XXI. ORSZÁGOS SZILÁRD LEÓ NUKLEÁRIS TANULMÁNYI VERSENY – 3. rész

Sükösd Csaba
BME Nukleáris Technikai Intézet

A döntő versenyfeladatai – 2. rész

Ezen a versenyen is, mint az első Szilárd Leó Versenyen (valamint 2004 óta ismét), a Junior kategória versenyfeladatai részben eltértek az I. kategória (11–12. osztályosok) feladataitól. E részben 3 közös és 3-3 I. kategóriás, illetve junior versenyfeladatot közlünk.

5. feladat — kitűzte: *Halász Máté*

A ^{63}Cu izotóp (p,n) magreakció során ^{63}Zn izotóppá alakul, melyet követően a ^{63}Zn pozitív β^+-bomlással ismét ^{63}Cu izotóppá bomlik. A bomlás során felszabaduló energia 2,344 MeV.

a) A megadott bomlási energia alapján határozzuk meg a ^{63}Cu(p,n)^{63}Zn magreakció létrehozásához szükséges energiát!

b) ^{63}Cu(d,2n)^{63}Zn, azaz a deuteron elnyelésével és két neutron kibocsátásával járó reakció végbemeneteléhez a tömegközépponti rendszerben 6,373 MeV kezdeti mozgási energiára van szükség. A megadott energia és az a) részfeladat eredményei alapján határozzuk meg a deuteron kötési energiáját!

Javaslat: az energiamérlegeket leíró egyenleteket *atomtömegek* segítségével írjuk fel, és mindenhol tömegközépponti rendszerben számoljunk!

Megoldás

a) A ^{63}Cu(p,n)^{63}Zn magreakció energiamérlege a következőképpen írható:

$$M_{\mathrm{Cu}}\, c^2 + M_{\mathrm{p}}\, c^2 = M_{\mathrm{Zn}}\, c^2 - m_{\mathrm{e}}\, c^2 + M_{\mathrm{n}} c^2 + Q_1,$$

ahol Q_1 a ^{63}Cu(p,n)^{63}Zn magreakció létrehozásához szükséges energia (−1)-szerese, M_{Cu} és M_{Zn} pedig rendre a ^{63}Cu és ^{63}Zn izotópok atomtömegei. Emiatt jelenik meg az egyenlet jobb oldalán a mínusz egy elektrontömeg. A ^{63}Zn ezt követő pozitív β^+-bomlásának energiamérlege a következő:

$$M_{\mathrm{Zn}}\, c^2 = M_{\mathrm{Cu}}\, c^2 + 2\, m_{\mathrm{e}}\, c^2 + Q_2,$$

ahol Q_2 a ^{63}Zn izotóp pozitív β^+-bomlása során felszabaduló energia, és az egyenlet jobb oldalán szereplő plusz két elektrontömeg szintén az atomtömegek miatt jelent meg. Az egyenletek átrendezésével a proton, neutron, elektron (pozitron) tömegének ismeretében Q_1 kifejezhető:

$$Q_1 = M_{\mathrm{p}}\, c^2 - M_{\mathrm{n}}\, c^2 - m_{\mathrm{e}}\, c^2 - Q_2 = -4{,}149 \ \mathrm{MeV}.$$

b) A ^{63}Cu(d,2n)^{63}Zn magreakció annyiban különbözik az előző reakciótól, hogy mindkét oldalon megjelenik plusz egy neutron, viszont a deuteronban a proton, illetve neutron kötött állapotban van (kötési energia B_{D}). A plusz neutronok nyugalmi energiája tehát kiesik, a kötési energia pedig a két magreakció létrehozásához szükséges energia különbsége lesz:

$$M_{\mathrm{Cu}}\, c^2 + M_{\mathrm{p}}\, c^2 = \\ = M_{\mathrm{Zn}}\, c^2 - m_{\mathrm{e}}\, c^2 + M_{\mathrm{n}}\, c^2 + Q_1,$$

$$M_{\mathrm{Cu}}\, c^2 + M_{\mathrm{p}}\, c^2 + \cancel{M_{\mathrm{n}}\, c^2} - B_{\mathrm{D}} = \\ = M_{\mathrm{Zn}}\, c^2 - m_{\mathrm{e}}\, c^2 + M_{\mathrm{n}}\, c^2 + Q_3 + \cancel{M_{\mathrm{n}}\, c^2},$$

ahol Q_3 a ^{63}Cu(d,2n)^{63}Zn magreakció végbemeneteléhez a tömegközépponti rendszerben szükséges kezdeti mozgási energia. A deuteron kötési energiája az egyenletrendszer megoldásával adódik:

$$B_{\mathrm{D}} = Q_1 - Q_3 = -4{,}149 - (-6{,}373) = 2{,}224 \ \mathrm{MeV}.$$

6. feladat — kitűzte: *Tarján Péter*

Egy hidrogénszerű (egy vegyérték-elektronos) atom által kibocsátott fotonok energiáját a módosított Balmer-formulával lehet felírni:

$$hf_{1,\,2} = E_{\mathrm{H}}\,(Z - z)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

ahol E_{H} = 13,6 eV a hidrogénatom ionizációs energiája, Z az atom rendszáma, z pedig az úgynevezett „ár-

