A mozgásban lévő testrészek által végzett munka a *víz kinetikus energiájává* alakul. Így a testrészek teljesítménye éppen a víz egységnyi idő alatt történő mozgásienergia-változásával lesz egyenlő, amely

$$P = \frac{1}{2} A \rho_v v v^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left[\rho g V \left(1 - \frac{f \rho_v}{\rho}\right)\right]^3}{A \rho_v}}$$

képlettel fejezhető ki [6].

A fenti formula felhasználásával számos érdekes jelenségre kvantitatív magyarázatot adhatunk. Például: kiszámíthatjuk, hogy az 50 kg tömegű úszónőnek ahhoz, hogy az orrát a vízfelszín felett tartsa, mozgó végtagjaival 7,8 watt teljesítményt kell kifejteni. (A számításhoz használt további adatok: a test 95 százaléka merül vízbe, a mozgó végtagok teljes területe 600 cm^2, s legyen $\rho_{úszó} = \rho_v$.)

Számítással magunk is ellenőrizzük a teljesítmény fenti értékét!

Irodalom

1. Paul Davidovits: *Physics in Biology and Medicine*. 3rd edition, Academic Press, Elsevier Inc. (2008) 93–95.
2. Kundt Schmidt-Nielsen: *Animal Physiology*. 4th Edition, Cambridge University Press, Cambridge (1990) 433–448.
3. Greguss Ferenc: *Eleven találmányok*. Móra Könyvkiadó, Budapest (1976)
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Waikiki_Aquarium
5. M. R. Clarke: Physical properties of spermaceti oil in sperm whales. *J. Mar. Biol. Ass. U.K. 58* (1978) 19–26.
6. Paul Davidovits: *Physics in Biology and Medicine*. 3rd edition, Academic Press, Elsevier Inc. (2008) 82–87.

RELATIVITÁSELMÉLETRŐL KÖZÉPISKOLÁBAN – MÁSKÉNT, KIEGÉSZÍTÉS

Kürti Jenő
ELTE Biológiai Fizika Tanszék

A *Fizikai Szemle* 2018. áprilisi számának *A fizika tanítása* rovatában jelent meg *Kiss Miklós* remek írása, hogy miként lehet az érdeklődő középiskolások figyelmét fölhívni arra, hogy az elektromos és a mágneses mezők mindig együtt kezelendők. Külön-külön az elektromos mezőnek és a mágneses mezőnek nem csak a nagysága, hanem még a léte vagy nem léte is függ attól, hogy milyen vonatkoztatási rendszerből nézzük. Ez valóban elgondolkodtató lehet az érdeklődő diákoknak.

A konkrét példa két párhuzamos, nagyon („végtelenül”) hosszú, egyenletesen töltött szigetelő egyenes közötti erőhatás vizsgálata volt. A levezetés során azonban egy kis „kegyes csalás” történt. Az az állítás ugyanis, hogy „A vonatkoztatási rendszertől nem függhet az erő nagysága” nem igaz, ha – amint a cikkben is történt – a klasszikus, úgynevezett hármas erőről beszélünk. Még akkor sem, ha itt a kölcsönös mozgás irányára merőleges komponensről van szó!

Szerencsére még egy pongyolaság történt, ugyanis a szövegben nem egyetlen ponttöltésre ható erőről van szó, hanem az egységnyi hosszúságú darabra ható erőről. Így a levezetés végül mégis helyes, köszönhetően annak, hogy két ellentétes tényező kompenzálja egymást. Mivel ez azonnal nem látható, ezért szeretném ezt kicsit részletesebben kifejteni ebben az írásban.

Válasszunk egy még egyszerűbb esetet, mint amelyet Kiss Miklós írása tárgyal: az egyik töltött egyenes helyett legyen egy q ponttöltésünk. (A két ponttöltés esete fizikailag még egyszerűbb, azonban ott matematikai komplikációk merülnek föl: a töltés-, illetve áramsűrűségeknél az úgynevezett Dirac-deltával kellene dolgoznunk.) A másik töltött egyenes pedig legyen egy vékony, tömör egyenes henger (ennek előnye később világos kell legyen). A mezőket a hengeren kívül vizsgáljuk.

