# A SZÁMTANI ÉS MÉRTANI KÖZÉP KARRIERJE A FIZIKÁBAN

Biró Tamás Sándor
MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont

E cikk célja bemutatni, hogy a fizika mélyen fundamentális koncepciói, mint az entrópia és a kvantumos elmosódás[1] nagyon egyszerű, középiskolában is tárgyalt összefüggésekből kiindulva is felépíthetők, miközben a szakember számára is új élményt, további mélységet adhat e két, általában külön tárgyalt jelenség – bizonyos matematikai képletek mentén történő – összekapcsolása. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség általában algebrai alakban ismert, de eredete geometriai, s ezáltal sokkal régebbi lehet, mint algebrai formuláink. Már a régi görögök is tudták, tudhatták, csak jelentése számukra még egészen más volt.

A továbbiakban ezt az összefüggést tárgyalom, igen egyszerű megfogalmazással indítva, s ahol a helyszűke megengedi bizonyításokkal és megjegyzésekkel fűszerezve. Azután fokozatos általánosításokról esik szó, amelyek elvezetnek annak belátásához, hogy az entrópia az egyenletes eloszlásra maximális, természetesen további megszorító feltételek híján. Ennek kapcsán kiderül, hogy e tulajdonsághoz elegendő egy bizonyos konvexitás, amit nem csak a klasszikus boltzmanni képletben szereplő logaritmus függvény elégít ki. Vannak modern javaslatok más képletekre is, és ezek némelyike bizonyos jelenségcsoporthoz – ahol a klasszikus termodinamikai feltételek nem teljesülnek hiánytalanul – kapcsolódva természetesebb, egyszerűbb leíráshoz vezet.

Formális véletlennek tűnik, de ugyanez a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerepel a kvantumfizikai mennyiségeket kezelő hermitikus operátorokra levezetett, a mért értékek varianciáinak szorzatára érvényes alsó határ kifejezésében. Az ilyen egyenlőtlenségeket szokás „határozatlansági relációknak” nevezni; az eredeti és leginkább ismert összefüggés a hely- és impulzuskoordináták közötti, ez *Heisenbergtől* származik. Azonban más mennyiségpárokra is igaz, és ennek kapcsán a modern fizika további elméleti konstrukcióinak megtekintéséig is eljuthatunk, jelesül az energia és idő közötti, illetve az energia és impulzus közötti, a varianciák szorzatára vonatkozó alsó határt kifejező egyenlőtlenségekig. Érdekes módon ezen megfontolások egyike a gyorsulással arányos hőmérséklet (úgynevezett Unruh-hőmérséklet [1]) szerepére is rámutat egy váratlan nézőpontból. Remélem, hogy mindez az Olvasónak is szórakozást és egyben szellemi kalandot nyújt.

[1] Nem támogatom a „határozatlanság” fordítást az eredeti német „Unschärfe” kifejezésről, amely az angol átmenetben az „uncertainty” révén még őrizte a kép életlenségének, bizonytalanságának jelentését is, de a magyar szóban már az elemi, atomi részecskéket mintegy döntési képességgel és az ezzel kapcsolatos hezitálással ruházza fel, ami teljesen félrevezető.

*Biró Tamás Sándor* elméleti fizikus, az MTA Wigner FK RMI igazgatóhelyettese, tudományos tanácsadó. Kutatási területe a nehézion-fizika, a kvark-gluon plazma, amely sokszor extrém sűrű és forró, erősen kölcsönható rendszerekben térelméleti és statisztikus fizikai módszerek alkalmazását is megköveteli. Ezt jól tükrözi a Springer kiadó *Fundamental Theories of Physics* sorozatában megjelent könyve, *Is There a Temperature? – Conceptual Challenges at High Energy, Acceleration and Complexity.*

## A számtani, mértani és a harmonikus közép rangsora

*Ez a fejezet általános középiskolai ismereteknél nem kíván magasabb matematikát.*

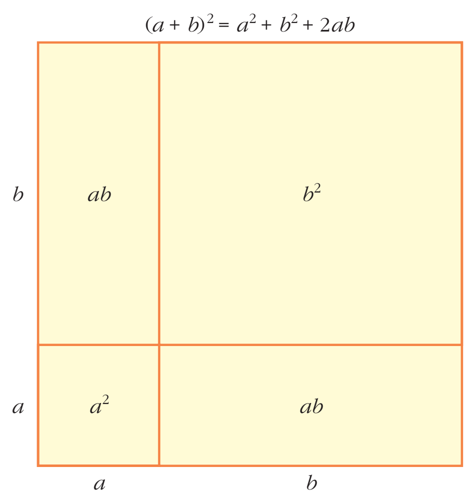
A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség, az $A \geq G$, talán nem algebrai, hanem inkább geometriai eredetű. Az *1. ábrán* egy négyzet felosztása látható, az oldalhossz két részre, egy $a$ és egy $b > a$ hosszúságú részre bontásával.

