ez a telítési áram 0,744-szeresének felel meg. A termikus teljesítmény

ekkor a $0,744^2 = 0,554$ -re csökken, azaz az eredetinek 55,4%-a lesz. Egyszerűbben: ha elfogadunk egy körülbelül 10%-os hangerőcsökkenést, akkor a gerjesztőáram 25%-os csökkenése eredményeként a felvett hőenergia szinte a felére csökken. Bármennyire nehéz volt a sok mérés-számítás, ez az eredmény bőven megérte!

• Itt még nem álltam meg! Azt már előre tudtam, hogy teljesen reménytelen lenne energetikailag leírnom a lengőtekerecs hőmérsékletének függését a gerjesztőáramtól, ezért kísérletileg határoztam meg a még elfogadható gerjesztési hő maximumát. Egy erre a célra készült mérőhidat szerkesztettem, az egyik ágba az összeszerelt hangszóró lengőtekerce, a másikba az etalon pót-lengőtekerecs került. A 6000 menetes gerjesztőtekerecs már készen volt, a tápfeszültséget változtattam. A híd kiegyensúlyozása után lemértem az órákon át a 75%-os gerjesztőáram által létrehozott melegedést. A saccolt $\Delta t = 10$ °C helyett elfogadtam a picivel magasabb hőmérséklet-emelkedést. A működés közben fellépő tíz amperes áramokat az elmozdulás miatti ellenindukált áram a rézben szinte kioltja, csak a fázistolások miatt keletkezett egyenlőtlenlégek melegítik a lengőtekerceket.

ÜVEG MEGFÚJÁSÁVAL KELTETT HANG FREKVENCIÁJÁNAK VIZSGÁLATA AUDACITY PROGRAMMAL

Tóthné Juhász Tünde

Karinthy Frigyes Gimnázium, Budapest
és ELTE Fizika Tanítása Doktori Iskola

Amikor elfújunk egy üres, vagy részben vízzel teli palack fölött, az hangot ad. Az üveg által kiadott hang magassága (frekvenciája) függ az üvegben lévő víz mennyiségétől: minél több a víz (kevesebb a levegő) az üvegben, annál magasabb a hang.

Ezt a jelenséget mindenki ismeri, az egyszerű „hangszer” fizikaórán vagy -szakkörön való használá-

Köszönöm témavezetőmnek, *Jubász Andrásnak*, hogy kritikái és észrevételeivel és kísérleti ötleteivel segítette a cikk megírását. A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.



Tóthné Juhász Tünde matematika–fizika szakos tanár a budapesti Karinthy Frigyes Gimnáziumban. Az ELTE Fizika Tanítása Doktori Iskola hallgatójaként 2019-ben szerzett doktori fokozatot, kutatási területe a számítógéppel segített középiskolai kísérletek volt. Ennek keretében elsősorban egyszerű, ingyenesen letölthető programok segítségével igyekezett mindenki számára elérhetővé tenni a számítógépes kísérletezést. 2016 óta az ELTE–MTA Fizika Tanítása Kutatócsoport tagja.

tát mások is ajánlják [1], mégsem elterjedt és közismert (és nem is magától értetődő) annak magyarázata, hogy pontosan mivel is van összefüggésben a létrejövő hang frekvenciája. Első ránézésre könnyű a jelenséget ahhoz az emelt szintű érettségi kísérlethez hasonlítani, ahol egy hangvilla adott frekvenciájú hangját egy vízbe süllyesztett üvegcsőben lévő levegőoszlop felerősíti, és megmutatható, hogy ekkor az üvegcső hossza körülbelül a hullámhossz negyede [2].

Ha azonban egy borosüveg által kiadott hang elméleti hátterét részletesebben megvizsgáljuk, egy, a diákok által is érthető egyszerű modell segítségével levezethetjük, hogy a létrejövő hang hullámhossza nem az üvegben levő levegő magasságával, hanem a levegő térfogatának négyzetgyökével arányos. Az ingyenesen letölthető Audacity program [3] segítségével pedig az általános egyszerű kvalitatív megfigyelésnél jóval érdekesebb mérőkísérletet is végrehajthatunk, amelynek eredménye – a kísérlet egyszerűsége ellenére – jól egyezik az elméleti modell által megjósolt összefüggéssel, ezért a mérés kifejezetten alkalmas iskolai laborgyakorlatnak is.



1. ábra. Borosüveg megszólaltatása szívószálon keresztül kifújott levegővel. Az üveg megszólaltatásához a szánból kiáramló levegő neki kell ütközzön az üvegnyak belső peremének.

