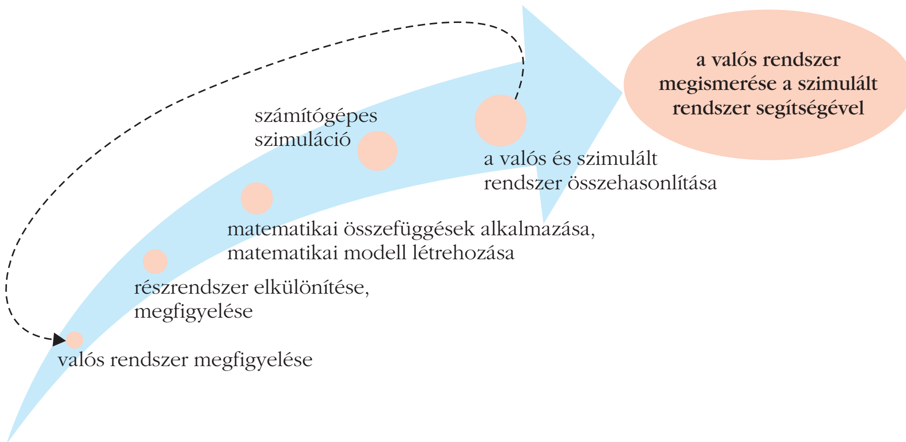
MOZGÁSSZIMULÁCIÓK A LÉGKÖRBEN – 1. RÉSZ

Hogyan írjunk érdekes szimulációkat középiskolában?

Stonawski Tamás
Nyíregyházi Egyetem

„A Világegyetem önmaga lehető leggyorsabb szimulációja, és nem ismeri a saját jövőjét."
John Gribbin



1. ábra. A szimuláció készítésének főbb lépései [3].

A szimuláció szó sok átalakuláson ment át az utóbbi évtizedekben. Kezdetben a valóságot utánzó, tettető magatartást jelentette, majd később – a számítógépes háttér létrejöttének köszönhetően – megjelent a mai tudományos értelmezése is, amely szerint a szimuláció a valóságos rendszereket utánzó absztrakt módszerekkel felépített matematikai modell. Mikor és miért van szükségünk szimulációkra? A valós rendszereket megismerhetjük megfelelő kísérletek elvégzésével, de olyan esetekben, amikor a kísérlet extrém sebességű, túl drága, veszélyes, bonyolult, eszközei nem szerezhetők be, a kezdőfeltételek nem állíthatók be kellő pontosságúra… stb., akkor mindenképpen szükség van a szimulációkra. Akár kísérletek megalapozója is lehet, hiszen a szimulációval könnyedén meghatározhatók a legelőnyösebb kezdeti feltételek, de akár a kísérlet lehetséges kimenetelei is (ezekben az esetekben a szimulációk a kísérlet szerves részének tekinthetők), amelyek hiányában a kísérletek esetlegesen kivitelezhetetlenek maradnának (lásd például Higgs-bozon detektálása előtti elméleti szimulációk eredményeinek felhasználása, az LHC mérőberendezéseinek beállítása). A kísérletek kiegészítő szerepköréből kitörve a szimuláció a valóság megismerésének egyik módszere is lehet. A szimuláció egyik nagy előnye, hogy a megfigyelni kívánt rendszerbe – ellentétben a kísérletekkel – nem avatkozik be (hiszen nincs fizikai kapcsolat közöttük), a kezdőfeltételeken, de akár az elméleten is változtatva, tetszőlegesen sokszor lefuttathatjuk, és a szimuláció végén a kívánt eredményekhez juthatunk [1]. Egyszerű szimulációkat számos webhelyen találhatunk, amelyek használata nem igényel különösebb informatikai tudást. Ezen szimulációk felhasználói szintű alkalmazása igen kedvelt a diákok körében [2]. Akár már általános iskolában is jól alkalmazható például egy áramkörépítő szimulátor, amelyen a megépítést követően méréseket is lehet végezni. A felhasználói szint viszont nem alkalmas speciális problémák vizsgálatára (azaz különböző projektek, otthoni vagy szakköri, testre szabott megfigyelések, kísérletek elvégzésére és tervezésére), ráadásul kirekeszti a tanulókat a szimulációk lényegi megértéséből. Ahhoz, hogy tanulóink betekinthessenek a szimulációk részleteibe, különleges világába, előnyösnek tartom, ha a tanár egy-egy adott problémához kapcsolódó szimulációt közösen ír meg diákjaival. Ehhez első lépésként egy segédprogramot kell keresni, és – ráadásul – a program speciális nyelvezetét is el kell sajátítani. Cserébe viszont sorozatosan fejleszthető szimulációkat kapunk, amelyeket akár egyesíthetünk is, így egyre összetettebb szimulációkkal dolgozhatunk, ha a téma éppen úgy kívánja meg (lásd később). E cikkben az egyszerű szimulációk írásá-

Köszönettel tartozom az Ecsedi Báthori István Gimnázium tanulóinak és a Nyíregyházi Egyetem fizikatanár szakos hallgatóinak.