Ez a felbontás a teljes, $(a+b)^2$ területű négyzetet egy $a^2$, illetve egy $b^2$ területű kisebb négyzetre és két egybevágó, egyenként $ab$ területű téglalapra osztja fel. A teljes területet kifejező egyenlet

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b. \tag{1}$$

Természetszerűleg a régi görög szemlélet szerint itt $a$ is és $b$ is pozitív mennyiségek (persze nem használtak latin betűket, sőt görögöt sem e tény kifejezésére). A modern algebrai szemléletű diák rögtön úgy néz rá az (1) képletre, amiben $a$ akár $-a$-val is helyettesíthető,

*1. ábra.* Egy $a+b$ oldalhosszúságú négyzet felbontása az oldal felosztásával két kisebb, egymással általában nem egyenlő négyzetre és két egybevágó téglalapra.



egy geometriai alakzat oldalhossza azonban nem lehet negatív. Mégis van kiút a geometria nyelvén is: most az összességében $b$ oldalhosszúságú négyzet egy $a > 0$ és egy $b - a > 0$ felosztását tekintjük. Ezzel így alakul a fenti egyenlet:

$$b^2 = a^2 + (b-a)^2 + 2\,a\,(b-a). \tag{2}$$

Ezt az egyenlőséget már csak rendezni kell (a mértan nyelvén a kivágott alakzatokat ide-oda tologathatjuk az összeg egyenlőségének két oldalán). Eredményünk a különbség-oldalhosszú négyzet területének kifejezése:

$$(b-a)^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b. \tag{3}$$

Nyilvánvaló, hogy a negatív értékek és a számokat helyettesítő betűk elfogadásával (ami azonban Európában nem régebbi a 12. századnál) már az első kifejezés tartalmazza a különbségre vonatkozó eredményt is.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy minden négyzet területe nagyobb nullánál, vagy esetleg egyenlő vele, amikor az alakzatot egyetlen pontra, nulla oldalhosszúságúra húzzuk össze. A fenti két eredmény közös kifejezése

$$\left(|b| - |a|\right)^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2\,|a|\,|b| \geq 0. \tag{4}$$

Innen egyszerű átrendezés adja a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b|^2\right) \geq \sqrt{|a|^2\,|b|^2}\,. \tag{5}$$

Ebben az egyenlőtlenségben a bal oldalon az $|a|^2$ és $|b|^2$ mennyiségek átlaga, számtani közepe szerepel, míg a jobb oldalon ugyanazok mértani közepe. Tehát bármely két nemnegatív $a_1$, $a_2$ számra igaz, hogy

$$A_2 \equiv \frac{1}{2}\left(a_1 + a_2\right) \geq a_1^{1/2}\,a_2^{1/2} \equiv G_2. \tag{6}$$

Itt a négyzetgyököt – nem véletlenül – immár 1/2-ik hatványként jelöltük.

Ezen alapegyenlőtlenségből kiindulva további eredmények is nyerhetők. A legismertebb, s talán legközvetlenebb, a harmonikus közép beillesztése e sorba. Ehhez egyszerűen a fenti (6) egyenletet a tagok reciprokára, $1/a_1$-re és $1/a_2$-re alkalmazzuk:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \geq \frac{1}{a_1^{1/2}}\,\frac{1}{a_2^{1/2}}. \tag{7}$$

Mindkét (pozitív) oldal reciprokát véve az egyenlőtlenség megfordul:

$$a_1^{1/2}\,a_2^{1/2} \geq \frac{2}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}}. \tag{8}$$

Ezzel bizonyítást nyer az egyszerű közepek hármas rangsora: $A_2 \geq G_2 \geq H_2$.

## Az egyenlőtlenség általánosítása

*E fejezet tagozatos középiskolai és kezdő egyetemi ismereteket tárgyal.*

Mennyire tudjuk a fenti szép eredményt a közepek rangsoráról általánosítani? Ez több lépésben lehetséges. Elsőként az 1/2-1/2 szorzók (súlyfaktorok) és hatványok helyett tekintsünk általános $p_1$ és $p_2$, nulla és egy közé eső számfaktorokat, azaz $p_i \in [0,1]$. Az egyetlen kikötés, hogy összegük egységnyi: $p_1 + p_2 = 1$. Ekkor a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alakja az alábbi:

$$A_2 \equiv p_1\,a_1 + p_2\,a_2 \geq a_1^{p_1}\,a_2^{p_2} \equiv G_2. \tag{9}$$

Bizonyítását két lépésben végezzük el. Először feltesszük, hogy $a_1 > a_2$. Ha nem így lenne, felcseréljük a két elemet és az átnevezés után teljesül a feltevés. Vagyis az $a_1 > a_2$ kritérium nem szorítja meg az általánosságot, ennek alapján az $a_1/a_2 = 1 + x$ arány képletében $x > 0$. Továbbá legyen $p_1 = p$ és ekkor $p_2 = 1 - p$. Osztva $a_2 > 0$-val a (9) egyenletet kapjuk hogy

$$p\,(1+x) + (1-p) \geq (1+x)^p. \tag{10}$$

Az állítást egyszerűsítve, $1 + px \geq (1+x)^p$ áll fenn nulla és egy közötti $p$-re és pozitív $x$-ekre.

Az $1 + x$ összeg egynél kisebb (tört) hatványát bonyolult meghatározni, ezért újabb apró trükkhöz folyamodunk: megvizsgáljuk az egyenlőtlenséget $p = 1/w$ értékekre, ahol $w$ pozitív egész szám. E vizsgálat eredményét azután kiterjesztjük (igazából „elfolytatjuk”) tetszőleges $w > 1$-re és ezzel tetszőleges $0 < p < 1$-re. Átrendezve (10)-et és $w > 1$ hatványra emelve kapjuk, hogy

$$\left(1 + \frac{x}{w}\right)^w \geq 1 + x. \tag{11}$$

Itt már a bal oldal egy kéttagú összeg (eredetileg egész, később tetszőleges) hatványa, ami a binomiális képlettel sorba fejthető. Az így kapott kifejezés

$$1 + x + \binom{w}{2}\frac{x^2}{w^2} + \ldots \geq 1 + x, \tag{12}$$

– ahol a … jelölés magasabb $x$ hatványokat takar – minden $x > 0$ értékre pozitív vagy esetleg nulla tagokat tartalmaz a bal oldalon, túl az $1 + x$-en, ami a jobb oldalon is áll. Vagyis a kijelentésünk igaz[2] egész $w = 1/p$ értékekre.