---

Sükösd Csaba (1947) a BME címzetes egyetemi tanára, az ELFT elnökségi tagja. Kísérleti magfizikus, aki kísérleti munkáját nagyrészt külföldi kutatóintézetekben végezte. Kutatási területe a magreakciók, óriásrezonanciák és némely asztrofizikailag releváns magreakció vizsgálata radioaktív ionnyalábokkal. Marx György tanítványaként részt vett a 70-es évek MTA oktatási kísérletében. Azóta is szoros kapcsolata van a fizikatanárok közösségével, több tanár- és oktatással kapcsolatos program vezetője.

nyékolási” korrekció. Ez azt írja le, hogy a legutolsó vegyértékelektron „pályáján” belül lévő elektronok milyen mértékben „árnyékolják le” az atommag elektromos mezejét.

a) Ezt a formulát felhasználva számoljuk ki a vegyértékelektronra vonatkozó árnyékolási tényezőt az alapállapotú Li-atomban és Be^+-ionban, ha ezek ionizációs energiája 5,39 eV, illetve 17,0 eV! Az árnyékolási tényezőket tekintsük azonosnak.

b) Indokoljuk meg, hogy az árnyékolási tényező miért tekinthető azonosnak a két esetben!

c) Értelmezzük az a) pontban kapott eredményt!

Megoldás

Először a b) kérdésre válaszolunk.

b) Mind a Li-, mind a Be-atomoknál a vegyértékelektron-állapotok a $2s$ állapotok. Mind a Li-atomnál, mind a Be^+-ionnál ebben az állapotban egyetlen vegyértékelektron van. E héjon „belül”, az $1s$ állapotban mindkét esetben 2 elektron foglal helyet. Elektronszerkezeti szempontból tehát a két rendszer teljesen megegyezik. Az egyedüli különbség közöttük tehát csak az atommag töltésében van: a Li-atom magjának $+3e$, míg a Be-atom magjának $+4e$ töltése van. Mivel az elektronszerkezet azonos, ezért jogos feltételezni, hogy az árnyékolási faktorok is azonosak.

a) A feladat szerint a Li-atom ionizálásához E_1 = 5,39 eV, a Be^+-ion további ionizálásához E_2 = 17,0 eV energia kell. Ekkora energiát a hf_1, illetve hf_2 energiájú fotonok tudnak szolgáltatni. Mivel az elektronpályák is azonosak, ezért a két esetben az ionizáláshoz szükséges kvantumszámok négyzeteinek reciprokából képezett különbség is azonos. Képezzük tehát a kettő arányát:

$$\frac{hf_1}{hf_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{(Z_1 - z)^2}{(Z_2 - z)^2}.$$

Ebből

$$\frac{5{,}39}{17{,}0} = \frac{(3 - z)^2}{(4 - z)^2},$$

amiből az egyetlen ismeretlen, z kifejezhető:

$$z = \frac{3 - 4 \cdot \sqrt{\dfrac{5{,}39}{17{,}0}}}{1 - \sqrt{\dfrac{5{,}39}{17{,}0}}} = 1{,}711.$$

c) Látható, hogy az $1s$ állapotban lévő 2 elektron a mag töltéséből nem teljesen 2 elektronnyi töltést „árnyékol le”. Ennek oka az, hogy az egy csomógömbös $2s$ állapotban lévő elektronnak a mag helyén, azaz az $1s$ állapot tértartományán belül is van megtalálási valószínűsége.

Megjegyzések

1) Az árnyékolási tényezőket külön-külön is meg lehetne határozni, hiszen E_i értéke, valamint az, hogy $n_1 = 1$ és $n_2 = \infty$ ismert. Így kiszámolva, a két árnyékolási tényező:

$$5{,}39 = 13{,}6 \cdot (3 - z)^2 \cdot \frac{1}{2^2},$$

amiből z = 1,741 a Li-atomra. Hasonlóan a Be^+-ionra z = 1,764. Látjuk, hogy a két árnyékolási tényező valóban 2%-on belül megegyezik, így a feladat fent közölt megoldásánál jogos volt a feltételezés, hogy ezek jó közelítéssel azonosak.