Elméleti háttér

Amikor az üveg felett elfújunk, az üveg nyakában lévő levegő kezd rezegni. Ennek kiváltó oka, hogy amikor megfújunk az üveget, kissé lefelé fújunk, úgy, hogy a szántól elhagyó levegő nekiütközzön a nyak szántól távolabbi végének. (Azt, hogy valóban ilyen irányban kell fújunk az üveg megszólaltatásához, ellenőrizhetjük, ha egy szívószálon keresztül áramoltatjuk ki a levegőt. Az üveg akkor ad hangot, ha az 1. ábrán lévő pozícióban áll a szívószál.)

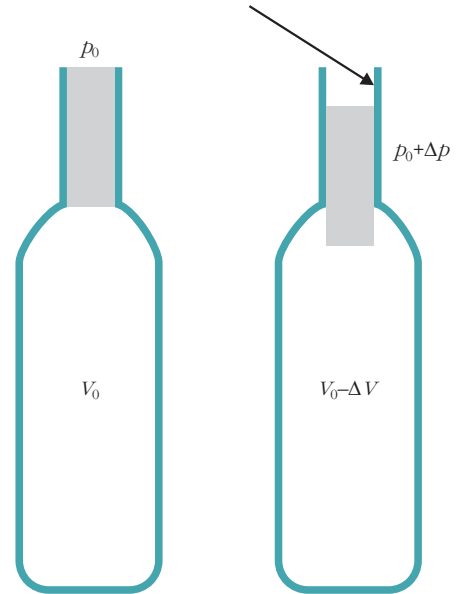
A jelenség értelmezéséhez válasszuk külön a nyakban és az üveg testében lévő levegőt! Az általunk kifújott levegő az üveg nyakának ütközve az ott lévő levegőt hirtelen lefelé nyomja, és ezáltal ezt a kis levegő-adagot rezgésbe hozza, hasonlóan ahhoz, mint ahogy egy rugóra függesztett test a nyugalmi állapotából való kitéréssel rezgésbe hozható [4]. A 2. ábra ezt a folyamatot mutatja.

Mivel a folyamat gyors, feltételezhetjük, hogy adiabatikus, így

$$pV^\kappa = \text{állandó}, \quad (1)$$

ahol p és V az üveg belsejében lévő nyomás és térfogat, κ pedig az adiabatikus kitevő vagy fajhőviszony, értéke levegő esetén körülbelül 1,4.

Ha a nyomás és a térfogat kis megváltozásait vizsgáljuk, implicit deriválással kapjuk, hogy:



2. ábra. Üres üveg nyakában lévő levegő nyugalmi állapotban (bal oldalon) és az üveg felett való elfújáskor (jobb oldalon).

$$\Delta p V^\kappa + p \kappa V^{\kappa-1} \Delta V = 0, \quad (2)$$

azaz

$$\Delta p = -\kappa \frac{\Delta V}{V_0} p_0, \quad (3)$$

ahol V_0 az üveg testében lévő levegő mennyisége, p_0 pedig a légnyomás.

Nézzük meg, hogy az üveg nyakában lévő levegőre mekkora erővel hat az üvegben lévő adiabatikusan összenyomott levegő, amikor a levegőoszlop lefelé mozdul el (3. ábra)!

3. ábra. Az egyensúlyi helyzettől x távolságra lefelé elmozdult levegőoszlop miatt az üveg testében összenyomódik a levegő.

Ha az üveg nyakának hossza L , keresztmetszete A , a levegő sűrűsége pedig ρ , akkor a rezgő levegőoszlop tömege:

$$m = \rho AL. \quad (4)$$

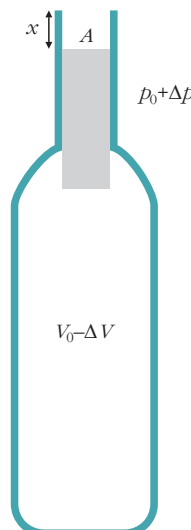
Newton II. törvénye szerint a levegőoszlop gyorsulása:

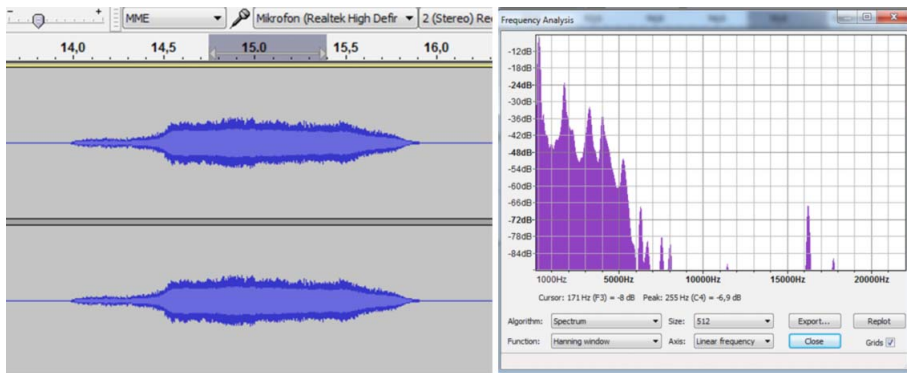
$$a = \frac{F}{m} = \frac{A \Delta p}{\rho AL} = \frac{\Delta p}{\rho L}. \quad (5)$$

Tételezzük föl, hogy az üveg nyakában rezgő levegőoszlop az egyensúlyi helyzettől x távolságot mozdult el lefelé. Beírva Δp helyébe az (3) egyenletet, és kihasználva, hogy $\Delta V = Ax$, kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\rho L} \left(-\kappa \frac{\Delta V}{V} p \right) = \\ &= -\kappa \frac{p}{\rho L V} Ax. \end{aligned} \quad (6)$$

Azaz a levegőoszlop gyorsulása ellentétes irányú és egyenesen ará-





4. ábra. A borosüveg által kiadott hang felvétele és spektrumelemzése az Audacity programmal ($V = 157 \text{ cm}^3$, $f = 255 \text{ Hz}$).

nyos az egyensúlyi helyzetéből való kitérésével, tehát harmonikus rezgőmozgást végez. A (6) egyenletet összehasonlítva a harmonikus rezgőmozgás feltételével ($a = -\omega^2 x$), kapjuk, hogy a rezgés körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho L V} A}. \quad (7)$$

Mivel $\omega = 2\pi f$, a levegőoszlop rezgésének – és egyben a létrejövő hang – frekvenciája:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho L V} A}. \quad (8)$$

Kihasználva, hogy a hang terjedési sebessége

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}, \quad (9)$$

a frekvenciára kapott képlet az alábbi végső formába egyszerűsödik:

$$f = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{LV}}. \quad (10)$$

Az elméleti levezetéssel kapott képletből látható, hogy a frekvencia több, az üveg nyakára jellemző állandó mellett egyedül az üvegben lévő levegő térfogatától függ. Így szerencsésebb, ha az üvegben lévő víz mennyisége helyett az üvegben maradt levegő térfogatára fogalmazzuk át kvantitatív tapasztalatunkat is: ha az üvegben lévő levegő térfogata kisebb, magasabb lesz a kialakuló hang frekvenciája.

Kihasználva, hogy $\lambda = c/f$, azt is megmutathatjuk, hogy a bevezetőben említett érettségi kísérletről eltérően itt a hullámhossz valóban nem a magassággal arányos. Ennek ellenőrzésére – ha az idő engedi – érdemes elvégezni az alábbi egyszerű kísérletet. Vegyünk két műanyag ásványvizet PET-palackot, az egyik legyen fél, a másik másfél literes. Az ásványvizet palackok nyaka egyforma, így a bennük kialakuló hang frekvenciáját a nyak különbsége nem befolyásolhatja. Töltsük tele a nagyobbik palackot vízzel, majd töltsük át belőle a kisebbikbe pontosan annyit, hogy az tele legyen, végül ürítsük ki a kisebbik palackot. Ezzel a

módszerrel kaptunk két olyan palackot, amelyekben ugyanakkora a levegő térfogata, de a levegőoszlop magassága jelentősen különbözik, mivel a másfél literes palack jóval szélesebb. A két palackot megfújva hallható (és mérhető), hogy a kialakuló hangok elfogadható hibán belül egyformák, így belátható, hogy az üvegben kialakuló hang valóban a térfogattól, és nem a levegőoszlop magasságától függ.

Tanulói mérőkísérlet

Az elméleti levezetéssel kapott eredmény ellenőrizhető egy egyszerűen végrehajtható tanulói méréssel. Egy borosüveget töltünk föl a nyakáig vízzel, majd mérjük meg a tömegét. Ezután öntsünk ki belőle valamennyi vizet, és újra mérjük meg a tömegét. Így az üveg testében lévő levegő térfogata meghatározható a hiányzó víz tömegének segítségével. Ezek után indítsuk el az Audacity programban a felvételt és szólaltassuk meg az üveget. A hangfelvételt kielemezve (spektrumelemzés) határozzuk meg a létrejövő hang frekvenciáját. A 4. ábra egy ilyen felvételt és a hozzá tartozó spektrumot mutatja.