---

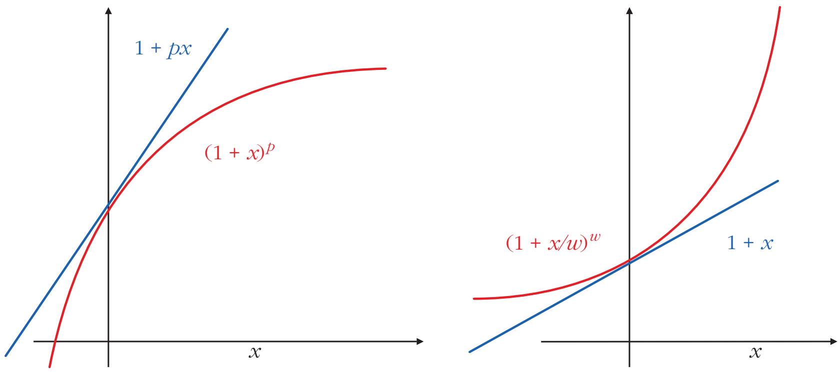
[2] Itt a

$$\binom{w}{k}$$

kifejezés a $w$-ből $k$-szor az $x$-et és $(w-k)$-szor az 1-et választva adódó $(x/w)^k$ tagok számát jelöli, értéke

$$\frac{w!}{k!\,(w-k)!}.$$

A $w!$ ($w$ faktoriális) a számok szorzata 1-től $w$-ig.




*2. ábra.* Az $(1+x)^p$ (bal oldali ábra) és az $(1+x/w)^w$ görbék futásai (jobb oldali ábra), érintőegyeneseikkel összehasonlítva.

A köztes értékre történő elfogadásához nézzük meg, min múlt ez a bizonyítás! Visszakanyarodva a geometriai szemlélethez két függvényt hasonlítunk össze mind az eredeti, mind a $w = 1/p$-t használó megfogalmazásban. Az egyenlőtlenség az adott függvények konkáv, illetve konvex voltát fejezik ki. A *2. ábrán* láthatók a bal oldalon a (10) és a jobb oldalon a (11) egyenlőtlenség görbéi.

Mindkét esetben az egyenest kék, míg a görbét piros színnel jelöltük. Először az egyenes egyenlete $g(x) = 1+px$, a görbéé $f(x) = (1+x)^p$. Közös az értékük $x = 0$-nál, $f(0) = g(0) = 1$. Ez egyébként az $a_1 = a_2$ eset, amikor két egyenlő mennyiség közepét képezzük. Ekkor természetesen az egyenlőtlenség határesete, az egyenlőség teljesül: a számtani közép minimuma egybeesik a mértani közép maximumával. Az érintő egyenletét a függvények első deriváltja adja meg, ebben a pontban $f'(0) = g'(0) = p$. Végezetül a konvexitás az $x$ tengely felől nézve a második derivált negativitását jelenti. Az egyenes se nem konkáv, se nem konvex, ott ez a derivált eltűnik, $g''(x) = 0$. A görbére pedig $f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2} < 0$, azaz minden pontjában elhajlik az egyenestől, az $x$ tengely felől nézve közelebbre. Ezért minden $x$-re, $f(x) \le g(x)$, azaz beválik a számtani közép szupremáciájának fenti általánosítása.

Ugyanez az elemzés végezhető el az alternatív alakra is. Itt az egyenes egyenlete $g(x) = 1+x$ (kék) a görbe egyenlete pedig $f(x) = (1+x/w)^w$ (piros). A megfelelő függvény-, illetve deriváltfüggvény-értékek rendre: $f(0) = g(0) = 1$ közös érték az érintőpontban, $f'(0) = g'(0) = 1$ közös meredekség ugyanebben a pontban, és végül $g''(x) = 0$ mellett (hiszen ez egyenes) $f''(x) > 0$. Ez a görbe pedig éppen az ellenkező irányba hajlik minden pontjában, ezért $f(x) \ge g(x)$. Mindkét eset elemzése ugyanazt bizonyítja: a két tagú számtani és mértani közép egyenlőtlensége általánosítható tetszőleges, de 0 és 1 közötti súlyozással.

Egy mély levegővételre elegendő röpke szellemi pihenő után nekilátunk, hogy eljussunk a 20. század elején először közölt további általánosításhoz, a Jensen-egyenlőtlenséghez [2]. Első lépésként ehhez az $a_2 \ge G_2$ állítást szeretnénk tetszőlegesen sok tagra kiterjeszteni. Jelölje a tagok számát $N \ge 1$ és a megfelelő nulla és egy közötti súlyfaktorok szintén adódjanak össze az 1 értékre: $\Sigma_{i=1}^{N} p_i = 1$ és $p_i \in [0,1]$. Az általános egyenlőtlenség alakja most