2) A módosított Balmer-képlet egy másik alkalmazása a K_α röntgenátmenetek energiájának leírása. Ezeknél egy n = 2 állapotból ugrik be egy elektron az n = 1 állapot egy üresen maradt helyére. Ilyenkor az $1s$ állapotban csak egyetlen elektron van az átmenet előtt. A kísérletek szerint az átmenetek energiáját a z = 1 árnyékolási tényező jól leírja. Első pillanatra furcsának tűnik, hogy egyetlen elektron árnyékolási tényezője 1, míg a feladat alapján 2 elektron árnyékolási tényezője kevesebb, mint 2. A megoldás az, hogy az árnyékolási tényező nemcsak az árnyékolást létrehozó elektrontól függ, hanem attól is, hogy milyen állapotot árnyékol le. A K_α röntgenátmenetek $2p$ állapotokból kiindulva következhetnek be, az elektromágneses átmenetekre vonatkozó kiválasztási szabályok szerint. A p állapotoknak pedig csomója van a mag helyén. Ezért a belső, $1s$ állapotban maradt elektron jobban le tudja árnyékolni a $2p$ elektronokat, mint a jelen feladatban szereplő $2s$ elektronokat, amelyeknek a mag helyén, illetve az $1s$ állapoton „belül” nem nulla a tartózkodási valószínűsége.

7. feladat

kitűzte: Tarján Péter

Két egyforma üregsugárzó dobozt vákuumban, más testektől távol, egymástól R = 10 cm távolságra helyezünk el. A két üreg nyílása d = 0,9 cm átmérőjű és egymással szemben helyezkednek el. A dobozok külső felülete tökéletes tükörként viselkedik. Ha az egyik üreg belsejében 1800 K hőmérsékletet tartunk fenn, mekkora egyensúlyi, állandósult hőmérséklet alakul ki a másik üreg belsejében? (Az üregsugárzó egy zárt doboz, amelynek kicsi nyílása közel abszolút fekete testként viselkedik.)

Megoldás

A második üregsugárzó egyetlen módon kaphat energiát:

– csak hősugárzás révén (hiszen vákuumban van),

– csak a nyíláson át (hiszen mindenhol máshol ideális tükör, minden ráeső sugárzást visszaver),

– csak az első üregsugárzótól (hiszen más test nincs a közelben).

A második üreg belsejében hosszú idő elteltével egy olyan T_2 hőmérséklet fog kialakulni, amelynél egyensúly áll fenn az üreg nyílásán kisugárzott és felvett teljesítmény között:

$$P_2^{be} = P_2^{ki}.$$

Mindkét test sugárzási teljesítményét a Stefan–Boltzmann-törvényből számolhatjuk. A 2. testnél figyelembe kell vennünk, hogy a nyílást körülvevő teljes 4π térszögnek csak a fele a kifelé irány; továbbá ki kell számolnunk azt, hogy a 1. test nyílásából kisugárzott hőnek csak egy kicsiny, a lefedett térszöggel arányos része megy a 2. test nyílása irányába. Így

$$P_2^{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi\,\sigma\,T_2^4,$$

valamint

$$P_2^{be} = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi\,\sigma\,T_1^4\,\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi}{4\,R^2\,\pi}.$$

A két kifejezést egyenlővé téve T_2 kifejezhető:

$$T_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{8}\,\frac{d^2}{R^2}}\;T_1 = 2^{-\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{d}{R}}\;T_1 \cong 321\ \mathrm{K}.$$

I. kategória, 8. feladat

kitűzte: *Sükösd Csaba*

Sokáig rejtély volt az, hogy az Univerzumban miként jöttek létre az élethez annyira szükséges ^{12}C-atomok. *Fred Hoyle* (Cambridge) 1952-ben azt feltételezte, hogy léteznie kell egy gerjesztett állapotnak a ^{12}C-atommagban 7,656 MeV gerjesztési energiánál, amelyen keresztül a következő két fúziós reakció valamelyike a ^{12}C-atommag létrejöttéhez vezethet:

$$1)\quad {}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \rightarrow {}^8_4\mathrm{Be} \quad \text{és} \quad {}^8_4\mathrm{Be} + {}^4_2\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C},$$

$$2)\quad {}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C}.$$

a) Vajon a két reakció közül melyik tud alacsonyabb hőmérsékleten és kevésbé sűrű csillaganyagban megvalósulni? Indokoljuk meg a választ!

