

űrszemét-takarítási küldetés eDeorbit űrhajójának első feladata az Envisat műhold Föld légkörébe történő beléptetése lesz, ahol azután elég. Az előkészületek 2020 márciusában kezdődtek.

Irodalom

1. Slíz-Balogh J., Horváth D., Szabó R., Horváth G.: Dynamics of spherical space debris falling to Earth: Time, velocity and angle of impact versus launch height, direction, speed and size of re-entry particles. *Astronomical Notes* 341/3 (2020) 245–247.
2. ESA honlapja: http://www.esa.int/Safety_Security/Space_Debris
3. Kessler D.: Collisional cascading: the limits of population growth in low Earth orbit. *Advances in Space Research* 11 (1991) 63–66.
4. Klinkrad H.: *Space Debris, Models and Risk Analysis*. Springer: Heidelberg (2006)
5. NASA honlapja: https://www.nasa.gov/mission_pages/station/news/orbital_debris.html



7. ábra. A szerencsétlenül járt Columbia űrsikló megtalált darabjai (forrás: <https://www.space.com/19436-columbia-disaster.html>).

A FIZIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI ELJÁRÁSOK A FIZIKATANÍTÁSBAN – feladatokon keresztül bemutatva

Wiedemann László
Budapest

A mondanivalót két oldalról közelítjük. Előtérbe állítjuk az alkalmazott tanítás-módszertani elveket, másrészt a választott fizikai problémák elemzésével igyekszünk rámutatni e szakmódszertani elvek érvényesítésére. Bonyolult matematikai részek elhagyhatók.

Módszertani elvek

- Az adott feladat vagy probléma rövid és világos megfogalmazása az első. Ne legyen túl egyszerű! A triviális példák a módszertan más részéhez tartoznak.



Wiedemann László (1931) középiskolai fizika-matematika tanár, egyetemi doktor (1964). Tíz év gimnáziumi tanítás után a Fővárosi Pedagógiai Intézetben 35 évet dolgozott a tanártovábbképzés területén, 25 éven át volt tagja az OKTV versenyzőinek. Jelenleg is részt vesz a Mikola-verseny munkájában és feladatkitűző a *KöMaL* fizikarovatában. Könyvei jelentek meg a fizika és filozófia kapcsolatáról, valamint cikkei a *Fizikai Szemlében*. Rátz Tanár Úr Életműdíjat kapott 2003-ban.

- A problémát lehetőleg paraméteresen kell kezelni. Ez adja a matematikai elemzés lehetőségét és a diszkussziót. A diszkusszió által matematikai sűrítésben látjuk a fizikai tartalmat, ugyanakkor a végformulában a paraméterek kritikus értékadásával határesetben analóg probléma megoldását nyerjük. Például súrlódásos mozgások esetén, ha az esetleg bonyolult végképletben $\mu \rightarrow 0$ határérték eljárást alkalmazunk, megkaphatjuk az analóg súrlódásmentes mozgások leírását. A diszkutálás végül a probléma elmélyítését eredményezi.

- Az elmélyítés más úton is megvalósítható; vagy továbbvisszük vagy visszatérünk rá, de más oldalról. Valójában analóg problémákat dolgozunk fel. Itt jön szóba az a hasznos eljárás, hogy egy gondolati láncra fűzzük fel az így keletkezett újabb problémákat, ezzel kiemelve egy fizikai-szakmai sávot, amelyen belül kell maradni. Így megvalósítható az egzaktitás és a lehatárolás.

Eközben, ha lehetséges, egy párhuzamosan vitt demonstráció jól hozzájárulhat a szemléletességhez. Ha egy vonatkozó mérést is sikerül beállítani, még jobb. A numerikus számolás végülis elengedhetetlen, a kvantitatív tájékozódást teszi lehetővé.

- Fontosak a közelítések. Kétfélet kell kiemelni; egyrészt, amikor matematikai számításban alkalmazunk közelítést, másrészt, amikor magában a fizikai megfontolásban, aminek matematikai következményei lehetnek.