$$\sum_{i=1}^{N} p_i a_i \ge \prod_{i=1}^{N} a_i^{p_i}. \tag{13}$$

Ezt $N = 2$-re éppen az imént bizonyítottuk, az általános eset bizonyításához teljes indukcióval jutunk el, azaz $N-1$-ről $N$-re következtetünk az alapeset ($N = 2$) felhasználásával. Egy fontos dolgot kell előre látni a zökkenőmentes érveléshez: ha $(N-1)$ tagra a súlyok összege 1 volt, és ehhez a sokasághoz hozzáveszünk egy $N$-ik elemet $p_N$ súllyal, akkor az előző $p_i$-ket újra kell normálnunk. A normálási faktor pedig éppen $(1-p_N)$, hogy a súlyfaktorok összege továbbra is 1 maradjon: $p_i \to (1-p_N)p_i$ minden $i < N$-re. Ezt megszívlelve kapjuk az alábbi kifejezéseket

$$\begin{aligned} A_N &= (1-p_N)\,A_{N-1} + p_N\,a_N, \\ G_N &= G_{N-1}^{1-p_N}\,a_N^{p_N}. \end{aligned} \tag{14}$$

Az első kifejezésre a kéttagú egyenlőtlenséget, azután az $(N-1)$ feltevést alkalmazva kapjuk

$$A_N \ge A_{N-1}^{1-p_N}\,a_N^{p_N} \ge G_{N-1}^{1-p_N}\,a_N^{p_N} = G_N. \tag{15}$$

Ezzel bebizonyítottuk a tetszőlegesen súlyozott $N$ tagú számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

## Jensen-egyenlőtlenség és entrópia

*E fejezethez az egyetemi fizikus kutató szak BSc fokozatig terjedő tananyagának ismerete szükséges lehet, de van akinek anélkül is érthető.*

A fenti (13) egyenlőtlenség alkalmazható a termodinamika, a statisztikus fizika és az információelmélet központi fogalma, az entrópia vizsgálatára. Vegyük az egyenlőtlenség logaritmusát, ez – monoton növekvő függvény lévén – nem változtatja meg az egyenlőtlenség irányát:

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{N} p_i a_i\right) \ge \sum_{i=1}^{N} p_i \ln a_i. \tag{16}$$

Alkalmazzuk ezt az eredményt a speciális, $a_i = 1/p_i$ választásra. A konstrukció hátterében az áll, hogy minél valószínűtlenebb egy esemény, annál több információt nyerünk a megfigyelésével, amikor mégis bekövetkezik. Ez magyarázza az $a_i = 1/p_i$ választást. A logaritmus pedig a szorzatot összeggé alakítja, s éppen ez a tulajdonság kívánatos akkor, ha két esemény bekövetkezésének a valószínűsége a valószínűségek szorzata (az ilyen eseménypárokat függetleneknek nevezzük). Megjegyezzük, hogy a (16) egyenlet bal és jobb oldalán is egy-egy $N$ tagú szumma áll, egyaránt a $\Sigma_{i=1}^{N} p_i = 1$ és $p_i \in [0,1]$ súlyokkal. A statisztika nyelvén ezek várható értékek, és ezek között a következő egyenlőtlenség áll fenn:

$$\ln\langle a\rangle \geq \langle \ln a\rangle. \tag{17}$$

Történetesen a fent jelzett választással egy, a *Boltzmann* (*Gibbs, Planck, Shannon*) által megalapozott entrópiaképletre vonatkozó egyenlőtlenséghez jutunk el:

$$S_B[p_i] = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i \leq \ln N = S_B[1/N]. \tag{18}$$

A jobb oldali, majoráló érték, az $\ln N$ éppen a $p_i = 1/N$ választással a bal oldali képlet értékét is adja egyben. Ezzel azt az eredményt kaptuk, miszerint *a Boltzmann entrópia az egyenletes eloszlásra maximális*.

Felmerül a kérdés: ragaszkodni kell-e a logaritmushoz? Hiszen a fentebb bizonyított egyenlőtlenség ennél általánosabb, bolond lenne a Természet, ha ezt nem használná ki. Valóban, a logaritmus helyett más függvény is elképzelhető, ezzel a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség (logaritmusa) még tovább általánosítható. Visszatérve a geometriai vizsgálódásokhoz, megállapítjuk, hogy az $x$ tengely felé hajló, $f''(x) < 0$ tulajdonságú függvények egy adott intervallumon a húr felett futnak. Azt állítjuk, hogy ilyen függvényekre igaz az alábbi Jensen-egyenlőtlenség:

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} p_i a_i\right) \geq \sum_{i=1}^{N} p_i f(a_i). \tag{19}$$

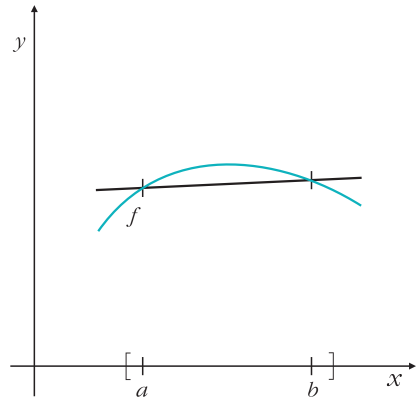
A *3. ábrán* egy ilyen függvényt mutatunk. A $\Sigma_i p_i a_i$ összeg értéke a lehetséges $a_i$-k legkisebb és legnagyobb értékei között változik, ennek függvényértéke – a fenti (19) egyenlőtlenség bal oldala – mindig a görbére esik. Ugyanakkor a függvényértékek, függőleges koordináták hasonló arányú keverékösszege az $(a_i, f(a_i))$ sarokpont-koordináták által határolt sokszög belsejére esik, ami ebben az esetben csak egy húr, amely a görbe alatt köti össze a sarokpontokat. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha egyetlen $p_i = 1$ és a többi nulla. Az $f(x) = \ln x$ második deriváltja negatív, $f''(x) = -1/x^2 < 0$, ez egy ilyen tulajdonságú görbe.