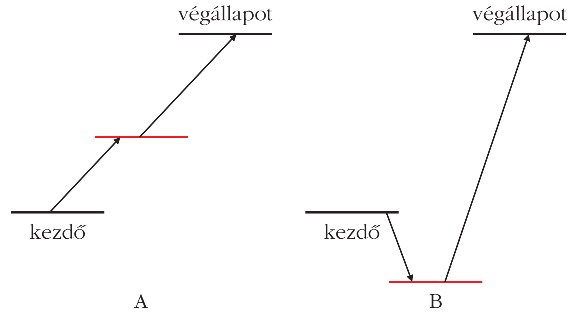
b) Vajon mekkora hőmérséklet kell az egyes reakciólépések létrejöttéhez?

c) A ^{8}Be-atommag felezési ideje csak $6{,}7\cdot 10^{-17}$ s. Milyen jelentősége van ennek?

Adatok: a ^{8}Be tömege 8,00530520 u, a ^{4}He tömege 4,00260325415 u, a ^{12}C tömege 12,000 u. $1\ \mathrm{u}\cdot c^2$ = 931,4940954 MeV = $1{,}66054\cdot 10^{-27}$ kg $\cdot\, c^2$.

Megoldás

a) Mindkét reakcióláncban a kezdő és a végállapot azonos. A kezdő állapotban 3 héliumatommag, a végállapotban egyetlen, 7,656 MeV energiájú gerjesztett állapotú szénatommag van. Mivel a kérdésben az szerepel, hogy a reakciók csak magas hőmérsékleten zajlanak le, ezért már konkrét számítás nélkül is megmondható, hogy a végállapot magasabb energiájú kell legyen, mint a kezdő. Az első reakcióláncban a végállapotot két lépésben, egy közbülső reakción keresztül érjük el. A közbülső állapot energiájától függően két lehetőség van:



A „B” esetben az első reakció exoterm, de a második reakcióhoz nagyobb energia kell, mintha egyetlen lépésben érnénk el a végállapotot. Az „A” esetben pedig külön-külön mindegyik reakcióhoz kevesebb energia kell, mint a (végállapot – kezdőállapot) energiakülönbség. Azt, hogy a konkrét esetben melyik valósul meg, a tömegekből lehet megtudni. A berilliumos lánc első,

$${}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \rightarrow {}^8_4\mathrm{Be}$$

lépésének energiamérlege a következő:

$$\Delta M = M_{\mathrm{Be}} - 2\,M_{\mathrm{He}} = 0{,}002986917\ \mathrm{u}.$$

A ^{8}Be alapállapota tehát „magasabban” van, mint a 2 α-részecskeállapot (ezért is tud szinte azonnal „visszabomlani” két α-részecskére). Tehát a fenti ábrán az „A” helyzet valósul meg. Ebből következik, hogy a ^{8}Be-on keresztül vezető reakciólánchoz kell alacsonyabb hőmérséklet. A három α-részecskés reakcióhoz jóval nagyobb sűrűség is kellene, hiszen annak valószínűsége, hogy három részecske ütközik, mindig jóval alacsonyabb, mint azé, hogy kettő.

b) Először a megvalósulási hőmérséklethez szükséges energiákat kell meghatározni:

$${}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \rightarrow {}^8_4\mathrm{Be}$$

esetére

$$\Delta E = 0{,}0002986917\ \mathrm{u}\cdot c^2 = 0{,}278\ \mathrm{MeV}.$$

A két α-részecske ennyi (mozgási) energiát kell bevigyen ahhoz, hogy a reakció létrejöhessen. Az ekvipartíció tétele szerint hőmérsékleti egyensúlyban mindkét részecske átlagosan ugyanakkora mozgási energiával rendelkezik, ezért az egy részecskére eső átlagos mozgási energia 0,139 MeV kell legyen. Az α-részecske tömegpontként közelíthető, így

$$\frac{3}{2}\,k\,T = 0{,}139\ \mathrm{MeV} = 2{,}24\cdot 10^{-14}\ \mathrm{J}.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$T = \frac{2}{3\,k}\cdot 2{,}24\cdot 10^{-14} = 1{,}08\cdot 10^{9}\ \mathrm{K}.$$