Feladatok

A választott központi törvény, amelyre a következő problémák tárgyalása alapozódik, legyen a Hooke-törvény. Így a rugalmas szállal foglalkozunk. Ha az eredetileg x hosszúságú szállra F húzóerő hat a szál irányában, akkor az megnyúlik. A megnyúlása legyen y , ekkor

$$y = \frac{1}{EA} Fx.$$

Hangsúlyozni kell, mint szakmai-módszertani szempontból új elemet, hogy a Hooke-törvény a rugalmas szál belső pontjaira is igaz, vagyis, ha a szál eredetileg L hosszúságú, akkor egy $x < L$ szakaszára is fennáll, sőt egy L -en belül választott Δx szakaszra is. Ez a mélyebb értelmezés már túlmutat a legegyszerűbb alkalmazásokon. A következő feladatban a megnyúlt rugalmas szál sűrűségeloszlását kívánjuk meghatározni, ezzel kitekintve fizikai mennyiségek eloszlására.

1. feladat

Homogén, állandó keresztmetszetű, L hosszúságú rugalmas szálat egyik végénél fogva felfüggesztünk.

Milyen lesz a felfüggesztett nyugvó szál hosszmenti sűrűségeloszlása, ha feltételezzük a Hooke-törvény érvényességét a szál belső pontjaira is?

A szál kezdetben vízszintesen nyugszik, feszítetlen és sűrűsége állandó.

Megoldás

Tekintsük a rugalmas szálat erőmentes állapotában referenciaszállnak. Hosszmenti erőhatás esetén a szál megnyúlik és az alakváltoztató erő a szál belső pontjaiban tetszőleges eloszlású lehet; $F(x)$, x a referencia szállra mért hosszúság. Az eltolódás a 0 rögzített ponttól mért referenciatávolsággal arányos, így a referenciaszáll lineáris transzformációval átmegy a megnyúlt szállba.

A szemléletesebb számolás kedvéért bevezetjük a ρ vonalsűrűség fogalmát,

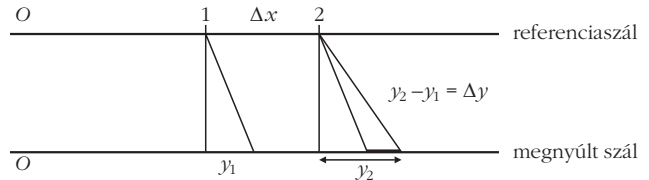
$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta x},$$

a hosszegység tömegét.

Például a homogén, nyújtatlan szállra $\rho = m/L$, ahol m a szál tömege, L a szál hossza. A vonalsűrűség arányos a szokott térfogati sűrűséggel.

Legyen az $O1 = x$ szakasz megnyúlása y_1 , az $O2 = x + \Delta x$ szakasz megnyúlása y_2 (1. ábra).

Látható, hogy a 2. pont elmozdulása nem lehet csupán y_1 , hanem $y_2 > y_1$, mert a Δx szakasz is nyúlik. Így



1. ábra

Δy a Δx szakasz megnyúlása. Viszont e kettő között érvényes a Hooke-törvény:

$$\Delta y = \frac{1}{EA} F(x) \Delta x, \quad (1)$$

ahol E a rugalmassági modulusz, A a szál keresztmetszete, $F(x)$ az alakváltoztató erő. Másrészt fennáll, hogy az eredetileg Δx -ben foglalt tömeg most $(\Delta x + \Delta y)$ hosszúságra oszlik el. Ezért

$$\rho_1 \Delta x = \rho (\Delta x + \Delta y), \quad (2)$$

ahol ρ_1 a referenciaszáll állandó értékű vonalsűrűsége. Átalakítás után (mivel Δx és Δy még véges)

$$\rho = \rho_1 \frac{1}{1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}}. \quad (3)$$

Úgy tekintjük tehát, hogy Δx megnyúlása Δy és ezek között érvényes a Hooke-törvény.