Hasonlóan kezelhető az $f''(x) > 0$ eset, ekkor megfordul az egyenlőtlenség. Ezt demonstráljuk a *4. ábrán*, $N = 4$ esetén. A függvény görbéje a húrok által határolt sokszög alatt fut. Ekkor

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} p_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} p_i f(a_i). \tag{20}$$

az igaz állítás.

Ez az általános Jensen-egyenlőtlenség is kapcsolatba hozható az entrópiával, pontosabban az entrópia meghatározására javasolt, a logaritmus helyett már más függvényeken alapuló képletekkel. Számos ilyen képletjavaslat született az idők során, eltérő motivációkból.



*3. ábra.* Egy $f''(x) < 0$ függvény $f(x)$ görbéje a húrja felett fut ($N = 2$ eset demonstrációja).

A fenti, konvex függvényekre vonatkozó (19) egyenlet speciális esete, amikor a tagok $a_i = 1/p_i$ alakúak; ez a klasszikus eset analógiájaként a Boltzmann-entrópiaképlet „trace formula” típusú általánosítása: a logaritmusra, mint ezt fentebb láttuk, $f'' < 0$, és ezért

$$f(N) \geq \sum_{i=1}^{N} p_i f(1/p_i). \tag{21}$$

Az $f(x) = \ln x$ esetén ez ismét visszaadja Boltzmann képletét:

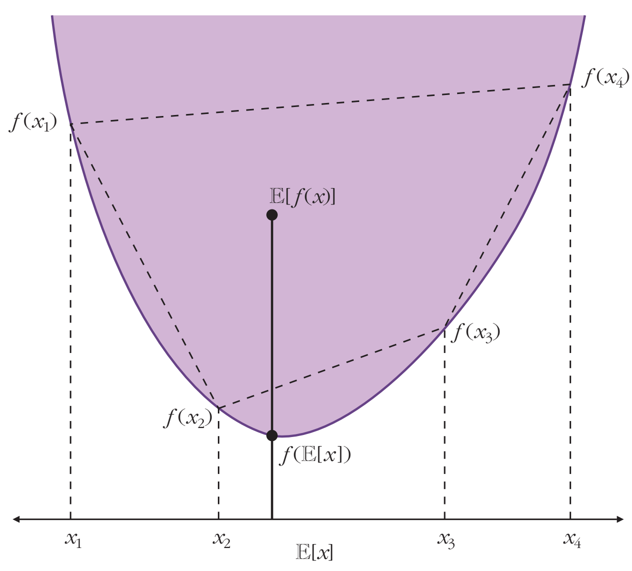
$$S_B[U] = \ln N \geq \sum_{i=1}^{N} p_i \ln\frac{1}{p_i} = S_B[p_i],$$

azonban minden $f''(x) < 0$ függvényre az egyenletes eloszlás a maximális entrópiájú!

Példaként tekintsük *Tsallis* entrópiaképletét [3]

$$S_T[p] = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^q - p_i}{1-q} = \sum_{i=1}^{N} p_i f(1/p_i) \geq 0. \tag{22}$$

*4. ábra.* Az $f''(x) > 0$ függvényre vonatkozó általánosított Jensen-egyenlőtlenség szemléltetése $N = 4$ sarokpontra.



Ebben az esetben[3]

$$f(1/p_i) = \frac{p_i^{q-1} - 1}{1-q}$$

tehát

$$f(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}.$$

Így $f'(x) = x^{-q}$ és $f''(x) = -qx^{-q-1}$. Minden $q > 0$-ra $f'' < 0$. Látható, hogy a Tsallis-entrópia is az egyenletes eloszlásra maximális

$$S_T[1/N] = \sum_{i=1}^{N} \frac{N^{-q} - N^{-1}}{1-q} = \frac{N^{1-q} - 1}{1-q} = f(N). \quad (23)$$

ezért $S_T[1/N] \geq S_T[p_i]$ garantált. Ez a képlet olyankor használatos, amikor az additív (összeadódó) entrópiához nem a valószínűségek szorzata tartozik, hanem – a nem szűnő korrelációk miatt – magas korrekciók járulnak. Megfordítva, a szorzatként előálló közös (joint) valószínűségek esetén az entrópia nem additív, hanem az

$$S_{12} = S_1 + S_2 + (q-1)\, S_1\, S_2 \quad (24)$$

szabályt követi. Véges $N$ szabadsági fokú ideális fizikai rendszerek tanulmányozása során megmutatkozott, hogy jellemző a $q = 1 + O(1/N)$ közelítő viselkedés. Az eltérés az additív ($q = 1$) esettől inkább a kis rendszerekre jellemző [4–6]. Általában mi lehet az ilyen viselkedés oka? Miért nem additív minden rendszer entrópiája, ahogy tanultuk és – részben – tanítottuk? Az egyedi, összeadandó tagok az alrendszerek méretével, térfogatával, a szabadsági fokok számának logaritmusával nőnek, a korrekció viszont a csatlakozási felülettel („interface”) és az ebből egy korrelációs hosszal szorozva képzett térfogatmérettel arányos. Az egyszerű összeghez képest ez nem elhanyagolható mindazon esetekben, amikor vagy a kölcsönhatás nem cseng le elég rövid távolság megtétele után, vagy az érintkezési felület fraktális, és ezzel sokkal lassabban válik az egyedi térfogatoknál kisebbé, mint ahogyan megszoktuk.