Azaz, ez a folyamat körülbelül egymilliárd K-en megy végbe. (Megjegyezzük, hogy a valóságban a hőmérsékleti egyensúlyban található Maxwell–Boltzmannsebességeloszlás és az alagúteffektus miatt alacsonyabb hőmérséklet is elegendő. Ez általánosan is igaz minden, fúzióval kapcsolatos hőmérséklet számítására.) A folyamat második, ${}^{8}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C}$ részére a tömeghiány:

$$\Delta M = M_C + \frac{E_x}{c^2} - M_{He} - M_{Be} =$$

$$= 12{,}0 + \frac{7{,}656\ \mathrm{MeV}}{c^2} - 4{,}00250325415 -$$

$$- 8{,}0053052 =$$

$$= -0{,}00780845415\ \mathrm{u} + \frac{7{,}656\ \mathrm{MeV}}{c^2}.$$

Az ehhez szükséges energia:

$$\Delta E = \Delta M c^2 = -7{,}273 + 7{,}656 = 0{,}382\ \mathrm{MeV}.$$

Mivel ezt a reakciót is két részecske hozza létre, ezért az egyes részecskék átlagos energiája 0,191 MeV. Az ehhez tartozó hőmérséklet: $1{,}48 \cdot 10^9$ K, azaz körülbelül másfél milliárd K. Látható, hogy a kétlépcsős folyamat mindkét lépcsője nagyságrendileg eléggé közeli hőmérsékleten végbemehet. A második folyamat (a ^{12}C rezonanciaenergiája) az, amely „beállítja” a csillag hőmérsékletét. Ezen a – valamivel magasabb – hőmérsékleten a folyamatlánc első lépcsője – a ^{8}Be létrejötte – is végbemehet.

Az egylépcsős „3α” folyamathoz szükséges hőmérséklet kiszámítása:

$$\Delta M c^2 = M_C c^2 + E_x - 3 M_{He} c^2 =$$

$$= (12{,}0 - 3 \cdot 4{,}00250325415) \cdot 931{,}4940954 + 7{,}656 =$$

$$= 0{,}660\ \mathrm{MeV}.$$

Ezt három α-részecskének kellene „összeadnia”, így mozgási energiájuk egyenként átlagosan 0,220 MeV kellene legyen. Látható, hogy ez magasabb hőmérsékletet jelentene, mint a kétlépcsős folyamat bármely tagja.

c) A ^{8}Be rövid élettartamának jelentősége az, hogy a kétlépcsős reakció lezajlásához az energiafeltétel (hőmérséklet-feltétel) teljesülése nem elegendő, hanem a héliumatomok sűrűségére is szükséges egy feltétel. Ugyanis a harmadik α-részecskének a ^{8}Be rövid élettartamán belül kell ütköznie ahhoz, hogy a ^{12}C gerjesztett állapota létrejöhessen.

Megjegyzés

A sűrűségre a következőképpen lehet durva becslést adni. A körülbelül $2{,}24 \cdot 10^{-14}$ J mozgási energiájú α-részecske sebessége

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}24 \cdot 10^{-14}\ (\mathrm{J})}{4{,}0025 \cdot 1{,}66054 \cdot 10^{-27}\ (\mathrm{kg})}} \cong$$

$$\cong 2{,}6 \cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ahhoz, hogy ezzel a sebességgel a ^{8}Be felezési idején belül ütközzön a berilliummal, az α-részecskének

$$d = 2{,}6 \cdot 10^6 \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-17}\ (\mathrm{s}) = 1{,}74 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

távolságon belül kell lennie.[1] No, de pillanatokkal előbb a ^{8}Be-atomnak is ezen a távolságon belül kellett létrejönnie, azaz a kezdőállapotban legalább három He-atomnak kellett egy ilyen sugarú gömbön belül lennie. A He-atomsűrűség tehát legalább:

$$\rho = \frac{3}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{9}{4\pi \cdot (1{,}74 \cdot 10^{-10})^3} =$$

$$= 1{,}36 \cdot 10^{29}\ \frac{1}{\mathrm{m}^3} = 1{,}36 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\mathrm{cm}^3}.$$

Az ideális gáznak feltételezett hélium (parciális) nyomása:

$$p = \frac{N}{V} kT = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{3}{2} kT =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 1{,}36 \cdot 10^{29} \left(\frac{1}{\mathrm{m}^3}\right) \cdot 2{,}24 \cdot 10^{-14}\ (\mathrm{J}) =$$

$$= 2{,}03 \cdot 10^{15}\ \mathrm{pa}(!!)$$

I. kategória, 9. feladat

kitűzte: *Papp Gergely* és Sükösd Csaba

A nyugvó müonok (μ-mezonok) átlagos élettartama (a λ bomlási állandó reciproka)

$$\tau_0 = \frac{1}{\lambda} = 2{,}196\ \mu\mathrm{s}.$$

Nyugalmi tömege, $m_\mu = 207\, m_e$. Mekkora kinetikus energiája kell legyen egy $N \gg 1$ darabból álló müoncsoport müonjainak a Föld felszínétől mért $h = 30$ km magasságban, hogy merőleges beérkezésnél jó közelítéssel $N/2$ darab érje el a felszínt? (A légköri hatásokat hanyagoljuk el. A *távolság számításában* az egyszerűség kedvéért tegyük fel hogy $v_\mu \cong c$.

