a magasabb energiájú állapotokba való gerjesztéshez $\hbar\omega$ energiaadagok szükségesek. A kötések mentén kialakuló rezgések esetén ezek a látható fény tartományába eshetnek, az egyes anyagok színe ezzel magyarázható. A leírt

$$\frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega$$

energia-sajátértékek középiskolában is bemutatható „levezetésére” találunk példát a [12] forrásban.

A [10] szimuláció a kívánt lehetőségek kiválasztásával mutatja a ψ függvény valós és képzetes részét, abszolút értékét és fázisát is. A diákok valószínűleg hallották a „Schrödinger macskája” néven elterjedt történetet, amiben az elektron egyszerre van több lehetséges sajátállapotban, illetve a sajátállapotok szuperpozíciójaként leírható állapotban van. Ilyen kevert állapotot is létrehozhatunk a szimulációban, ahol a lineáris kombinációban a különböző energiaszintekhez tartozó sajátfüggvények együtthatóinak értékét adhatjuk meg, amit a normálás következtében kissé módosítva, de az új együtthatókat láthatóvá téve jelenít meg a program.

Összegzés

A megértés szempontjából fontos a modell mögé helyezett kép, a vizuális megjelenítés. A szemmel nem látható részecskék viselkedése ráadásul eltér azon testek viselkedésétől, amelyeket születésünktől látunk, tapasztalunk magunk körül. Mind a mechanikaihullám-analógiák, mind a leírt szimuláció abban segíthet, hogy a diákok képet alkothassanak elvont, nehezen érthető fogalmakról, az „anyaghullámoknak” a látható mérettartományba eső testekétől eltérő viselkedéséről, és annak – a korábbi leírásokkal összevetve – szintén újszerű leírásáról. Természetesen, ha a szertárban található eszközök megengedik, a kísérleteket szerencsésebb a valóságban bemutatni. A szappanhártyához keret készíthető, diákok szorgalmi feladata is lehet. A filmek ehhez adhatnak ötletet, vagy hiányzó eszközök esetén pótolhatják azokat.

Irodalom

1. https://docplayer.hu/57164-Magyar-kozlony-66-szam-magyarorszag-hivatalos-lapja-2012-junius-4-hetfo-tartalomjegyzek.html
2. http://kerettanterv.ofi.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html
3. https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/erettsegi_vizsgatargyak\#1
4. https://www.youtube.com/watch?v=fiULOzi3Xrk
5. https://www.youtube.com/watch?v=g8AOQU7_LiI
6. https://www.youtube.com/watch?v=4z4QdiqP-q8
7. Gnädig Péter *Szemléletes kvantummechanika* előadásai, Fizika tanítása program.
8. https://drive.google.com/file/d/1Y0-DK5nAX7V-asGaaMHdjSzXaH3BSyj4/view
9. Juhász Tibor: *A Schrödinger-egyenlet és egyszerű alkalmazásai.* http://www.zmgzeg.sulinet.hu/tantargy/fizika/files/Schrodinger.pdf
10. https://phet.colorado.edu/hu/simulation/legacy/bound-states
11. Jurisits József, Szűcs József, Halász Tibor: *Fizika 11–12. Közép- és emelt szintű érettségire készülőknek.* Mozaik Kiadó, Szeged
12. Holics László (szerk.): *Fizika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.

A LORENTZ-ERŐ LEVEZETÉSE A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLETBŐL

Matolcsi Dávid
Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló
Általános Iskola és Gimnázium

Schramek Anikó tanárnő egyik fizikaóráján a Lorentz-erő tárgyalásakor egyik osztálytársam, *Kiss Gergely* néhány érdekes kérdést fogalmazott meg. Felvetései-kérdései felkeltették figyelmemet: vajon lehetséges a Lorentz-erő létezésének megmagyarázása pusztán a Coulomb-erőre hivatkozva, a speciális relativitáselmélet segítségével. Kiss Gergelynek ezúton is köszönetet szeretnék mondani az inspirációért.

A mágneses Lorentz-erő kifejezése szerint, ha egy I erősségű árammal átjárt vezetékkel párhuzamosan egy töltött részecske w sebességgel halad, akkor a vezetékre merőleges erő hat a részecskére, amelynek nagysága egyenesen arányos a vezetőben folyó áramerősséggel és a részecske sebességével is.

Ez a törvény sokkal komplexebbnek tűnik, mint a Coulomb-erő, ami mindössze két töltés között ébredő erőről beszél. A Coulomb-erő alapvető természeti törvény, aminek létezését – pusztán kísérleti tapasztalatokra hivatkozva – lényegében axiómaként fogadjuk el. Ezzel szemben célunk, hogy a bonyolultabb Lorentz-erő létezését ne ugyanígy axiómaként kelljen feltennünk, hanem azt a Coulomb-erő következményeként tudjuk levezetni.