## Minimális kvantumvariancia

*Ehhez a fejezethez a fizikus szak felsőbb évfolyamainak tudása lehet szükséges, bár bizonyos kijelentések nem (vagy nem feltétlenül) szerepelnek az általános tananyagban.*

A kvantumfizika elméleti előzményeihez, a newtoni mechanikához és az elektrodinamikához képest jelentős szemléletváltást hozott. Míg addig a fizikai modelleket valós függvények és az azokat igazgató differenciálegyenletek nyelvén fogalmazták meg, az „új fizika” a mérhető (valós számértékű) mennyiségeket egy-egy különleges mátrix sajátértékeiként kezeli. A mátrixok, amelyek vektorokra hatva, azokat nagyítják vagy kicsinyítik, esetleg forgatják, csupa valós sajátértéket (nagyítási tényezőt) akkor nyújtanak, ha hermitikusak. Ez azt jelenti, hogy a főátlóra tükörszimmetrikus helyzetű tagjaik egymás komplex konjugáltjai. Röviden: ez az a matematikai alap, amely a kvantumfizikai számítások gerincét képezi.

Ilyen hermitikus operátorok és különböző, akár komplex együtthatós, tehát már nem hermitikus kombinációik különböző lehetséges mérési eredményeket írnak le. Itt is – a négyzet területi felbontásához hasonlóan – valaminek a pozitív vagy nulla voltából vezethetünk le egyenlőtlenségeket.

Legyenek $A = A^\dagger$, $B = B^\dagger$ hermitikus operátorok. $A^\dagger$ azt jelöli, hogy az $A$ mátrix elemeit a főátlóra tükröztük és komplex konjugáltuk. Az egyszerűség kedvéért zérus várható értéket feltételezünk $\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0$. Ekkor a variancia egyszerűen az operátor négyzetének várható értéke, $\Delta A^2 = \langle A^2 \rangle$ és $\Delta B^2 = \langle B^2 \rangle$. Konstruálunk egy összetett operátort:

$$C \equiv \lambda A + \frac{i}{\lambda^*} B. \quad (25)$$

Ez elég általános, de a két komplex együttható nem független. A definíció adjungáltja (a mátrix transzponáltja a főátlóra szimmetrikus elemek cseréjével és komplex konjugálása)

$$C^\dagger \equiv \lambda^* A - \frac{i}{\lambda} B.$$

Ezzel

$$\begin{aligned} C\,C^\dagger &= |\lambda|^2 A^2 + i\,B\,A - i\,A\,B + \frac{1}{|\lambda|^2} B^2, \\ C^\dagger\, C &= |\lambda|^2 A^2 - i\,B\,A + i\,A\,B + \frac{1}{|\lambda|^2} B^2. \end{aligned} \quad (26)$$

A lehetséges kvantumállapotok terében – a Hilbert-térben vett vektorok hossznégyzetei miatt – bármely operátorra igaz, hogy $\langle C C^\dagger \rangle \geq 0$ és $\langle C^\dagger C \rangle \geq 0$.

A „határozatlansági reláció” egy olyan egyenlőtlenség a varianciákra (szórásnégyzetekre) nézvést, ami a $\langle C C^\dagger \rangle \geq 0$ és $\langle C^\dagger C \rangle \geq 0$ következménye. A (26) egyenlet következményeként a várható értékek közötti alábbi egyenlőtlenséget – teljes analógiaként a kiindulási négyzetfelosztási probléma tárgyalásával – kapjuk:

$$\frac{1}{2}\left( |\lambda|^2 \langle A^2 \rangle + \frac{1}{|\lambda|^2} \langle B^2 \rangle \right) \geq \left| \left\langle \frac{i}{2} [A, B] \right\rangle \right|. \quad (27)$$

*Ez az egyenlőtlenség is tartalmazza a számtani középet, aminek minimuma éppen a mértani közép!* Ez a továbblépés kulcsa: a (27) bal oldala maga is egy számtani közép. Mivel $\lambda$ tetszőleges komplex együttható, az egyenlőtlenség a minimumában – amikor az $\langle A^2 \rangle$ és $\langle B^2 \rangle$ tagok mértani középarányosát képez-

[3] Tsallis ezt a függvényt $q$-logaritmusnak nevezte el.

zük – is érvényes marad. Ez éppen a varianciák szorzatára ad alsó határt:

$$\Delta A\,\Delta B = \sqrt{\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle} \geq \left|\left\langle \frac{i}{2}[A, B]\right\rangle\right|. \tag{28}$$

Ez a kvantumfizikában érvényes, általános „határozatlansági relációnak” nevezett egyenlőtlenség. E képleteket talán találóbb lenne „minimális varianciarelációknak” hívni. Megjegyezzük, ha az itt tárgyalt hermitikus operátorokhoz az egységoperátorral arányos korrekciókat adunk, akkor $A_2 = A + a\mathbb{1}$ és $B_2 = B + b\mathbb{1}$-re igaz, hogy $[A_2, B_2] = [A, B]$, valamint az, hogy $\Delta A_2^2 = \langle A_2^2\rangle - \langle A_2\rangle^2 = \langle A^2\rangle$, és hasonlóan $B_2$-re. Ezzel egy általános eredményt kaptunk:

$$\Delta A\,\Delta B \geq \left|\left\langle \frac{i}{2}[A, B]\right\rangle\right|. \tag{29}$$

Sok speciálisan érdekes hermitikus $A$ és $B$ operátorra alkalmazható ez az eredmény. A legismertebb, és időrendben az első alkalmazás a hely- és impulzuskoordináta közötti eredmény

$$\Delta x\,\Delta p \geq \left|\left\langle \frac{i}{2}\frac{\hbar}{i}\right\rangle\right| = \frac{\hbar}{2}. \tag{30}$$

Ezt hívjuk a Heisenberg-féle határozatlansági összefüggésnek. Ekkor az egyenlőtlenség jobb oldala egy természeti állandó.