Stonawski Tamás a Nyíregyházi Egyetemen főiskolai adjunktus. Doktori címét 2016-ban az ELTE Fizika Tanítása doktori program keretében szerezte. Kutatási területe a digitális média alkalmazása a tanulói kreativitás, problémamegoldás és önálló kísérletezés fejlesztésére általános és középiskolában.

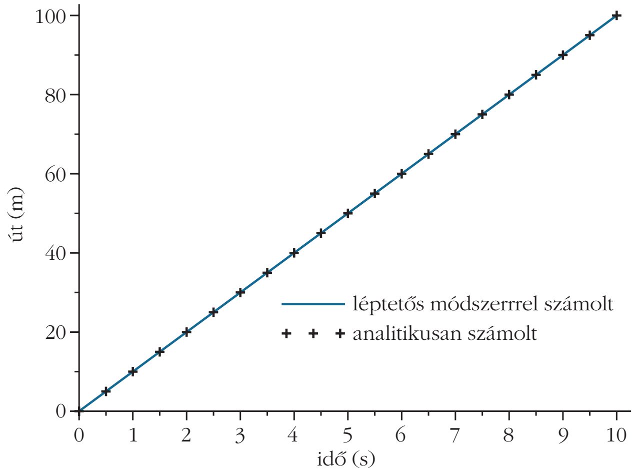
nak technikáját ismerhetjük meg, és betekintést nyerhetünk a szimulációk továbbfejlesztésének fogásaiba is.

A szimulációkészítés első fázisában – a fizikában tanult összefüggések ismeretében – egy olyan matematikai algoritmus alapján működő modellt kell készítenünk, amely bizonyos kezdőfeltételek megadása mellett kimeneti értékeket, eredményeket, végeredményeket produkál. Az eredmények valóságszerűségét célszerű kísérletileg is igazolni (igazolhatjuk, hogy a szimuláció bizonyos pontossággal közelíti a kísérleti eredményeket, így a valós rendszert is). A kísérleti ellenőrzés sikeressége erős motiváló hatást fejt ki a tanulókra, a továbbiakban is szívesen foglalkoznak vele. A kísérleti ellenőrzés végeztével érdemes kiterjeszteni modellünket, mert így a rendszer olyan tulajdonságait is megismerhetjük (például extrém kezdőfeltételek megadásával), amelyeket nem áll módunkban kísérletileg megfigyelni (*1. ábra*). A kiterjesztés során nyert információk figyelemfelkeltők és vitaindító erejűek voltak a tanulók körében.

Szimulációs programnyelvek

A szimulációk írására számos program létezik, de mátrixalapúsága és ingyenes letölthetősége [4] miatt a Scilab programcsomagot választottam. Szép a grafikája és könnyű adatkezelése előnyére válik a munkánk során. A Scilab egyik jellegzetessége, hogy minden változót mátrixnak tekint, még a legegyszerűbb konstanst is: 1 sorból és 1 oszlopból álló mátrixnak. A változók tekintetében a szimulációkban csak egyetlen sorból álló mátrixokat fogunk képezni, az úgynevezett sormátrixokat (másképpen: sorvektorokat). Az elkészített algoritmusok (lásd később) során a t idő folyamatosan, egységnyi kicsiny $\mathrm{d}t$ időkülönbséggel növekszik ($t := t + \mathrm{d}t$), ezt léptetésnek nevezzük. Minden léptetésnél – a fizikai összefüggések alapján – kiszámoljuk a kívánt fizikai mennyiség részeredményét, és ezen adatokkal feltöltjük az általa definiált sorvektort (például érdemes „F” betűt használni az erő sorvektorához). Így egy nagyon praktikus sorvektort kapunk: egyetlen változóba kerül bele a fizikai mennyiség – például időbeli lefolyásából származó – összes értéke. Ezzel a fizikai mennyiségek ábrázolása meglehetősen leegyszerűsödik (nem kellenek újabb ciklusok, léptetések), hiszen csak a mennyiségek által definiált ábrázolandó sorvektorokat kell beírni a „plot” parancs argumentumába. Mivel azonban a „plot” parancs függvényképzést hajt végre, vigyázni kell arra, hogy a két vektor azonos számú adatból álljon (dimenziója azonos legyen).