A feladat tehát a következő: egy végtelen hosszú, egyenes, A keresztmetszetű, henger alakú szigetelőt egyenletesen feltöltünk ρ (térfogati!) töltéssűrűséggel. A henger tengelyétől d távolságra egy, a hengerhez képest nyugalomban lévő pontszerű q töltést helyezünk el. Vizsgáljuk a ponttöltésre ható erőt két vonatkoztatási rendszerből:

a) laboratóriumi rendszerből, amelyben minden töltés nyugalomban van és

b) a henger tengelyével párhuzamosan állandó v sebességgel mozgó inerciarendszerből.

A számításokhoz – a jobb áttekinthetőség kedvéért – relativisztikus mértékegységrendszert, vagyis olyat használjunk, amelyben a vákuumbeli fénysebesség

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 1,$$

sőt külön az ε_0-t (és ezzel persze automatikusan a μ_0-t) is válasszuk 1-nek! Hangsúlyozzuk, hogy emiatt

Kürti Jenő (1954) fizikus, az MTA doktora, az ELTE Biológiai Fizika Tanszékének professzora. Kutatási területe elsősorban szén nanoszerkezetek elméleti vizsgálata, különös tekintettel azok rezgési spektroszkópiájára. A *Fizika III* egyetemi tankönyv *Relativitáselmélet,* valamint *Atombéjfizika* részeinek szerzője.

ebben az írásban a v nem a hagyományos, m/s-ban mért sebességet jelenti, hanem a fénysebességegységekben mért dimenziótlan sebességet! A kapott képletek – kis odafigyeléssel – bármikor átírhatók az SI-mértékegységekkel kifejezett alakjukra.

Annak érdekében, hogy a probléma mélységeihez jobban hozzáférjünk, használjuk a relativisztikus, úgynevezett négyes formalizmust, persze „lájtos" módon. Az alább leírtak jobb megértéséhez segítséget nyújthat például a *Fizika III* tankönyv középiskolások számára is megemészthető *Relativitáselmélet* fejezete [1].

Foglaljuk össze nagyon röviden a téridőbeli négyesvektorok legfontosabb tulajdonságait!

Minden négyesvektor egy idő- és három térkomponensből áll. Legyen például a^μ egy téridőbeli négyesvektor ($\mu = 0, 1, 2, 3$), amelynek időkomponense $a^0 \equiv a_t$, a három térbeli komponense pedig (a_x, a_y, a_z), röviden összefoglalva $\boldsymbol{a}$. Ekkor írhatjuk:

$$a^\mu \equiv (a^0, a^1, a^2, a^3) \equiv (a_t, a_x, a_y, a_z) \equiv (a_t, \boldsymbol{a}).$$

A négyesvektorok mintapéldánya a téridő-helyvektor (idő-hely négyesvektor):

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, x, y, z) \equiv (t, \boldsymbol{r}).$$

Másik nevezetes példa a négyesimpulzus (energia-impulzus négyesvektor), vagy – *Károlyházy Frigyes* szemléletes elnevezésével – anyagvektor:

$$p^\mu \equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv (\epsilon, p_x, p_y, p_z) \equiv (\epsilon, \boldsymbol{p}).$$

ahol ϵ az energia és $\boldsymbol{p}$ az impulzus (lendület).

Számunkra fontos lesz még a négyesáram-sűrűség:

$$j^\mu \equiv (j^0, j^1, j^2, j^3) \equiv (\rho, j_x, j_y, j_z) \equiv (\rho, \boldsymbol{j}).$$

ahol ρ a töltés- és $\boldsymbol{j}$ az áramsűrűség.