Matolcsi Dávid a Budapesti Fazekas Mihály Gimnázium speciális matematika tagozatán érettségizett, jelenleg az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematikus hallgatója. 2017-, 2018- és 2019-ben a Nemzetközi Matematikai diákolimpián képviselte Magyarországot.

A Coulomb-erő egy töltött vezeték mellett

Tekintsünk egy q nagyságú töltést, ami egy dróttól r távolságra áll. Legyen ρ a drót protonjainak térfogati töltéssűrűsége. Feltételezve, hogy a drót végtelen hosszú, és benne a protonok eloszlása egyenletes, a protonok által a töltésünkre kifejtett erők eredőjének dróttal párhuzamos komponense 0 (a két oldalon lévő protonok ereje kiejti egymást.)

Vegyünk egy Q töltésű protont a drótban x távolságra a töltéspontunkból állított merőleges talppontjától. A töltésünkre ez a proton

$$k\frac{Q\,q}{r^2+x^2}$$

Coulomb-erővel hat. Itt k a szokásos konstans, amelynek értéke körülbelül $9\cdot 10^9\ \mathrm{N m^2} c^{-2}$). Az erő drótra merőleges komponense a nagyságának $r(r^2+x^2)^{-1/2}$-szeresét teszi ki. Tehát a Coulomb-erő drótra merőleges komponensének nagysága

$$k\frac{r\,Q\,q}{\sqrt{\left(r^2+x^2\right)^3}}.$$

Ha a drót összes protonjára összeadom ezeket a drótra merőleges komponenseket, akkor az eredő erőre

$$F_{\text{eredő}} = k\,r\,q\,\rho\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(r^2+x^2\right)^3}}\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

adódik, ami $x = ry$ helyettesítéssel

$$k\,q\,\rho\,\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+y^2\right)^3}}\,\mathrm{d}y \qquad (2)$$

alakra írható át. Itt az

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+y^2\right)^3}}\,\mathrm{d}y$$

határozott integrál konstans, ami történetesen 2-vel egyenlő. Tehát a Coulomb-erők drótra merőleges irányú eredője

$$F_{\text{eredő}} = \frac{2\,k\,q\,\rho}{2}.$$

Ugyanez a számítás természetesen igaz a vezetékben lévő elektronok által kifejtett Coulomb-erőre is.

A töltések nagysága mozgás során

Egy semleges drótban ugyanannyi proton és elektron van, így sűrűségük is ugyanannyi, tehát, ha egy töltést helyezünk a drót mellé, akkor a protonok és az elektronok hatása éppen kiejti egymást, így nem ébred a töltésre ható erő. Amikor áram kezd folyni, továbbra is azt tapasztaljuk, hogy az álló töltésre sem vonzó, sem taszító erő nem hat. Ebből azt a következtetést vonjuk le, hogy egy álló megfigyelő szemszögéből a drótban a protonok és az elektronok sűrűsége továbbra is megegyezik. A későbbiekből majd kiderül, hogy e feltételezés nem magától értetődő, de – megfigyelésünkre hivatkozva – igaznak tesszük föl.

Az elektronok az áramban v sebességgel mozognak. A protonok sűrűsége a saját szemszögükből ρ. Mivel mi a protonokhoz képest állunk, ezért sűrűségüket mi is ρ-nak látjuk. Korábban megállapítottuk, hogy az elektronok sűrűségét szintén ρ-nak látjuk. Viszont az elektronok hozzánk képest mozognak, azaz mi is mozgunk az elektronokhoz képest.

A speciális relativitáselméletből tudjuk, hogy így két elektron távolságát mi az elektronok által érzékelt távolság $(1-v^2)^{1/2}$-szeresének érzékeljük. Ez a hosszkontrakció jelensége. (A mértékegységeket úgy választottuk, hogy a fénysebesség 1 legyen.) Így szokványos sebességekre ez a $(1-v^2)^{1/2}$-es szorzójú összehúzódás nem látható. Most azonban, mint később látni fogjuk, mégis érzékelhető következményei lesznek. Tehát mi az elektronok sűrűségét $(1-v^2)^{-1/2}$-szeresének érzékeljük, mint maguk az elektronok. Így az elektronok szerint az ő saját sűrűségük kisebb: $(1-v^2)^{1/2}\rho$.