Érdemes a szimulációk írását a kinematikánál kezdeni, mert az egyszerű tananyagban szereplő analitikai képletekkel kapott eredményeket össze tudjuk hasonlítani a léptetős módszerrel nyert eredményekkel (*2. ábra*). A két eljárás egyezése biztosítja a léptetős módszer létjogosultságát a tanulók gondolkodásában, és bizonyos problémák esetén (ahol már nem



2. ábra. 10 m/s-mal egyenes vonalú egyenletes mozgást végző test út-idő grafikonja. A léptetős és az analitikai módszerrel számolt út-idő egyenesek egymásra illeszkednek.

működnek az analitikai számítások) nem fog gondot jelenteni az analitikai eljárások elhagyása sem.

```
// Egyenes vonalú egyenletes mozgás
// Az analitikai és léptetős módszer összehasonlítása
clc // konzol törlése
i=1; // léptetés kezdete
t=0; // idő nullázása
dt=0.5 // lépésköz
t(1)=0 // időmérés kezdete
v=10; // sebesség megadása
s=0; // út lenullázása

while t(i)<10 //csináld 10 másodpercig

i=i+1 // léptetés művelete
t(i)=t(i-1)+dt // idő léptetése

s(i)=s(i-1)+v*dt // a következő útszakasz kiszámítása
end

xdel // grafikus képernyő törlése
xset("font",4,4) // tengelyértékek mérete
plot2d(t,[s],[2]); // léptetős módszerrel számolt sebesség
plot2d(t,[v*t],[-1]); // analitikus módszerrel számolt sebesség
xlabel("Idő(s)", "fontsize",4); // x tengelyfelirat és mérete
ylabel("Út (m)", "fontsize",4); // y tengelyfelirat és mérete
legend(["léptetős módszerrel számolt" "analitikusan számolt"],
   with_box=%f,opt=5);
```

A szimulációk írását a dinamikával folytassuk, majd ezt követően az erőtörvényeket egészítsük ki a súrlódással, közegellenállással is [11]! Ha a léptető módszert már sikeresen elsajátították a tanulók, célszerű egy olyan problémával folytatni a munkát, amelyet analitikusan nem, vagy csak nagy nehézségek árán tudnának megoldani.

Amikor a képletek „nem működnek”

Foglalkozzunk a szabadeséssel úgy, hogy figyelembe vesszük a közegellenállási és a felhajtóerőt is! Írjuk fel a mozgástörvényt:

$$m\,a(t) \;=\; m\,g - \frac{1}{2}\,c\,A\,\rho(h)\,v^2(t) - \rho(h)\,V g. \quad (1)$$

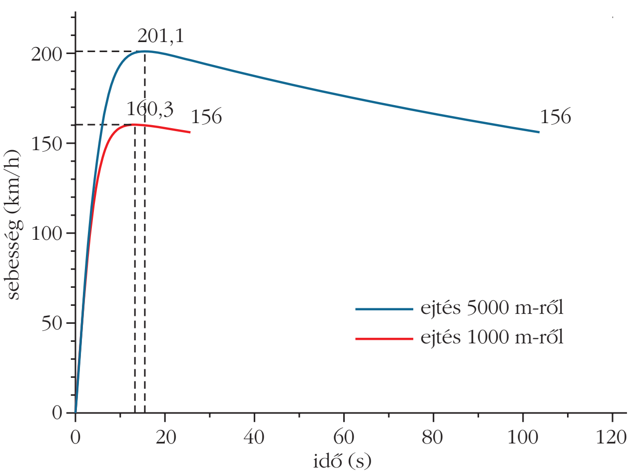
A mozgástörvényt megvizsgálva vegyük észre, hogy a gyorsulás és a sebesség a mozgás során változik, azaz időfüggő, a levegő sűrűsége pedig a magasság függvénye!

Mivel a $v(t)$ függvényt nem ismerjük analitikusan, középiskolai matematikával $a(t)$-t sem tudjuk meghatározni. E probléma felvetése máris a léptetős módszer alkalmazásának kedvez.

A kezdőfeltételekből kiindulva, kis idő megadásával számoltassuk ki a ρ, s, v, a aktuális értékeit, ezek lesznek a következő lépés kezdőértékei, és ugyanazon (megfelelően kicsinek választott) idő múlva újabb számításokat végzünk, amíg a megtett út egyenlő nem lesz a kezdeti magassággal, azaz a test el nem éri a földfelszínt.

A léptetés sorszámát egy „i” változóban tároljuk, ami 1-től egyesével számol felfelé. Az „i” változó minden újabb értékénél léptetjük az időt, majd feltöltjük a sorvektorokat (az aktuális időpontban kiszámítjuk a megtett „s(i)” utat, a „v(i)” sebességet és a levegő „ro(i)” sűrűségét). A gyorsulás meghatározásához a mozgás során megjelenő erőket is fel kell írni („Fk”, „Ff”, az „m*g”-t konstansnak vesszük), majd az erőkből összegzett eredőt elosztjuk a tömeggel. A *while*-ciklus (azaz a léptetések ciklusa) addig tart, amíg egy általunk megadott feltétel teljesül, jelen esetben „h-s(i)” > 0, azaz amíg a megtett út kisebb az előre megadott magasságnál. Ha a fentiek szerint a szabadesésnél a közeg hatását is figyelembe vesszük, a zuhanó test sebessége már nem egyenletesen növekszik, mint ahogy azt a közeg nélküli mozgásnál tapasztaljuk, hanem először növekszik, majd – a növekvő levegősűrűség miatt – csökken (tehát maximuma van), és megfelelően nagy magasságból ejtett testek esetén a mozgás végső szakaszában – a földet éréskor – ugyanakkora, az indítás magasságától független sebességgel mozog. (A levegő sűrűsége, azaz a közegellenállás mértéke a magasság növekedésével exponenciálisan csökken. Így kis magasságok – pár száz méter – esetén közel állandónak tekinthető. Ezért jó közelítéssel azt mondhatjuk, hogy az esés végső, földközeli szakaszában a sebesség állandósul, erőegyensúly áll be.)