A direkciós erő bevezetésével igen szemléletes képet kapunk a szál sűrűségeloszlásáról. Írjuk át a Hooke-törvényt:

$$y = \frac{1}{EA} Fx \rightarrow F = \frac{EA}{x} y,$$

így az x hosszúságú „belső” szálrész D_x direkciós ereje $D_x = EA/x$, az L hosszúságú szál D direkciós ereje

$$D = \frac{EA}{L}. \quad (4)$$

Az (1) és (4) összevetéséből (3) jól kezelhető alakra hozható:

$$\rho(x) = \rho_1 \frac{1}{1 + \frac{F(x)}{DL}}. \quad (5)$$

Az (5) képlet adja a megoldást; ezután diszkutálni kell:

a) Ha például a vízszintesen elhelyezett szálat egyik végén befogjuk, a másik végén F erővel húzzuk, akkor $F(x) = \text{konstans}$, így $\rho(x)$ is állandó, a szál ritkább lesz.

b) Ha a szálat felfüggesztjük, akkor $F(x)$ változó. Adott x hosszúságú szálrészt az alatta lévő szálrész húzza, így $F(x) = \rho_1(L-x)g$. Ezt (5)-ben figyelembe véve:

$$\rho(x) = \rho_1 \frac{1}{1 + \frac{\rho_1 g}{DL} (L-x)}. \quad (6)$$

Látható, hogy $x = 0$ -ra (a felfüggesztés pontjában) ρ a legkisebb, míg az alsó végén, $x = L$ -re a legnagyobb; $\rho = \rho_1$, hiszen $F(x) = 0$.

Az egészet jól tudjuk demonstrálni az úgynevezett slinky-vel; laza, sokmenetes, nagy átmérőjű csavarrugó, közelítőleg érvényes rá a Hooke-törvény. Felfüggesztve, (6)-nak megfelelő menettávolság alakul ki. A felfüggesztés körül ritkább sűrűségű, azaz a menettávolság nagyobb, míg a szál végén az eredeti ρ_1 sűrűség marad, hiszen alatta már nincs rugórész, aminek súlya húzná.

Ha (3)-ban $\Delta x \rightarrow 0$ határértékre, azaz deriváltra térünk, akkor kapjuk, hogy

$$\rho = \rho_1 \frac{1}{1 + y'}, \quad (3.a)$$

és tekintsük ezt érvényesnek a továbbiakban.

A (3.a) eloszlásfüggvény egy C konstans erejéig van meghatározva, ami kiszámítható. A (3.a) eloszlást ugyanis normálni kell, ami itt azt jelenti, hogy a normált $\rho(x)$ -et integrálva a $(0, L)$ határok között, a megnyúlt szál tömegét kell megkapni, ami most is $\rho_1 L$.

Ez az integrál C -re ad egy egyenletet, ha a (6)-os képletben $(L-x)$ helyett $C(L-x)$ -et írunk.

Az (1) képletre másképpen is eljuthatunk. Eddig a szemlélet alapján írtuk fel. Tekintsük most az x_1 és x_2 szakasz megnyúlását, vagyis az 1 és 2 pontok eltolódását. Innen

$$\Delta y = \frac{1}{DL} (F_2 x_2 - F_1 x_1).$$

Mint hogy $F x$ szerint lineáris, F_1 és F_2 helyett közelítésül ezek átlagát vehetjük. Ha felfüggesztett szárról van szó, akkor $F(x) = \rho_1 g(L-x)$. Ezeknek és Δx határértékének figyelembevételével ugyancsak az (1) képletre jutunk, ha azt már a felfüggesztett szárra konkretizáltuk.

2. feladat

Most alapnak tekintjük a már felhasznált általánosabb Hooke-törvényt és azt forgással kombináljuk. Tekintsünk tehát egy vízszintes síkon nyugvó, súlytalanak vehető rugót, egyik végéhez egy merev, m tömegű, homogén anyageloszlású rudat erősítünk, másik végét egy függőleges tengelyhez kötjük. A rugó és a rúd egy egyenesbe esnek. Ezután a rendszert forgásba hozzuk, amely állandó ω szögsebességgel forog a vízszintes síkban. Mekkora lesz a rugó megnyúlása?