Apránként kitöltögetve az üvegben lévő vizet, ismételjük meg a mérést legalább 10-15 alkalommal. Így egy térfogat-frekvencia adatsort kapunk (5. ábra).

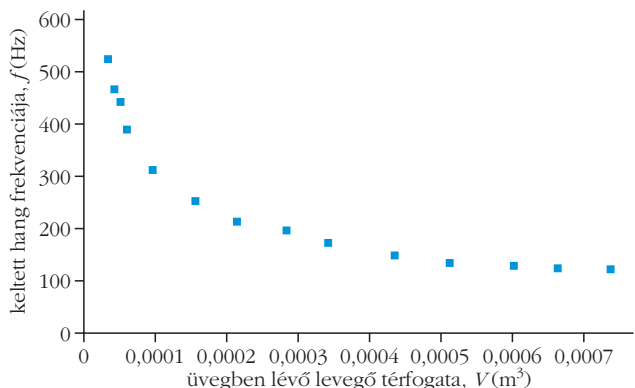
Erről az ábráról még nehéz eldönteni, hogy milyen kapcsolat van a térfogat és a frekvencia között, ezért valamilyen adatkezelő programmal (például Excel) tovább kell elemeznünk.

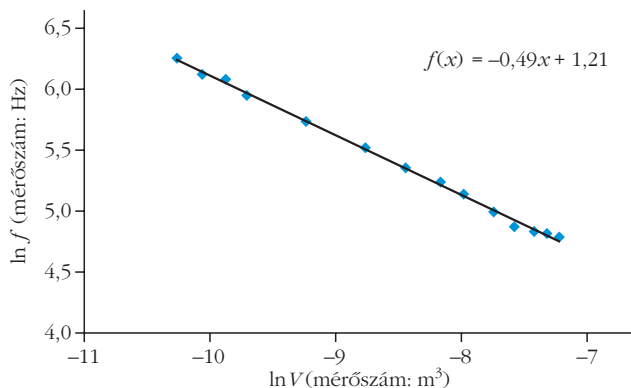
Ha feltételezzük, hogy a frekvencia a térfogat valamilyen hatványával arányos, azaz

$$f = a V^b, \quad (11)$$

ahol a és b konstans, és szeretnénk kideríteni, hogy mi lehet V kitevőjének az értéke, akkor a frekvencia

5. ábra. Az üveg megszólaltatásakor hallható frekvencia a borosüvegben található levegő térfogatának függvényében.





6. ábra. Az $f = V^a$ összefüggésben lévő a értékének meghatározása. Az ábrázolt egyenes meredeksége a térfogat kitevőjét adja.

logaritmusát a térfogat logaritmusának függvényében ($\ln f - \ln V$ kapcsolat) érdemes ábrázolnunk (6. ábra), mert a logaritmus azonosságai miatt

$$\ln f = b \ln V + \ln a, \quad (12)$$

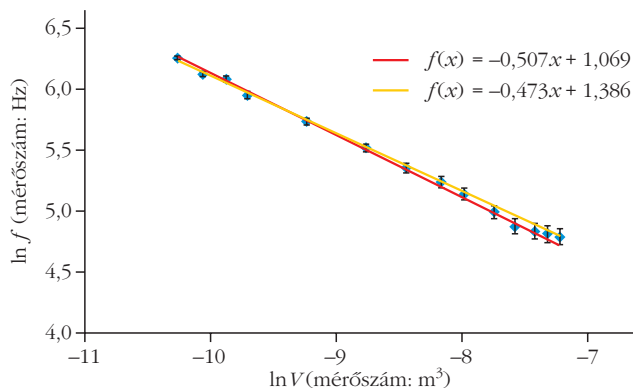
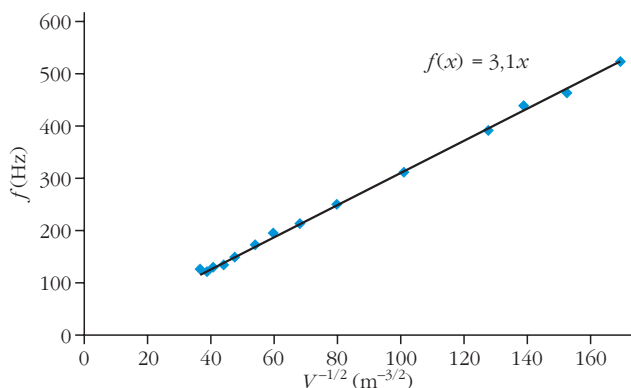
azaz ilyenkor a kapott grafikon meredeksége megadja a keresett hatványkitevőt.