3. ábra. A szimulációt lefuttattuk 1000 és 5000 m kezdőmagasságnál. A végsebesség mindkét esetben 156 km/h-nak adódott, a maximális sebességek viszont különbözők voltak (kezdeti értékek: dt = 0,1 s, m = 70 kg, c = 0,6, A =1 m^2, V = 0,1 m^3).

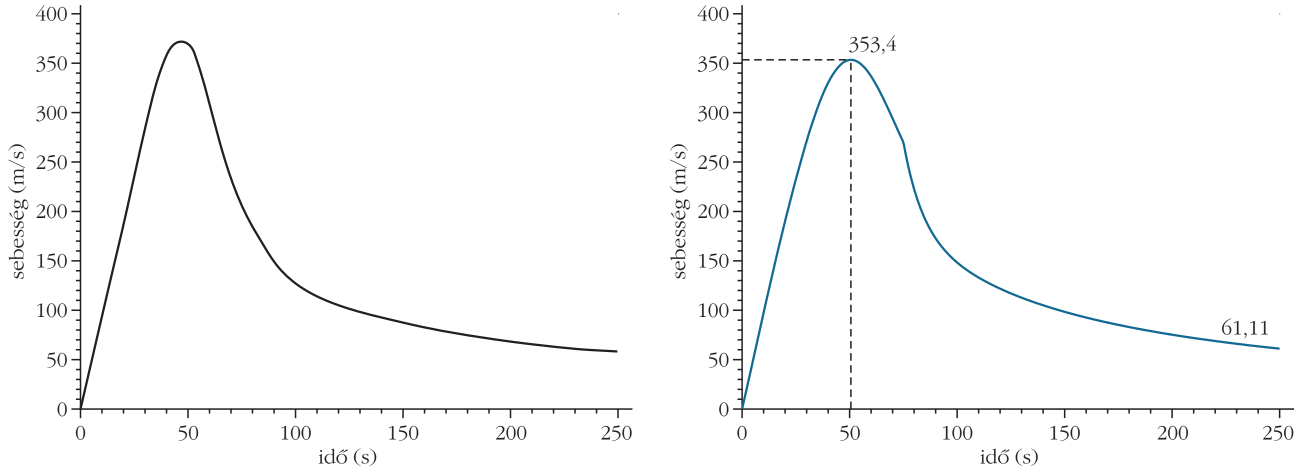


A szimulációban a maximális sebesség detektálása úgy történik, hogy amíg a következő lépés sebessége nagyobb, addig folyamatosan újra betöltjük (azaz újraírjuk) az aktuális „i” lépésszámot a „tmax” egydimenziós vektorba, ez egy „if-then” feltétellel („v(i)>v(i-1)”) valósítható meg. Annál a lépésszámnál, ahol nem növekszik tovább a sebesség, az előbbi feltétel már nem teljesül, így a legutolsó, még sebességnövekedő lépés sorszáma megmarad a „tmax”-ban. A maximális sebesség előhívása így a „v(tmax)” segítségével történik (azaz a sebességvektor „tmax” sorszámú koordinátáját hívjuk elő). Érdemes egy meghatározott „i” lépésszámra történő megállást is beiktatni a szimulációkba. Ez akkor tesz jó szolgálatot, ha néhány lépés után szeretnénk tájékozódni a még nem túl hosszú vektorok értékei felől (a konzolon a *disp* utasítással könnyen kiírathatjuk a változók értékeit), de elkerülhetjük a hurkokat (például, ha rossz leálló feltételt adtunk meg), és az esetleges hibákat is könnyebben tetten érhetjük.

```
// vektorfeltöltő ciklus kezdete

while h-s(i)>0; // amíg földet nem ér, tegye a következőket
   i=i+1; // továbbléptetés
   t(i)=t(i-1)+dt; // a következő időpont meghatározása
   v(i)=v(i-1)+ae(i-1)*dt; a következő időpontbeli sebesség
      meghatározása
   s(i)=s(i-1)+v(i-1)*dt; // a megtett út kiszámítása
   ph(i)=h-s(i); // a pillanatnyi magasság meghatározása
   ro(i)=rok0*exp(-rok0*g*ph(i)*p0.^-1); //a pillanatnyi sűrűség
      meghatározása

   Fk(i)=c*hf*0.5*ro(i)*(v(i).^2); //a pillanatnyi közegellenállási
      erő meghatározása
   Ff(i)=ro(i)*V*g; //a pillanatnyi felhajtóerő meghatározása
   Fe(i)=m*g-Fk(i)-Ff(i); //a pillanatnyi eredő erő meghatározása
   ae(i)=Fe(i)/m; // a pillanatnyi eredő gyorsulás meghatározása

   // maximális sebesség detektálása
   if v(i)>v(i-1) then
      tmax=i;
   end

   // hurokba kerülés elleni védelem, illetve meghatározott ”i”
      értékre való megállítás
   if i>10000 then
      break;
   end
end
```