Azonban más esetekre is létezik hasonló egyenlőtlenség. Különösen érdekesek azok, amelyek az energiát és az azt leíró Hamilton-operátort foglalják magukba. Például az energia és az impulzus varianciáinak a szorzatára is van alsó határ:

$$\Delta E\,\Delta p \geq \left|\left\langle \frac{i}{2}[H, p]\right\rangle\right| = \frac{\hbar}{2}\,|\langle F\rangle|. \tag{31}$$

Az alsó határt az $F$ erő várható értékének abszolút értéke adja. Amikor ez nulla, például a kvantumoszcillátor, vagy az atomokhoz kötött elektronállapotok esetén, akkor a jobb oldal nulla és lehetséges, hogy az energia varianciája nulla, $\Delta E = 0$. Ilyenkor lehet a kvantumrendszer „éles” energiaállapotban. Máskor azonban – például egy egyirányú gyorsulást okozó állandó erő, mint a nehézségi gyorsulás esetén – itt is megjelenik egy alsó határ, az energia értéke nem lehet éles. Igaz is, ekkor a külső erő, ami gyorsít, munkát is végez a rendszeren. Mondhatjuk „energetikailag kommunikál” a megfigyelt kvantumrendszerrel.

Hasonló igaz a hely és az energia együttes megfigyelése esetén fellépő varianciák szorzatára:

$$\Delta E\,\Delta x \geq \left|\left\langle \frac{i}{2}[H, x]\right\rangle\right| = \frac{\hbar}{2}\,|\langle v\rangle|. \tag{32}$$

Itt az alsó határt a $v$ sebesség várható értéke állítja be. (Egy figyelmeztetés: ez még komplikációkhoz vezethet, hiszen a sebesség mérése függ az inerciálisan mozgó megfigyelő saját sebességétől is. A helyes Lorentz-transzformáció ezt és az energia és impulzus egymással keveredését úgy írja le, hogy a fentiek igazak maradnak. Hasonló történik az általános relitivitás elmélete szemszögéből az erővel, mivel ott a gyorsulás helyettesíthető egy gravitációs térrel.)

Egy pillanatra lépjünk túl a fizikusok számára mindenhol tanított kvantumos elmosódási történeten, és további eseteket is vizsgáljunk meg. Léteznek varianciakorlátok Heisenbergen túl is: a kvantumóra-operátor alábbi konstrukciója figyelmeztet erre. Zárt rendszerben egy $A(x,p)$ általános operátor időfejlődését a

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}[H, A]$$

összefüggés írja le. Az általunk tárgyalt egyenlőtlenség így alakul:

$$\Delta E\,\Delta A \geq \left|\left\langle \frac{i}{2}[H, A]\right\rangle\right| = \frac{\hbar}{2}\left|\left\langle \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right\rangle\right|. \tag{33}$$

Átrendezve

$$\Delta E \frac{\Delta A}{\left|\left\langle \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right\rangle\right|} \equiv \Delta E\,\Delta t_A \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{34}$$

vagyis minden ilyen $A$ operátor által definiált $\Delta t_A$ időtartam-varianciának közös alsó korlátja van!

Egy másik a heisenbergin túllépő varianciakorlát adódik gravitációs vöröseltolódás vizsgálatából. Egy radiálisan mozgó foton energiája Schwarzschild-metrikában – amelynek gyenge gravitációs teret feltételező közelítése egy newtoni gravitációspotenciál-tagot mutat – az alábbi:

$$E = \hbar\omega\sqrt{1 - \frac{2\,GM}{c^2\,r}} \approx \hbar\omega - \frac{GM}{r}\frac{\hbar\omega}{c^2}. \tag{35}$$

Az energia várható értéke dominánsan $\langle E\rangle \approx \hbar\omega$, míg a zérus nyugalmi fotontömeghez tartozó $E(p) = c\,|p|$ diszperzió miatt $\Delta E = c\Delta p$. Az erő várható értéke

$$\langle F\rangle = \frac{GM}{r^2}\frac{\hbar\omega}{c^2} = \frac{\hbar\omega}{c^2}\,g,$$

ami úgy néz ki, mintha a foton gravitációs potenciálra reagáló tömege $m = \hbar\omega/c^2$ lenne. Ez nem mond ellent a zérus nyugalmi tömegnek, és különben is csak közelítés. Továbblépve, alkalmazzuk az „energia-impulzus varianciák szorzata $\geq \hbar/2$-szer az erő várható értéke” (31) eredményt:

$$\Delta E\,\frac{\Delta E}{c} \geq \frac{\hbar}{2}\frac{\langle E\rangle}{c^2}\,g. \tag{36}$$