Ezek a példák azt sugallják, hogy egy négyesvektor három térbeli komponense egy klasszikus fizikai (hármas)vektor, időkomponense pedig egy klasszikus fizikai skalár. Ez azonban nincs mindig így! Éppen a négyeserő egy olyan példa, ahol nem ilyen egyszerű a helyzet, és ez kulcsfontosságú lesz.

Előtte azonban ejtsünk pár szót a négyesvektorok transzformációs tulajdonságairól. Egy téridőmennyiség definíciószerűen akkor négyesvektor, ha komponensei a koordinátarendszer forgatásakor úgy transzformálódnak, ahogy a téridő-helyvektor komponensei. Itt nemcsak tisztán térbeli forgatásról lehet szó, hanem igazi téridőbeli „forgatásról" is! Az utóbbi hétköznapi nyelvre lefordítva annak felel meg, amikor egyik inerciarendszerről áttérünk egy hozzá képest mozgó másik inerciarendszerre [1]. A megfelelő transzformációk a Lorentz-transzformációk. A legegyszerűbb eset amikor két inerciarendszer a közös x tengely mentén mozog egymáshoz képest v sebességgel, az y és z tengelyek párhuzamosak. Ebben az úgynevezett standard elrendezésben a t és x koordináták transzformálódnak, a v-re merőleges y és z koordináták nem. Ilyenkor beszélünk a t-x téridősíkban (Minkowski-síkban) történő forgatásról, mivel a transzformációs képletek nagyon hasonlók a közönséges tér egy síkjában végzett forgatást leíró kifejezésekhez. A geometriai kép a képleteket egyszerűbbé, átláthatóbbá teszi. A Lorentz-transzformációt nem a bonyolult, $(1-v^2)^{1/2}$-es faktort tartalmazó képlettel célszerű leírni (ne felejtsük, $c = 1$). Helyette sokkal egyszerűbb, ha az euklideszi síkbeli forgatáshoz nagyon hasonlóan, tehát szögfüggvényekkel kezeljük a Minkowski-síkban történő forgatást is. Egyetlen nagy különbség az, hogy míg az euklideszi síkban a trigonometrikus függvényeket (cos, sin, tg, …) használjuk, a Minkowski-síkban hiperbolikus függvényekkel (ch, sh, th, …) kell dolgozni. Az utóbbiak definíciója és tulajdonságai – sok más tankönyv vagy internetes oldal mellett – [1]-ben is megtalálhatók. Itt csak az alapdefiníciókat idézzük föl:

$$\mathrm{ch}\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}, \quad \mathrm{sh}\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \quad \mathrm{th}\theta = \frac{\mathrm{sh}\theta}{\mathrm{ch}\theta}.$$

Egy nagyon fontos „hiperbolikus azonosságot" célszerű még leszögezni:

$$\mathrm{ch}^2\theta - \mathrm{sh}^2\theta \equiv 1.$$

A Minkowski-síkban történő forgatás θ szöge (úgynevezett sebességparaméter) és az egyik inerciarendszer másikhoz képesti (dimenziótlanított!) v sebessége közötti kapcsolat:

$$v = \mathrm{th}\theta.$$

(Miközben a θ sebességparaméter $-\infty$-ről $+\infty$-re változik, tangens hiperbolikusza -1-ről $+1$-re nő.)

A θ sebességparaméter használatával egy tetszőleges a^μ négyesvektor idő- és térkomponenseinek Lorentz-transzformációja a standard elrendezésben a következő áttekinthető alakban írható:

$$\begin{aligned} a'_t &= a_t \mathrm{ch}\theta + a_x \mathrm{sh}\theta, \\ a'_x &= a_t \mathrm{sh}\theta + a_x \mathrm{ch}\theta, \\ a'_y &= a_y, \\ a'_z &= a_z. \end{aligned}$$

(θ előjele attól függ, hogy melyik inerciarendszerről térünk át a másikra.)