Megoldás

Módszertani szempontból érdemes egy lépéssel visszazárni és onnan kezdeni. Ez esetben a jelenlegi feladat már egy továbbfejlesztett feladat lesz. Először tehát nézzük az egyszerűbb, analóg feladatot, ahol a homogén, merev rúd helyett egyetlen m tömegű golyó van a rugó végén. Most az a megoldás, hogy a megnyúlt rugóban ébredő erő biztosítja a centripetális erőt:

$$Dy = m \omega^2 (L + y),$$

ahol D a direkción erő, L a feszítetlen rugó hossza, y a keresett megnyúlás. Ebből

$$y = \frac{L}{\frac{D}{m \omega^2} - 1},$$

itt $D/m = \omega_0^2$ a rezgő és nem a forgó rendszer sajátfrekvenciája. Átírva

$$y = \frac{L}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1} \text{ és } \frac{\omega_0}{\omega} > 1 \text{ legyen.}$$

Erősítsük a rugó végére a merev rudat és így forgassuk meg a rendszert! E továbbfejlesztett változatban új fizikai kép áll előttünk. A rudat most hossz-tengelyére merőlegesen vékony, Δx vastagságú szeletekre osztva képzeljük. Minden szelet más-más távolságra van a forgástengelytől ezért az egyes szeletekre külön-külön kell számolni, majd összegezni a centripetális erőket. Az alapelgondolás változatlan. Egy szelet tömegét a ρ vonalsűrűséggel fejezzük ki: $\rho \Delta x$, határesetben ρdx .

A rúd hossza legyen h , a keresett megnyúlás y , ekkor ω szögsebességű forgáskor stacionárius állapotban (2. ábra)

$$Dy = \int_{x=0}^h \omega^2 (L + y + x) \rho dx,$$

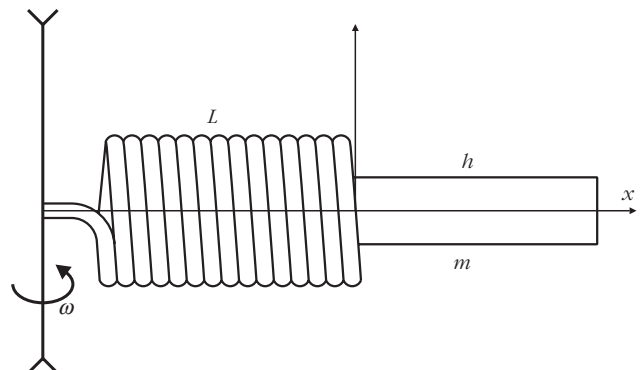
ahol x -et a rúd elejétől mérjük. Kiszámítás és átalakítás után az eredmény:

$$y = h \frac{L + \frac{h}{2}}{\frac{D}{\rho \omega^2} - h}.$$

Mivel $m = \rho h$, ezért

$$y = \frac{L + \frac{h}{2}}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1}.$$

2. ábra



A megoldás feltétele most is az $(\omega_0/\omega)^2 > 1$ kritérium. A feladat integrálás helyett középiskolai összegzős módszerrel is megoldható.

3. feladat

Az előbbi gondolatsor utolsó állomásának tekinthető ez a feladat. Valójában kitekintést nyújt a nehezebb problémák felé. Középiskolában ebből csak a gondolatmenet lehet használható, a matematikai rész túlmegy a tananyagon. Módszertani szempontból új elemként ki kell emelnünk, hogy az előrehaladás érdekében zárt egységekben gondolkodunk, tehát valahol mindig berekesztjük a további analízist. Később más kontextusban lehet folytatni. E probléma tehát továbbgondolásra való.

A mostani probléma az előbbi tetemes továbbfejlesztése. Forgassunk egy m tömegű, D direkciós erejű, feszítetlen állapotában L hosszúságú rugót vízszintes síkban úgy, hogy egyik végét függőleges tengelyhez erősítsük. Kérdezzük, hogy milyen lesz a rugó hosszmenti sűrűségeloszlása és a helyi megnyúlása. Kezdetben a $\rho_1 = m/L$ vonalsűrűség állandó, és keressük a $\rho(x)$ függvényt.