Megoldás

Ha azt szeretnénk, hogy a kiindulási müonok fele érje el a felszínt, akkor a müonok inerciarendszerében éppen egy felezési idő telik el. Ezt mi, mint külső szemlélő az idődilatáció értelmében úgy észleljük, hogy a müonoknak

---

[1] Itt el lehet gondolkozni azon, hogy nemcsak az α-részecske mozog, hanem a berillium is mozoghat, tehát a relatív sebességüknek kell akkorának lennie, hogy a Be felezési idején (életidején) belül ütközzenek. Viszont a sebességek vektormennyiségek, és ezért egymáshoz képest véletlen irányokba mozoghatnak. A pontosabb számításhoz valószínűségsűrűség-függvényeket kellene felírni. Ezen a szinten viszont nem rossz közelítő becslés az, hogy a Be áll, és az α-részecske hozzá képest mozog.

$$t = \frac{t_{1/2}}{\sqrt{1 - \frac{v_\mu^2}{c^2}}} = \gamma\, t_{1/2}$$

idő áll rendelkezésre, hogy a külső szemlélő által h-nak érzékelt távolságot $v_\mu \cong c$ sebességgel megtegyék, azaz $h = ct = c\gamma t_{1/2}$. (Idődilatáció helyett Lorentz-kontrakcióval számolva is ugyanide jutunk, ott a müonok által $h' = h/\gamma$-nak észlelt távolság lesz az, amit a müonoknak $t_{1/2}$ idő alatt kell megtennie.)

Mivel $\lambda = (\ln 2)/t_{1/2}$, ezért $t_{1/2} = \tau_0 \ln 2$, így $h = c\gamma\tau_0 \ln 2$. Ebből kapjuk, hogy

$$\gamma = \frac{h}{c\,\tau_0 \ln 2} \cong 65{,}7.$$

A keresett kinetikus energia a teljes és a nyugalmi energia különbsége, azaz

$$E_{\mathrm{kin}} = E_{\mathrm{tot}} - E_0 = E_0(\gamma - 1) = m_\mu c^2 (\gamma - 1) =$$
$$= 207\, m_e c^2 (\gamma - 1) = 207 \cdot 0{,}511 \cdot 64{,}7 \approx$$
$$\approx 6844\ \mathrm{MeV}.$$

Mivel $\gamma \approx 65{,}7$, így

$$\frac{v_\mu}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0{,}99988 \approx 1,$$

tehát helyes volt a $v_\mu \approx c$ feltételezésünk.

I. kategória, 10. feladat — kitűzte: Papp Gergely

Az 50-es években a Lawrence Berkeley kutatóintézetben antiprotonok előállítására alkalmas gyorsítót készültek építeni (ez lett a Bevatron [*B*illions of *eV* Synchro*tron*] , és itt fedezték fel 1955-ben az antiprotont, amiért az 1959. évi Nobel-díjat adták). Az antiprotonokat proton-proton ütközésekkel hozták létre: $\mathrm{p} + \mathrm{p} \to \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}}$ reakcióban. A gyorsító tervezésekor kritikus volt tudni, hogy mekkora kell legyen a bejövő protonok minimális *kinetikus* energiája, hogy a proton-antiproton párkeltés létrejöhessen. (A felgyorsított protonok nyugvó hidrogén céltárggyal ütköztek.) Számoljuk ki ezt a küszöbenergiát, az egyszerűség kedvéért a proton nyugalmi energiájának egységeiben! Nagyságrendileg hány eV ez az energia?

Javaslat: használjuk ki, hogy a nyugalmi energia

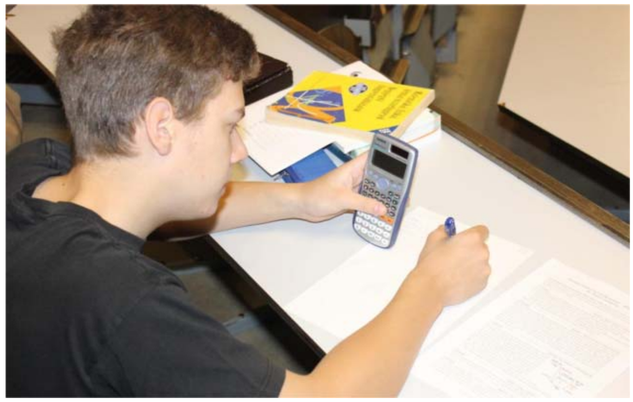
$$\left(m_0 c^2\right)^2 = E^2 - (p\,c)^2$$

minden inerciarendszerben azonos, többrészecske-rendszerekre is!)