Izgalmas órán kívüli feladat lehet az érdekes hírek tudományos elemzése is. Több tucat zuhanást túlélő emberről beszámoló cikket tanulmányozva bukkantunk a következő közleményrészletre: „Michael Holmes 2006-ban 12 000 láb ≈ 4000 m magasból ugrott ki, de nem nyílt ki az ejtőernyője. A zuhanás végén közel 100 mph ≈ 160 km/h-val sűrű bokorba csapódott, megrepedt a tüdeje és bokatörést szenvedett, de túlélte a balesetet” [5].

A fenti szimulációt lefuttattuk 1000 és 5000 méterről lezuhanó testre (70 kg-os hason zuhanó emberre), és becsapódási sebességre (nagy meglepetésre) szinte ugyanazt a sebességértéket kaptuk (156 km/h), mint



4. ábra. Bal oldalon az érettségi feladatban szereplő ábra, a jobbra a szimuláció alapján készült grafikon látható. A jobb oldali grafikonban a 75. másodpercben egy törés vehető észre, ugyanis itt szűnt meg a forgó mozgás (a szimulációban hirtelen, átmenet nélkül). A kezdeti értékek: dt = 0,1 s, h = 39 km, c = 0,4, majd t = 75 s után 0,6, m = 110 kg, , A = 1 m^2, V = 0,1 m^3.

ami a cikkben szerepelt. Más ejtési magasságokból történő futtatás során megtaláltuk azt a kritikus értéket (körülbelül 400 m), ami fölött zuhanva mindig ugyanakkora lesz a becsapódási sebesség (tehát nagyobb esélyünk van a túlélésre, ha magasabbról zuhanunk le, mert több időnk van kiszemelni puha, rugalmas becsapódási tereptárgyakat). A sebesség-idő grafikonokban csak a maximális sebességeknél adódtak különbségek: a nagyobb magasságokhoz nagyobb sebességmaximumok adódtak (*3. ábra*). Ha viszont nem hason, hanem állva – kisebb közegellenállással – zuhanunk, a maximális becsapódási sebesség nagyobbnak (273,5 km/h-nak) adódott.

Ugrás 39 km magasságból

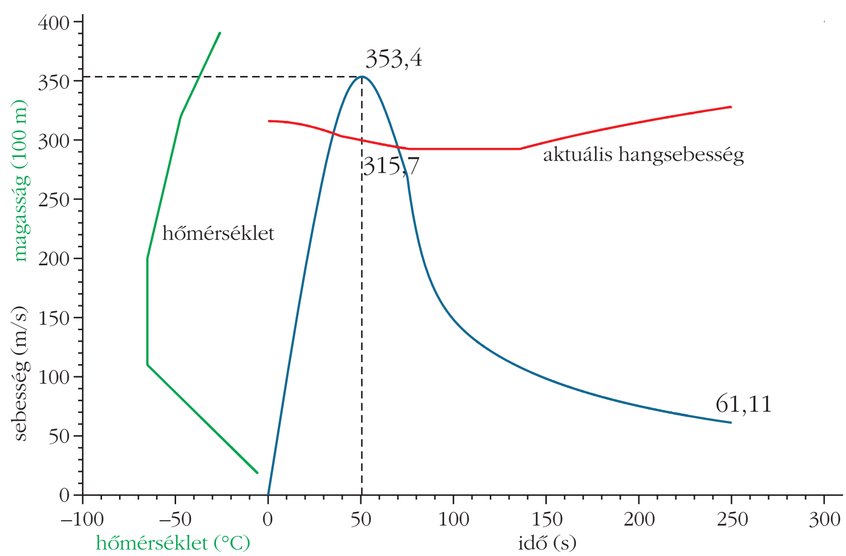
A középszintű érettségi feladatok között (2013. október 3/B) is találtunk zuhanással kapcsolatosat (ami – később látni fogjuk – abban tér el az előző feladattól, hogy az ember esés közben forgott, így alaktényezője is változott az idővel).

A feladat szövege [6]: „2012-ben Felix Baumgartner egy különleges ugrással egyszerre több rekordot is megdöntött. A Föld felszíne fölött 39 km magasságból ugrott le (a légnyomás ebben a magasságban körülbelül 430 Pa, a hőmérséklet pedig −57 °C), 4 perc 22 másodpercig zuhant az ejtőernyő kinyitása nélkül. A zuhanás közben elért maximális sebessége 1342,8 km/h, a hangsebesség 1,24-szerese volt.”