Ha valaki θ helyett a v sebességet szeretné használni, akkor könnyen átválthat a Lorentz-transzformáció „klasszikus", négyzetgyökös kifejezéseket tartalmazó alakjára. Például:

$$\mathrm{ch}\theta \equiv \frac{\mathrm{ch}\theta}{1} \equiv \frac{\mathrm{ch}\theta}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\theta - \mathrm{sh}^2\theta}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2\theta}} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Ezek után nézzük magát az eredeti problémát!

Laboratóriumi rendszerben

Itt minden töltés nyugalomban van, ezért expliciten még nincs szükség a relativitáselméletre. Felhasználhatjuk a Kiss Miklós cikkében leírt gondolatmenetet, csupán α lineáris töltéssűrűség helyett ρ térfogati töltéssűrűséget használunk. A kettő közti kapcsolat nyilvánvaló: $\alpha = \rho A$. Egy ρ térfogati töltéssűrűségű, A keresztmetszetű henger középtengelyétől d távolságban (persze kívül a hengeren) a henger tengelyére merőleges irányú az elektromos térerősség, amelynek nagysága

$$E = \frac{1}{2\pi}\frac{A\rho}{d}.$$

A tengelytől d távolságra nyugalomban lévő q ponttöltésre ható erő tehát

$$F = qE = q\frac{1}{2\pi}\frac{A\rho}{d}.$$

A konkrétság kedvéért legyen ρ és q is pozitív. Laboratóriumi rendszerben tehát a fenti képlettel leírható tisztán elektromos taszítás lép föl, mágneses mező nincs.

A laboratóriumihoz képest mozgó inerciarendszerben

Az előző esethez viszonyítva két változás is van. Az egyik, hogy ebből a rendszerből nézve a szigetelő töltései v sebességgel mozognak, tehát megjelenik egy $j' \neq 0$ áramsűrűség is. Ez nem jelenthet problémát egy középiskolásnak. Az már kevésbé nyilvánvaló, hogy a töltéssűrűség sem lesz egyforma a két rendszerben, $\rho' \neq \rho$. A Lorentz-transzformáció fenti képleteit alkalmazva (ρ, $j \equiv 0$)-ból könnyen megkapjuk ρ'-t és j'-t:

$$\rho' = \rho\,\mathrm{ch}\theta,$$

$$j' = \rho\,\mathrm{sh}\theta \equiv \rho\,\mathrm{ch}\theta\,\mathrm{th}\theta \equiv \rho' v.$$

Az áramsűrűség összefüggése relativitáselmélet nélkül is minden további nélkül érthető egy középiskolás számára. A töltéssűrűség növekedésénél pedig a Lorentz-kontrakcióra – ami miatt adott mennyiségű töltés rövidebb szakaszon oszlik el a laboratóriumihoz képest mozgó inerciarendszerből nézve – lehet utalni.

Ezek után már könnyű dolgunk van, alkalmazhatjuk a középiskolában megismert formulákat az elektromos és most már a mágneses mezőre is.

Az elektromos térerősség nagysága most

$$E' = \frac{1}{2\pi}\frac{A\rho'}{d} = E\,\mathrm{ch}\theta.$$

Az $I' = Aj'$ áramerősség miatt kialakuló mágneses mező nagysága pedig

$$B' = \frac{1}{2\pi}\frac{I'}{d} = \frac{1}{2\pi}\frac{Aj'}{d} = \frac{1}{2\pi}\frac{A\rho' v}{d} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{A\rho'}{d}v = E' v.$$

Vegyük észre, hogy A és d mindkét rendszerben ugyanaz, hiszen a téridő-helyvektor (mint minden négyesvektor) kölcsönös mozgásra merőleges komponensei nem transzformálódnak!

A mezők ismeretében – erre az esetre alkalmazva a Lorentz-féle erőtörvényt – megkaphatjuk a q ponttöltésre ható erő nagyágát:

$$F' = q(E' - vB') = q\left[E' - v(E'v)\right] =$$

$$= qE'\left(1 - v^2\right).$$

(Megjegyzendő, hogy a q elektromos töltés Lorentz-invariáns, tehát számértéke mindkét vonatkoztatási rendszerben ugyanaz.)