Megoldás

Használjuk ki, hogy az

$$E^2 - (p\,c)^2 = \left(m_0 c^2\right)^2$$



(nyugalmi energia) invariáns, azaz inerciarendszertől független. Ezzel könnyen transzformálhatunk a laboratóriumi és tömegközépponti (TKP) rendszerek között. A TKP-rendszerben az összes lendület nulla, míg laboratóriumi rendszerben minden lendületet a bejövő proton hordoz:

$$\underbrace{E_{\mathrm{TKP}} - 0_{\mathrm{TKP}}}_{\mathrm{TKP}} = \underbrace{\left[(m_{\mathrm{be}} + m_0)\, c^2\right]^2}_{E_{\mathrm{labor}}} - \underbrace{p_{\mathrm{be}}^2\, c^2}_{p_{\mathrm{labor}}},$$

ahol $m_0 = m_\mathrm{p}$ a proton nyugalmi tömege, m_{be} a bejövő proton teljes (relativisztikus) tömege, és p_{be} a bejövő proton lendülete. Az antiproton-keletkezési küszöbnél a tömegközépponti teljes energia $E_{\mathrm{TKP}} = 4\,mc^2$, hiszen itt négy – protontömegnyi – részecske van „nyugalomban”. Így kapjuk hogy

$$\left(4\, m_0 c^2\right)^2 =$$
$$= \left(m_{\mathrm{be}} c^2\right)^2 + 2\, m_{\mathrm{be}} c^2\, m_0 c^2 + \left(m_0 c^2\right)^2 - p_{\mathrm{be}}^2 c^2.$$

Mivel a bejövő protonra is fennáll, hogy

$$\left(m_{\mathrm{be}} c^2\right)^2 - p_{\mathrm{be}}^2 c^2 = \left(m_0 c^2\right)^2,$$

így

$$16\left(m_0 c^2\right)^2 = 2\left(m_{\mathrm{be}} c^2\right)\left(m_0 c^2\right) + 2\left(m_0 c^2\right)^2.$$

Ebből azonnal adódik, hogy $m_{\mathrm{be}} c^2 = 7\, m_0 c^2$, amiből a bejövő proton kinetikus energiájára kapjuk:

$$E_{\mathrm{kin}} = E_{\mathrm{totál}} - m_0 c^2 = 6\, m_0 c^2.$$

Tehát ahhoz, hogy két új részecskét hozzunk létre $2\, m_0 c^2$ teljes nyugalmi energiával, a bejövő proton kinetikus energiájának minimum $6\, m_0 c^2$-nek kell lennie, ami nagyságrendileg 6 GeV.

Junior kategória, 8. feladat — kitűzte: *Radnóti Katalin*

Melyik esetben szabadulna fel több energia, ha egy nagy rendszámú (uránközeli vagy transzurán) atommag két vagy három egyenlő részre hasadna? Melyiknek lenne nagyobb az aktiválási energiája? Indokoljuk meg a választ!

Megoldás

Ha a nagy rendszámú atommag három részre hasad, akkor kisebb rendszámú atommagok keletkeznek, mint két részre hasadáskor. Például a ^{96}Cm (kűrium) esetében a két egyenlő részre történő hasadáskor a keletkezett izotópok rendszáma 48, míg a három részre hasadáskor 32. Ezért ez utóbbi esetben a végtermékek közelebb lesznek az energiavölgy mélypontjához, a 26-os rendszámú vashoz.

A három részre történő maghasadás aktiválási energiája viszont jóval nagyobb, mint a két részre történő hasadásé, mert a felületi energia nagyon megnő. Emiatt egy ilyen folyamat valószínűsége sokkal kisebb.

Junior kategória, 9. feladat

kitűzte: Sükösd Csaba

Az LHC 26 655 m kerületű gyűrűjében két irányban, egymással szemben „csomagokban” keringenek a fénysebesség közelébe felgyorsított protonok. Irányonként 2808 protoncsomag kering. Az egymással szemben futó protoncsomagok a gyűrű 4 pontján elhelyezett detektorok középpontjában ütköznek. Az ütközések leggyorsabban 25 ns-ként követik egymást. Ezeknek az adatoknak az alapján válaszoljunk a következő kérdésekre.

a) Legalább milyen távolságra haladnak protoncsomagok egymás után?

b) A protoncsomaghelyek egyenletes gyűrűmenti eloszlását feltételezve irányonként hány „hely” nincs feltöltve protonokkal?