A feladat egy sebesség-idő grafikont is mellékelt (forrása ismeretlen), így lehetőségünk nyílt a szimulációval való összevetéssel. A feladatban szereplő kezdeti értékeket beírtuk a programba, és a kiszámolt vektorokat ábrázolva kaptuk meg a sebesség-idő grafikont (h = 39 km, m = 110 kg, felszereléssel együtt). Egy kis utánaolvasással kiderítettük, hogy Baumgartner hason kezdett zuhanni, de később forgásba jött, majd mozgását csak a 75. másodpercben tudta stabilizálni. Ezt követően hason esett tovább [7]. A fejjel lefelé zuhanás (hasonlóan a lábon zuhanáshoz) alaktényezője 0,2, a hason zuhanásé (a háton zuhanásé szintén) pedig 0,6. Egyenletes forgást feltételezve a két érték átlagát, azaz 0,4-es, majd a t = 75 s után 0,6-es alaktényezőt írtunk a szimulációba (*4. ábra*).

A feladat szövegében azt is olvashatjuk, hogy ugrása során Felix Baumgartner a hangsebességet is átlépte (a maximális sebessége a hangsebesség 1,24-szerese volt). Ennek ellenőrzését is kihívásnak tekintettük, és úgy döntöttünk, hogy szimulációnkat kiterjesztjük a hangsebesség vizsgálatára is. A normál levegőben megismert konstans hangsebesség

5. ábra. A grafikon bal oldali részén a hőmérséklet magasságfüggése, a jobb oldali részen Baumgartner és a hang sebességének időbeli változása látható. A grafikonról leolvasható Baumgartner maximális sebessége és az aktuális időpontban a hangsebesség. A kezdeti értékeken nem változtattunk.



helyett ennél a problémánál a hangsebesség hőmérsékletfüggésével is számolnunk kellett (2), ezért szükségünk volt a pillanatnyi magasságok a hőmérsékletértékeire:

$$v_{\text{hang}}\ (\text{m/s}) = 331{,}5 + 0{,}6\ t\ (°\text{C}) \qquad (2)$$

A légkör hőmérsékletének tanulmányozása különösen érdekes volt a tanulók számára. Természetesen az irodalomban talált adatok és összefüggések alkalmazása előtt megjegyeztem, hogy ezek a hőmérsékletadatok a légköri mozgások miatt többé-kevésbé változnak, de a légköri szondák adatai alapján jó közelítő értéket mutatnak [8]. Érdekes felfedezés volt a tanulók részéről, hogy a hőmérséklet a magasság függvényében csak a troposzféra határáig csökken, onnan először stagnál, majd (első közelítésben nem várt módon) növekszik a sztratoszférában. A hőmérsékletgörbék tanulmányozása alapján újra elolvasva a feladat szövegét, megállapítottuk, hogy az érettségi feladat szövege helytelenül állítja, hogy 39 km magasan −57 °C a külső hőmérséklet (szerencsére ez az adat a feladatmegoldásban nem kerül felhasználásra), ez csak 10-20 km magasságban tapasztalható. 39 km magasságban a görbék alapján −30 °C várható, de az irodalom szerint az ugrás pillanatában −26 °C-t mértek [9].

A szimulációba beépítettük a hőmérséklet magasságfüggését, és a (2) egyenlet alapján az idő függvényében kiszámoltuk és ábrázoltuk a hangsebességet (*5. ábra*).

A szimuláció alapján elmondható, hogy Baumgartner a 35. másodpercben átlépte a hangsebességet és annál további 35 másodpercen keresztül nagyobb sebességgel zuhant, maximális sebessége 352,4 m/s = 1268,64 km/h volt, ami az aktuális hangsebesség 1,12-szorosát éri el.

Az érettségi feladatban fel kell sorolni az ugróra ható erőket, a megoldókulcsban viszont a felsorolt erők között nem szerepel a levegő felhajtóereje, ami ebben az esetben – a kis térfogat miatt – természetesen elhanyagolható.

2017. októberi írásbeli érettségi 3/A feladata

További adatgyűjtés során egy olyan zuhanással kapcsolatos feladatot találtunk, amelyben a felhajtóerő szerepe – az előző feladathoz képest – már nem elhanyagolható.

A feladat szövege [10]: „Egy egyszerű kísérletben egy papírkúp mozgását vizsgáltuk. A papírkúpot egy asztalra helyezett állványról ejtettük le, majd egy videó segítségével képkockáról képkockára vizsgáltuk a helyzetét, és ebből számoltuk a sebességét. A papírkúp mozgásának sebesség-idő grafikonja a mellékelt [6.] ábrán látható."