Az egyenes meredeksége $-0,5$ körüli érték, azonban az elmélettel való egyezés igazolásához meg kell vizsgálnunk a meredekség hibáját is. Ehhez megrajzoltuk a hibákkal ábrázolt adatoknak megfelelő legnagyobb és legkisebb meredekségű egyeneseket (7. ábra), és ezek segítségével megbecsültük a meredekség hibáját. A kísérletben a legnagyobb hibát a frekvencia mérése adja, ezt több megismételt mérés alapján 8 Hz -re becsültük, ez adja a függőleges hibásávok alapját.

A 6. és 7. ábra alapján megállapíthatjuk, hogy az illesztett egyenes meredeksége $m_1 = -0,49 \pm 0,02$, így az elméletileg várt $-0,5$ érték benne van a mérés által kapott intervallumban, azaz az elméleti modellel összehangban a kísérleti eredményeink is azt mutatják, hogy a frekvencia a térfogat reciprokának négyzetgyökével arányos. Most már készíthetünk egy olyan grafikont (8. ábra), ahol a frekvenciát $V^{-1/2}$ függvényében ábrázoljuk.

A mérőkísérlet tehát igazolta a modell segítségével levezetett összefüggés azon részét, hogy $f = \text{konst.} \cdot V^{-1/2}$.

8. ábra. Borosüveg által kiadott hang frekvenciája $V^{-1/2}$ függvényében. (V az üveg testében lévő levegő térfogata). Az illesztett egyenes meredeksége, $m_2 = 3,1$.



7. ábra. Az $f = V^a$ összefüggésben lévő a hibájának meghatározása. Az ábrán a hibásávok által megengedett legnagyobb és legkisebb meredekségű egyenest ábrázoltuk.

Az illesztett egyenest tovább vizsgálhatjuk: megpróbálhatjuk meredekségének értékének helyességét is ellenőrizni. A (10) egyenlet alapján a meredekség elméletileg várt értéke:

$$m_2 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{L}}. \quad (13)$$

Behelyettesítve a hangsebességet ($c \approx 340 \text{ m/s}$) és a vizsgált borosüveg adatait (nyak hossza, $L = 9 \pm 0,5 \text{ cm}$, nyak sugara pedig $r = 1 \pm 0,05 \text{ cm}$), azt kapjuk, hogy az elméletileg várt meredekség:

$$m_2 = \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\pi} \sqrt{\frac{0,01^2 \pi \text{ m}^2}{0,09 \text{ m}}} = 3,2 \frac{\text{m}^{1,5}}{\text{s}}, \quad (14)$$

hibája pedig

$$\delta m_2 = \delta r + 0,5 \delta L = 0,078, \quad (15)$$

amiből $m_{2,\text{elméleti}} = 3,2 \pm 0,25 \text{ m}^{1,5} \text{ s}^{-1}$ adódik. A kísérletileg kapott meredekség tehát benne van az elméletileg várt intervallumban, ami tovább erősíti az elméleti levezetés és a kísérleti eredmények egyezését.

Összefoglalás

A borosüveggel végzett mérés jó példa arra, hogy egy középiskolás szinten viszonylag bonyolult háttérű jelenség hogyan mérhető egyszerűen az Audacity programmal. Az eredmények kielemezése (akár az elméleti levezetés nélkül is) tanulságos a diákok számára, jó alkalmat ad a grafikonelemzés, linearizálás és a mérési kiértékelés gyakorlására, ezáltal hasznos részévé válhat az iskolai laboratóriumi gyakorlatoknak.

Irodalom

1. Nagy A., Papp K.: Hangszerek a semmiből. *Fizikai Szemle* 59/2 (2009) 65–72.
2. http://dload.oktatas.educaio.hu/erettsegi/nyilvanos_anyagok_2018tavasz/fizika_emelt_szobeli_meresek_2018maj.pdf
3. <https://www.audacityteam.org/download/windows/>
4. https://people.seas.harvard.edu/~jones/cscie129/nu_lectures/lecture3%20ho_helmholtz/ho_helmholtz.html