Megoldás

a) Az ütközések legrövidebb időbeli távolságából következtethetünk a protoncsomagok minimális távolságára. Ha a részecskék fénysebességgel haladnak, és két ütközés között 25 ns telik el, akkor távolságuk:

$$s = c\,t = 3\cdot 10^{8}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\cdot 25\cdot 10^{-9}\ (\mathrm{s}) \cong 7{,}5\ \mathrm{m}.$$

b) A feltétel szerint a csomagok helye „egyenletesen” oszlik el a gyűrű mentén, azaz minden hely azonos távolságra van a következőtől. Mivel az előző kérdésre adott válasz alapján tudjuk, hogy vannak csomagok, amelyek 7,5 m távolságra vannak egymástól, ebből következik, hogy minden csomaghely távolsága is 7,5 m-re kell legyen a következőtől. Ezért a 26 655 m kerületen

$$N = \frac{26\,655\ (\mathrm{m})}{7{,}5\ (\mathrm{m})} = 3554$$

csomaghely fér el. A feladat szerint viszont csak 2808 protoncsomag kering, tehát a fel nem töltött helyek száma: 3554 – 2808 = 746.

Junior kategória, 10. feladat

kitűzte: *Kis Dániel*

A SPECT-vizsgálatokhoz használt γ-sugárzó ^{99m}Tc-izotópot a ^{99}Mo β-bomlásából nyerik. Az izotópgenerátoron kezdetben 200 MBq Mo van jelen. 83 óra elteltével 80% kémiai kitermelési hatásfokkal (rövid idő alatt) leválasztják a keletkezett Tc-ot. (A kitermelési hatásfok megmutatja, hogy az ott lévő anyag hányad részét tudjuk egyáltalán elválasztani.)

Adjuk meg, hogy legfeljebb mennyi idő telhet el a vizsgálat kezdetéig, ha a detektálás hatásfoka 1%, és a mérés akkor sikeres, ha a teljes hossza alatt (mérési idő: 10 perc) a detektoron legalább $6\cdot 10^{5}$ darab beütést mérünk.

Adatok: $T_{1/2}^{\mathrm{Mo}}$ = 65,9 óra, $T_{1/2}^{\mathrm{Tc}}$ = 6,01 óra.

Megoldás

Mivel a kiinduló anyag felezési ideje sokkal hosszabb a keletkezett anyag felezési idejénél, ezért t = 83 h elteltével beáll a radioaktív egyensúly. Emiatt a keletkezett Tc aktivitása jó közelítéssel (± 10%) megegyezik a Mo aktivitásával:[2]

$$A_0^{\mathrm{Tc}} \cong A^{\mathrm{Mo}} = A_0\, e^{-\lambda_{\mathrm{Mo}}\, t}.$$

A 80% hatásfok miatt a kitermelés után (a bomlások elhanyagolása mellett) a maradék Tc aktivitása: $0{,}8\,A_0^{\mathrm{Tc}}$. A pihentetés során ez az aktivitás csökken, amelyből az adott detektálási hatásfok mellett a t_{m} = 600 s mérési idő alatt bekövetkező bomlások száma:

$$N_{\min} = \eta_{\mathrm{det}}\, N_{\mathrm{b}} = \eta_{\mathrm{det}}\, t_{\mathrm{m}}\, A_0^{\mathrm{Tc}}\, 0{,}8\, e^{-\lambda_{\mathrm{Tc}}\, t_{\mathrm{pih}}} =$$

$$= \eta_{\mathrm{det}}\, t_{\mathrm{m}}\, A_0\, 0{,}8\, e^{-(\lambda_{\mathrm{Tc}}\, t_{\mathrm{pih}} + \lambda_{\mathrm{Mo}}\, t)},$$

ahol kihasználtuk, hogy a mérési idő alatti Tc aktivitáscsökkenésével nem kell számolnunk, és $N_{\min}$ a minimális beütés száma. A kapott képlet alapján a keresett pihentetési idő:

$$t_{\mathrm{pih}} = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{Tc}}} \ln\left(\frac{\eta_{\mathrm{det}}\, t_{\mathrm{m}}\, A_0\, 0{,}8\, e^{-\lambda_{\mathrm{Mo}}\, t}}{N_{\min}}\right),$$

így a pihentetési idő 56,4 óra.

Folytatása következik.

[2] Az aktivitások csak szekuláris egyensúly esetén egyeznének meg pontosan. Ebben az esetben csak úgynevezett „részleges” egyensúly áll be, ahol az aktivitások csak arányosak egymással, de nem egyeznek meg teljesen. Az eltérés azonban körülbelül 10%, ezért ezt itt nem kértük számon a versenyzőktől.