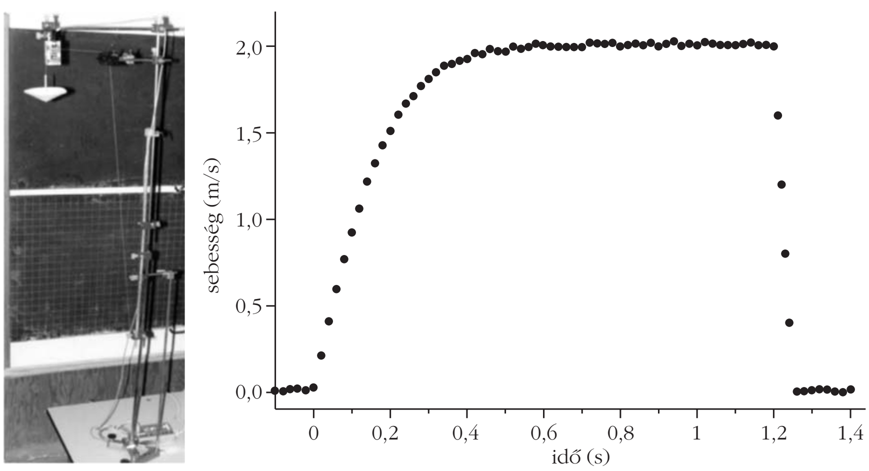
A feladatban a levegő hatását azért nem hagyhatjuk figyelmen kívül, mert a papírkúp kis súlya mellett jelentős nagyságú a rá ható közegellenállási erő. A Baumgartner ugrásánál használt szimulációba már eleve beépítettük a felhajtóerő figyelembevételét, de annál a mozgásnál nem befolyásolta a végkimeneteli értékeket. A papírkúp esésének tanulmányozására nem kellett új szimulációt írni, hiszen az előző szimuláció már fel volt készítve a felhajtóerővel való számolásra is. Az érettségi feladat grafikonjának az elemzése azonban egy kis kiegészítésre ösztönzött a szimulációval kapcsolatosan: Michael Holmes és Baumgartner becsapódását pillanatszerűnek vettük, de a tapasztalat szerint (és a *3. ábra* grafikonja szerint is) a sebesség gyorsan ugyan, de nem pillanatszerűen változik. A sebesség ezen gyors változásával, az úgynevezett becsapódási mechanizmussal egészítettük ki programunkat, de többi része teljesen alkalmas volt az új feladat tanulmányozására. A kezdeti értékek megadásánál elsősorban a papírkúp adataira lett volna szükségünk, de sajnos a feladatban szereplő fotó csak becslésekre adott lehetőséget. A kúp alapkörét 5 cm-nek, tömegét 1 grammnak vettük, így nagyon hasonló grafikont kaptunk a szimuláció lefuttatása után.

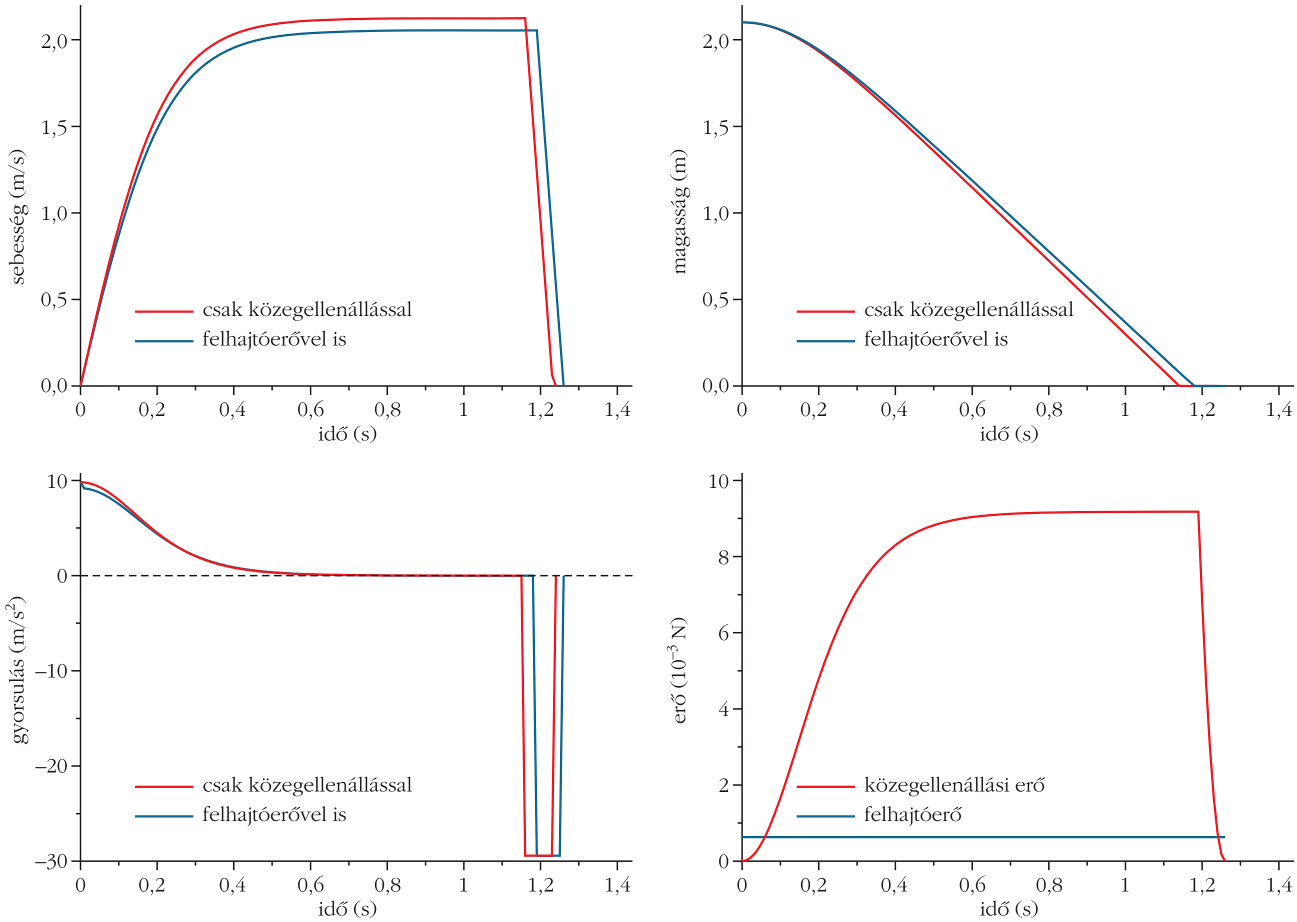
A további tanulmányozás céljából felmerült a kérdés, hogy a felhajtóerő – hasonlóan Baumgartner ugrásához – itt is elhanyagolható-e? Ennek vizsgálatára a szimulációt a felhajtóerővel és annak elhanyagolásával is lefuttattuk, és az összetartozó fizikai mennyiségeket közös koordináta-rendszerben ábrázoltuk (*7. ábra*).