Megoldás

Az x tengelyt a rugó irányában, a forgástengelytől számítva vegyük fel. Most is bevezetjük a referenciaszálát, amely a valódi szál mellett azzal együtt forog és nem deformálódik. Erre illesztjük az x tengelyt. A referenciaszálra azért van szükség, mert így a $\rho_1 \Delta x$ tömegű szeletek transzformációjával jutunk a megnyúlt szálra. Fontos, hogy a változó, keresett $\rho(x)$ vonalsűrűség helyett a konstans ρ_1 vonalsűrűséggel lehet számolni. Tehát keressük az x tengely menti, az x helytől függő helyi megnyúlást. Adott x helyen a megnyúlás által okozott rugóerő biztosítja az x -től jobbra eső rugórész forgásához szükséges centripetális erőt, ami – mivel minden szelet más-más távolságra van a forgástengelytől – az egyes szeletekre ható centripetális erők összege.

Ha az x szálrész megnyúlása y , akkor a csatlakozó Δx hosszúságú szakasz megnyúlása Δy , és a Hooke-törvény szerint az 1. feladat (1) képlete alapján

$$\Delta y = \frac{1}{DL} F(x) \Delta x,$$

ahol $F(x)$ az x helyhez tartozó centripetális erő. Az előbbieken alapján $F(x) - a \Delta x \rightarrow 0$ határérték vételével – így írható fel:

$$F(x) = \int_x^L (x+y) \omega^2 \rho_1 dx.$$

Egymásba helyettesítve, majd az integrál határait felcserélve, az $y(x)$ helyi megnyúlásra integrálegyenletet kapunk:

$$y' = \frac{-\omega^2 \rho_1}{DL} \int_L^x (x+y) dx, \quad (i)$$

Vezessük be az

$$\Omega^2 = \frac{\rho_1}{DL} \omega^2$$

állandót és az (i) egyenletre alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt,¹ akkor az integrál felső határa szerinti deriváltja maga az integrandusz. Így végül a megoldandó másodrendű inhomogén differenciálegyenlet:

$$y'' = -\Omega^2 (x+y).$$

A megoldás trigonometrikus és lineáris függvények kombinációja. A további diszkusszió szempontjából fontosak a kezdőfeltételek. Ezek megadása nem triviális:

$$\begin{aligned} x = 0 & & x = L \\ y = 0 & & \rho = \rho_1 \end{aligned}$$

Ezekkel a differenciálegyenlet konkrét megoldása:

$$y = \frac{\sin(\Omega x)}{\Omega \cos(\Omega L)} - x. \quad (ii)$$

A $\rho(x)$ sűrűségeloszlást a (3.a) képlet adja, vagyis

$$\rho = \rho_1 \frac{1}{1+y'}.$$

Ezután (ii)-ből előállítjuk az y' függvényt és $\rho(x)$ -be helyettesítjük, végül

$$\rho(x) = \rho_1 \frac{\cos(\Omega L)}{\cos(\Omega x)}.$$

Jól látszik, hogy a forgó rugó vége felé haladva, $x \rightarrow L$, $\rho \rightarrow \rho_1$, míg a forgástengelynél a ρ vonalsűrűség a legkisebb; $\rho(x=0) = \rho_1 \cos(\Omega L)$. Igen szép diszkussziók kínálkoznak még, de ezekre már nem térünk ki. Itt is normálni kellene az előbbi sűrűségfüggvényt. Hasonlóan megtehetjük egy C konstans bevezetésével egy nehezebb, C -re vonatkozó egyenlet megoldásaként. Végülis az adódik, hogy az Ω helyett $C\Omega$ írandó. További érdekesség például, hogy (ii)-ből $x = L$ helyettesítéssel megadható a forgó rugó megnyúlása. Célszerű az Ω állandót átírni; $\Omega L = \omega/\omega_0$, ahol ω_0 a rugóhoz rendelt sajátfrekvencia. A normálás miatt a képletben itt is $C\Omega$ írandó.

A probléma megoldható a referenciaszál bevezetése nélkül is. Ez esetben az egyes szeletek más-más tömegűek $\Delta m = \rho(x) \Delta x$, ahol ρ most már a megnyúlt szál helyi sűrűsége. Ekkor $\rho(x)$ -re kapunk differenciálegyenletet. A két megoldás megegyezik.

¹Newton–Leibniz-tétel kimondja, ha az $f(t)$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon és az $F(x)$ integrálfüggvényt a következő módon definiáljuk az $[a, b]$ -n:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

akkor $F(x)$ értelmezve van, folytonos az $[a, b]$ -n, differenciálható (a, b) -n és

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$