Ebből a foton kvantumos elmosódására az alábbi mértéket számíthatjuk ki:

$$\frac{\Delta E^2}{\langle E\rangle} \geq \frac{\hbar g}{2\,c} = \pi\,k\,T_{\mathrm{Unruh}}. \tag{37}$$

Miért éppen ez a mennyiség érdekes? Mert ez olyan, mint egy hőmérséklet (illetve az annak megfelelő $kT$

energia)! Zérus tömegű fotonok Boltzmann-eloszlására $\Delta E^2/\langle E\rangle = kT$ egzaktul adódik. A pontosabb Bose-eloszlásra az eredmény nem sokkal nagyobb, körülbelül 1,13 $kT$. A $T_{\mathrm{Unruh}}$ Unruh-hőmérséklet, a fenti (37) képletben egy másik, jóval bonyolultabb számolás eredménye [1]. Itt meglepő, hogy a határozatlanság alsó határát jellemző hőmérséklet-szerű paraméter ennél nagyobb, ennek a π-szerese. Lehet, hogy ez rossz hír az ilyen hőmérséklet mérését tervező kísérletek számára…

## Összefoglalás

A modern fizika két fontos fogalmával, az entrópiával (információval) és a kvantumos elmosódással kapcsolatos egyenlőtlenségeket a számtani és mértani közép közötti, régóta ismert egyenlőtlenség általánosításaként tárgyaltuk. E célt az alábbi lépésekben értük el:

1. Ismertettük a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség geometriai levezetését, amely a négyzet területének felosztásából származik.

2. Ez az összefüggés súlyozott átlagokra és azon túl határozott konvexitású függvények statisztikus várható értékére általánosítható.

3. Az entrópia és irreverzibilitás titka a fogalom határozott konvexitása, ez az a követelmény, amit még a boltzmanni képleten túllépő, nem logaritmikus képleteknek is be kell tartaniuk.

4. A kvantumos „határozatlansági" relációnak – amely nemcsak a kanonikus hely- és impulzusmérésekre igaz, hanem általánosabban – is ez az egyenlőtlenség az alapja. Különleges példa a fotonok esete állandó gyorsulás mellett, ami az energia határozatlanságát egy hőmérséklet-jellegű matematikai fogalommal hozza kapcsolatba.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszöni a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem UBB Star programja támogatását ezen munka elkészülte (s az azt megelőző előadás) során. Az NIH (OTKA) K123815 sz. projektje szintén támogatta ezt a munkát.

### Irodalom

1. W. G. Unruh: Notes on Black Hole Evaporation. *Physical Review D 14* (1976) 870–892.
2. J. L. W. V. Jensen: Sur les fonctions et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Math. 30* (1906) 175–193.
3. C. Tsallis: *Introduction into Nonextensive Statistical Mechanics* (*Approaching a Complex World*). Springer 2009.
4. T. S. Biró, Z. Schram, L. Jenkovszky: Entropy production during the hadronization of a quark-gluon plasma. *European Physical Journal A 54* (2018) 17.
5. T. S. Biró, Z. Néda: Unidirectional random growth with resetting. *Physica A 499* (2018) 335–361.
6. Biró Tamás: Túl az exponenciális faktoron. *Fizikai Szemle 67/12* (2017) 407–411.

# ÚJ LEHETŐSÉGEK A LÁTÓÉLESSÉG-VIZSGÁLATI TESZTEK PONTOSSÁGÁNAK NÖVELÉSÉRE

Timár-Fülep Csilla, Erdei Gábor
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Atomfizika Tanszék
Kovács Illés, Kránitz Kinga
Semmelweis Egyetem, Szemészeti Klinika

*A humán látóélesség vizsgálatára általánosan használt tesztek számos formában léteznek, ami alaposan megnehezíti a mérések összehasonlíthatóságát, a véletlen hiba pedig jelentős, és erősen függ a felvett adatok kiértékelésére választott módszertől. Mindennek tudatos figyelembevétele és a hibák redukálása elengedhetetlen, hiszen a modern klinikai vizsgálatok pontosságigénye messze túlmutat a háziorvosi rendelőkben, szemüvegszalonokban elvégezhető gyorstesztekénél. Cikkünkben sorra vesszük a látásvizsgálati módszerek szisztematikus és véletlen hibáit befolyásoló tényezőket, ismertetjük a jelenlegi módszerekkel elérhető legnagyobb pontosságot, rámutatunk a szabályozás hiányosságára a környezeti fényviszonyok tekintetében, felhívjuk a figyelmet a pupillaméret látóélességet befolyásoló szerepére, valamint bemutatunk egy saját fejlesztésű, korrelációalapú eljárást, amellyel a mérések véletlen hibája számottevően tovább csökkenthető.*

A szerzők köszönetüket fejezik ki a Nemzeti Fejlesztési Minisztériumnak (NFM) a Versenyképességi és Kiválósági Szerződések keretében nyújtott VKSZ-12-1-2013-80 sorszámú *A szürkehályog hatékony gyógyítását elősegítő orvostechnikai kutatás-fejlesztések* című projekt anyagi támogatásáért.

A kutatás az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-18-3 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült.

## Bevezetés

A pontos és jól reprodukálható látástesztek a kezelés szükségességének elbírálása, illetve várható hatékonyságának előrejelzése szempontjából különösen nagy jelentőséggel bírnak a retina különböző betegségei (időskori makuladegeneráció, diabéteszes makulaödéma stb.), valamint szürkehályog esetén. A látóélesség-vizsgálatok eredményének legfontosabb mérőszáma a páciens vízusértéke. A szemészek a klini-