Nagy meglepetésre ennél a mozgásnál már észrevehető különbség adódott a sebesség-idő grafikonoknál.

A továbbiakban elkészítettük a gyorsulás-idő és magasság-idő grafikonokat is (ahol szintén módosultak a grafikonok képei a felhajtóerő figyelembevételekor). A közegellenállási és felhajtóerők időbeli változásának nyomon követése adta meg a magyarázatot a grafikonok különbözőségére. A felhajtóerő a kis magasságkülönbség miatt a mozgás során állandónak tekinthető (a szimulációban

6. ábra. A 2017. októberi írásbeli érettségi 3/A feladatában szereplő fotó és a hozzá kapcsolódó grafikon.





7. ábra. A papírkúp esésének tanulmányozására írt szimuláció sebesség-idő, magasság-idő, gyorsulás-idő, valamint a közegellenállási és felhajtó erő – idő grafikonjai. A felhajtóerővel és anélkül számított értékeket közös koordinátarendszerben ábrázoltuk. A kezdeti adatok dt = 0,01 s, h = 2,1 m, c = 0,45, m = 1 g, r = 5 cm.

csak a 7. tizedes jegyben tért el a két magasságszint között), a közegellenállás viszont – négyzetes sebességfüggősége miatt – intenzíven változott. Ha a két erő maximumát hasonlítjuk össze (3), akkor a felhajtóerő az elhanyagolás határán mozog (7%), de a mozgás első tizedmásodpercében folyamatosan nagyobb, mint a közegellenállási erő (*7. ábra*):

$$\frac{\max(F_f)}{\max(F_k)} \approx 0{,}07. \qquad (3)$$

A megoldókulcs itt sem ad pontot a papírkúpra ható erők felsorolásánál a felhajtóerő említéséért.

✧

A második részben légballonok, lövedékek és rakéták mozgásának szimulációival fogok foglalkozni.

Irodalom

1. https://bmefilozofia.blog.hu/2016/07/23/letezhet_termeszettudomany_kiserlet_nelkul
2. https://phet.colorado.edu/hu/simulations/category/physics
3. http://tudasbazis.sulinet.hu/hu/informatika/informatika/informatika-9-12-evfolyam/a-szimulacio-modszertana/a-szimulacio-modszertana
4. https://www.scilab.org/
5. http://www.bbc.co.uk/jersey/content/articles/2006/12/20/michael_holmes_fall_feature.shtml
6. http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2013osz_kozep/k_fiz_13okt_fl.pdf
7. https://www.livescience.com/23710-physics-supersonic-skydive.html
8. http://www-mdp.eng.cam.ac.uk/web/library/enginfo/aerothermal_dvd_only/aero/atmos/atmos.html
9. https://galaktika.hu/szkafander-a-nagy-ugrashoz
10. http://dload.oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2017osz_kozep/k_fiz_17okt_fl.pdf
11. https://1drv.ms/f/s!An0er2QwwGjytDxO4UrVauVNqCwu

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja http://www.elft.hu, e-postacíme: elft@elft.hu

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős kiadó Groma István főtitkár, felelős szerkesztő Lendvai János főszerkesztő.

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszámlán.

Megjelenik havonta (nyáron duplaszámmal), egyes szám ára: 900.- Ft (duplaszámé 1800.- Ft) + postaköltség.

HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és **HU ISSN 1588–0540** (online)