Látható, hogy az elektromos taszítás megnövekszik ($E' = E\,\mathrm{ch}\theta$), ugyanakkor a megjelenő mágneses mezőben mozgó töltésre föllép egy vonzó erő. Kérdés, hogy az elektromos taszítás növekedését kompenzálja-e a megjelenő mágneses vonzás. Vagyis, vajon ugyanaz-e az erő értéke a kétféle inerciarendszerben? Lássuk mit kapunk, ha behelyettesítjük a fenti összefüggéseket!

$$F' = qE\,\mathrm{ch}\theta\left(1 - \mathrm{th}^2\theta\right) = qE\,\mathrm{ch}\theta\,\frac{\mathrm{ch}^2\theta - \mathrm{sh}^2\theta}{\mathrm{ch}^2\theta} =$$

$$= qE\,\mathrm{ch}\theta\,\frac{1}{\mathrm{ch}^2\theta} = F\frac{1}{\mathrm{ch}\theta}.$$

A két erő tehát NEM egyforma! Az elektromos taszítás növekedését túlkompenzálja a mágneses vonzás, a mozgó rendszerből nézve – a laboratóriumi rendszerhez képest – lecsökken a taszítás.

De ez nem is baj, ezt szeretném még röviden megmutatni.

Korábban – a standard elrendezés esetére fölírt összefüggésekből – már láttuk, hogy a Lorentz-transzformáció során egy négyesvektor kölcsönös mozgásra *merőleges* két térbeli komponense nem változik. Ez azonban csak a *négyes*vektorok térbeli komponenseire igaz! Márpedig a középiskolában megtanult

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + v \times \boldsymbol{B})$$

Lorentz-erő ebben a formában nem egy négyesvektor három térbeli komponense! Ennek belátását ne az $\boldsymbol{E}$ és $\boldsymbol{B}$ transzformációs tulajdonságainak vizsgálatára alapozzuk, mert az még a jó középiskolás diákok számára is nehezebb gondolatmenet. Helyette kövessünk egy talán egyszerűbb utat.

A kulcsot az a tény adja, hogy minden olyan esetben, amikor időderiválással származtatunk egy új mennyiséget (sebesség, gyorsulás, …), figyelembe kell venni, hogy a koordinátaidő és az úgynevezett sajátidő különböznek egymástól. A klasszikus hármasvektoroknál a koordinátaidő szerint deriválunk, míg a négyesvektoroknál a sajátidő szerint.

Annak érdekében, hogy lássuk mire vezet ez a tény, induljunk ki egy anyagi objektum sorsának két közeli eseményét (a téridőben világvonala két közeli pontját) összekötő téridő-helyvektorból:

$$\mathrm{d}x^\mu \equiv (\mathrm{d}t,\, \mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y,\, \mathrm{d}z) \equiv (\mathrm{d}t,\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}).$$

A komponensek (így $\mathrm{d}t$ is!) attól függenek, hogy milyen vonatkoztatási rendszerben adjuk meg azokat. Ezzel szemben a speciális relativitáselmélet egyik alapösszefüggése, hogy az időkomponens négyzetének és a térbeli komponensek négyzetösszegének *különbsége* olyan kifejezés (négyesvektorunk négyzetes téridőhossza), amelynek értéke nem függ attól, hogy milyen inerciarendszerben számoljuk ki (invariáns). Ez az érték azon $\mathrm{d}\tau$ sajátidőtartam négyzete, amelyet egy olyan inerciarendszerben mérünk, amelyben a két esemény ugyanott történik ($\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$). Írhatjuk tehát, hogy

$$\mathrm{d}\tau := \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2} \equiv \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{r}^2} \equiv$$
$$\equiv \mathrm{d}t\sqrt{1 - \boldsymbol{v}^2} \equiv \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\boldsymbol{\theta}}.$$

(Ne felejtsük, hogy $c = 1$, $\boldsymbol{v}^2 = \mathrm{th}^2\boldsymbol{\theta}$ és $\mathrm{ch}^2\boldsymbol{\theta} - \mathrm{sh}^2\boldsymbol{\theta} \equiv 1$!)