Most w sebességgel kezdjünk futni a dróttal párhuzamosan (w előjeles mennyiség). A futó megfigyelő úgy látja, hogy a protonok távolsága $(1-w^2)^{1/2}$-szeresére változik, tehát a protonok sűrűségét $(1-w^2)^{-1/2}\rho$-nak látja. Az elektronokhoz képesti sebességünk nem egyszerűen $w-v$, ahogyan a szokványos fizikában megszoktuk. A relativitáselmélet sebességek összeadására vonatkozó szabálya szerint az elektronokhoz képesti sebességünk:

$$\frac{w-v}{1-v\,w}.$$

(Ez is egy olyan jelenség, amit általában közvetlenül nem érzékelünk, mivel vw értéke elhanyagolhatóan kicsi, ha úgy vesszük föl a mértékegységeket, hogy a fénysebesség 1 legyen.)

Az elektronok a saját sűrűségüket $(1-v^2)^{-1/2}\rho$-nak érzékelik, és mi ennek

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{w-v}{1-v\,w}\right)^2}}$$

részét látjuk. Tehát a w sebességgel futó megfigyelő szemszögéből az elektronok és a protonok sűrűségének különbsége:

$$\rho\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{w-v}{1-v\,w}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\right). \qquad (3)$$

Mivel

$$1-\left(\frac{w-v}{1-vw}\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(1-2\,v\,w+v^2\,w^2\right)-\left(w^2-2\,v\,w+v^2\right)}{(1-v\,w)^2} =$$

$$= \frac{\left(1-v^2\right)\left(1-w^2\right)}{(1-v\,w)^2},$$

ezért

$$\rho\left(\sqrt{\frac{1-v^2}{1-\left(\frac{w-v}{1-vw}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\right) =$$

$$= \rho\left(\frac{1-v\,w}{\sqrt{1-w^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\right) =$$

$$= \rho\,\frac{-v\,w}{\sqrt{1-w^2}},$$

ami a szokványos mértékegységekre átírva a

$$\frac{\frac{-v\,w}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}\,\rho = \frac{-v\,w}{c\sqrt{c^2-w^2}}\,\rho$$

kifejezést adja.

Az elektronok sűrűsége (az álló szemszögéből) szorozva az elektronok sebességével nem más, mint az egységnyi idő alatt áthaladó elektronok száma, azaz az áramerősség. Vagyis $\rho v = I$, így a protonok és az elektronok sűrűségének különbsége a w sebességgel futó megfigyelő szemszögéből:

$$\frac{I\,w}{c\sqrt{c^2-w^2}}.$$

Az $(c^2-w^2)^{-1/2}$-es szorzót szokványos w sebességeknél konstans $1/c$-nek becsülhetjük.

Tehát a megfigyelő a sűrűségek különbségét

$$\frac{I\,w}{c^2}\text{–nek}$$

látja, amely mind az I áramerősséggel, mind a w sebességgel egyenesen arányos.

A Lorentz-erő származtatása

A cikk elején szereplő számításokra hivatkozva, a dróttól r távolságra, a dróttal párhuzamosan w sebességgel haladó q töltésre ható Coulomb-erők eredője

$$\frac{2\,k\,q\,\frac{I\,w}{c^2}}{r}.$$

Amint említettük, k körülbelül $9\cdot10^9$ $\mathrm{Nm^2}c^{-2}$ értékű, míg c^2 jó közelítéssel $9\cdot10^{16}$ $\mathrm{m^2s^{-2}}$, így a töltésünkre ható, a drótra merőleges Coulomb-erők eredője jó közelítéssel

$$2\cdot10^{-7}\,\frac{q\,I\,w}{r}.$$

Másrészt a Lorentz-erő nagysága w sebesség szorozva q töltéssel és szorozva a mágneses térerősséggel. A mágneses térerősség a vezetőtől r távolságra pedig

$$\frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,r},$$

ahol μ_0 konstans és értéke körülbelül $4\pi\cdot10^{-7}$ $\mathrm{TmA^{-1}}$. Tehát a Lorentz-erő nagysága

$$w\,q\,\frac{4\pi\cdot10^{-7}\,I}{2\,\pi\,r} = 2\cdot10^{-7}\,\frac{q\,I\,w}{r}.$$

Ugyanazt az eredményt kaptuk, vagyis valójában a Lorentz-erő nem más, mint a töltésre ható Coulomb-erők eredője, figyelembe véve a speciális relativitáselmélet szabályait.

Melléktermékként az is kijött, hogy a Lorentz-erő általánosan használt képlete nagy w sebesség mellett már nem pontos, ekkor ugyanis az elhanyagolt

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}$$

szorzóval is számolni kell.

A lektor megjegyzése

A szerzőnek kijött a numerikus egyezés, azaz a k konstans és c^2 értéke, valamint a μ_0 között kapcsolat van, ami nem véletlen. Egyetemi tananyag az elektromágneses sugárzás tárgyalása kapcsán, hogy

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0\,\varepsilon_0} \text{ és } \mathrm{k} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0},$$

tehát fennáll a

$$\frac{k}{c^2} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}$$

összefüggés.

Simon Ferenc
BME