A $\mathrm{d}\tau$ sajátidő és a nála $\mathrm{ch}\boldsymbol{\theta}$-szor nagyobb koordinátaidő kis sebességekre ($v \ll 1$) alig különbözik.

Egy négyesvektorból időderiválással újabb négyesvektor nyerhető, de csak akkor, ha azt nem a koordinátaidő, hanem az invariáns sajátidő szerint végezzük. A sebesség, impulzus, erő relativisztikusan helyes kifejezései tehát a következők.

Négyessebesség:

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t},\, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} =$$
$$= (1,\, \boldsymbol{v})\,\mathrm{ch}\boldsymbol{\theta}.$$

Könnyen belátható, hogy ez egy egységvektor a téridőben, iránya pedig a test világvonalának mindenkori érintője mentén mutat.

Négyesimpulzus (energia-impulzus négyesvektor, más kifejezéssel anyagvektor):

$$p^\mu \equiv (\epsilon,\, \boldsymbol{p}) = m\,u^\mu = m\,(1,\, \boldsymbol{v})\,\mathrm{ch}\boldsymbol{\theta},$$

ahol m az adott részecske invariáns tömege.

Végül pedig a négyeserő:

$$f^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t},\, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{ch}\boldsymbol{\theta} =$$
$$= (\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{F})\,\mathrm{ch}\boldsymbol{\theta}.$$

Az utolsó átalakítás a newtoni mechanikából ismert munkatétel, illetve impulzustétel (amiből nekünk most a második a fontos), ahol $\boldsymbol{F}$ a klasszikus háromdimenziós erő.

Azt kaptuk tehát, hogy nem a klasszikus hármaserő merőleges komponense marad változatlan a Lorentz-transzformáció során, hanem a négyeserőé, és az utóbbi $\mathrm{ch}\boldsymbol{\theta}$-szorosa az előbbinek! Pontosan ezt tükrözi amit korábban kaptunk, amikor a Lorentz-féle erőképletet nemrelativisztikusan, a $\mathrm{ch}\boldsymbol{\theta}$ szorzó nélkül alkalmaztuk.

Annak oka egyszerű, hogy az eredeti írásban miért nem könnyen vehető észre a kegyes csalás. Az egységnyi hosszú darabban lévő ponttöltések *darabszáma* a Lorentz-kontrakció miatt éppen egy $\mathrm{ch}\boldsymbol{\theta}$ szorzófaktorral növekszik meg, ami pont kompenzálja az *egyetlen* töltésre ható *hármaserő csökkenését*. Vagyis (legalábbis ebben a speciális esetben) az *egységnyi hosszra* ható hármaserő nagysága valóban megegyezik a két inerciarendszerben.

A leírtaktól teljesen függetlenül még egy értelemzavaró nyomtatási hibát is megemlítek: az eredeti cikk elején, a 2. Maxwell-egyenlet sztatikus elektromos mezejénél az „örvénymentes” helyett tévedésből „forrásmentes” szerepel.

Végül, nehogy félreértés legyen, szeretném leszögezni: Kiss Miklós cikke középiskolások számára nagyon tanulságos és figyelemfelkeltő, érdemeit semmiképpen sem kívánom kisebbíteni, sőt. Jelen írással csupán az alapprobléma még pontosabb megértéséhez szeretnék hozzájárulni.

Irodalom

1. Erostyák János, Kürti Jenő, Raics Péter, Sükösd Csaba: *Fizika III.* (szerk.: Erostyák János, Litz József), Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest–Debrecen–Pécs 2006, V. rész: Relativitáselmélet, 201–252.