

# SÚRLÓDÁSI EGYÜTTHATÓ MEGHATÁROZÁSA ELLENÁLLÁSMÉRÉS ALAPJÁN

Simon Alpár, Tunyagi Arthúr, Fülöp Zalán, Kapusi Zalán, Kandrai Konrád  
Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Románia

A tartalmas és érdekes, de ugyanakkor korszerű és vonzó minőségi fizikatanítás elképzelhetetlen az egyénileg elvégzett, vagy frontálisan bemutatott szemléltető kísérletek nélkül. A modern neveléstudományi elméleteknek, szakmódszertanoknak és tanmeneteknek, illetve a „csináld magad” koncepciónak (DIY, „do-it-yourself”) köszönhetően a számítógép és a mikrokontrollerek egyre fontosabbá váltak a fizika tanításában is. A megértendő és tanulmányozandó jelenségek és a mérés–adatgyűjtés–feldolgozás hármast megvalósító számítástechnika közötti kapcsolatot az érzékelők, jelátalakítók és működtetők jelentik.

Mindezeknek köszönhetően ma már újra előkerülhetnek a sufnyiból a régi, klasszikus alapkísérletek, és modern köntösbe bújtatva, a mai generáció számára vonzóbb formában jelentkeznek a fizikaoktatásban.



*Simon Alpár* a Babeş–Bolyai Tudományegyetem Fizika karán egyetemi docens, dékánhelyettes. Doktori disszertációját „Magna cum Laude” minősítéssel 2002-ben védte meg. Kutatási érdeklődési köréhez a modern fizikaoktatás, az interdiszciplináris fizika, a mikrokontrollerek által vezérelt szenzoros mérések és a gázkiszűlések fizikája tartozik.



*Tunyagi Arthúr* a Babeş–Bolyai Tudományegyetem Fizika karán egyetemi adjunktus. Doktori címét 2004-ben az Osnabrücker Egyetemen szerezte. Kutatási területe a mikrokontrollerek által vezérelt mérések alkalmazása a fizikában.



*Fülöp Zalán* a Babeş–Bolyai Tudományegyetem Fizika karán, Mérnöki-Fizika szakon III. éves hallgató. Középiskolai tanulmányait a szovátai Domokos Kázmér Iskola csoport keretén belül végezte. A Kolozsvári Magyar Egyetemi Intézet égisze alatt működő Fizika szakkollégium tagja.

A „tudományos barkácsolás” és a „csináld magad” típusú kísérletek igen fontos szerepet kaphatnak a fizikatanításban, hiszen az egyszerűség, a hozzáférhetőség és az alacsony költségkeret mellett, sokkal közelebb viszik az érdeklődőt a jelenséghez és az azt leíró elmélethez, mint a csúcstechnológiás, rendkívül pontos és kifinomult, legkorszerűbb, de ugyanakkor nagyon bonyolult kutatási kísérletek.

Az itt bemutatásra kerülő munkánkban a súrlódási erők tanulmányozásánál – a fentiek szellemében – a jól bevált, klasszikus, rugós erőmérős kísérletek esetén alkalmazott emberi húzást és leolvasást mikrokontrollerrel, a rugós erőmérőt pedig egy „rugalmas” ellenállással helyettesítjük. Reményeink szerint a leírtak a szakköri tevékenységeken résztvevő természet-tudományos és műszaki érdeklődésű gimnazisták, illetve a fizikaszakos főiskolai vagy egyetemi hallgatók számára hasznos és érdekes segítségként, kiindulópontként szolgálhatnak.

## Elméleti áttekintés

A súrlódás mindennapi életünkben – mind hasznos, mind pedig káros következményei révén – igen fontos szerepet játszik. Meghatározásaként azt mondhat-



*Kapusi Zalán* a Babeş–Bolyai Tudományegyetem Fizika karán, Mérnöki-Fizika szakon III. éves hallgató. Középiskolai tanulmányait a székelyudvarhelyi Tamási Áron Gimnázium keretén belül végezte. A Kolozsvári Magyar Egyetemi Intézet égisze alatt működő Fizika szakkollégium tagja.



*Kandrai Konrád* a Babeş–Bolyai Tudományegyetem Fizika karán, Mérnöki-Fizika szakon III. éves hallgató. Középiskolai tanulmányait a kolozsvári Brassai Sámuel Elméleti Líceum keretén belül végezte. A Kolozsvári Magyar Egyetemi Intézet égisze alatt működő Fizika szakkollégium tagja.

jük, hogy azon jelenségek összessége, amelyek az egymással érintkező testek érintkezési felületük mentén való elmozdulásukkal, illetve azok nyugalmi állapotról való megindulásuk akadályozásával kapcsolatosak [1, 2]. Ezért külön szokták vizsgálni és tárgyalni a *csúszó* vagy *mozgási súrlódást*, illetve a *tapadó* vagy *nyugalmi súrlódást*. Mindkét súrlódás annak köszönhető, hogy a felületek sohasem tökéletesen simák. Az egymással érintkező felületek egyenetlenségei (egymásba akadó kiemelkedések és bemélyedések) kölcsönösen nehezítik az egymáshoz viszonyított mozgást. A felületmegmunkálás sem oldja meg a súrlódás kérdését, hiszen a gondosan „simára” csiszolt felületek, a megjelenő molekuláris erők és kémiai kötések révén különösen nagy mértékben tapadnak egymáshoz.

A súrlódási erő reakcióerő, azaz csak akkor jelenik meg, ha egy külső erő a nyugalomban levő testet el akarja mozdítani, vagy – ha ez már sikerült – folyamatos mozgásban akarja tartani. A két súrlódástípust és a nekik megfelelő súrlódási erőket egy erő-idő diagramon [3] szemléltethetjük (1. ábra).

A vízszintes asztalra nyugvó téglatest csak akkor kezd csúszni, ha az érintkezési felülettel párhuzamosan egy húzó vagy toló erő nagysága egy meghatározott küszöbértéket elér. Mivel a téglatest a küszöbértéknél kisebb nagyságú erő hatására nyugalomban marad, a testre egy másik, ellentétes irányú és egyenlő nagyságú erő (kényszererő) is hat, amelyet *tapadási súrlódási erőnek* nevezünk.

A küszöbértékre, amelynél a test éppen megmozdul, vonatkozik a Coulomb-féle súrlódási törvény: az  $F_{\text{tapadási}}$  tapadási súrlódási erő független az érintkezési felület méretétől és arányos a felületre ható  $N$  nyomóerő nagyságával:

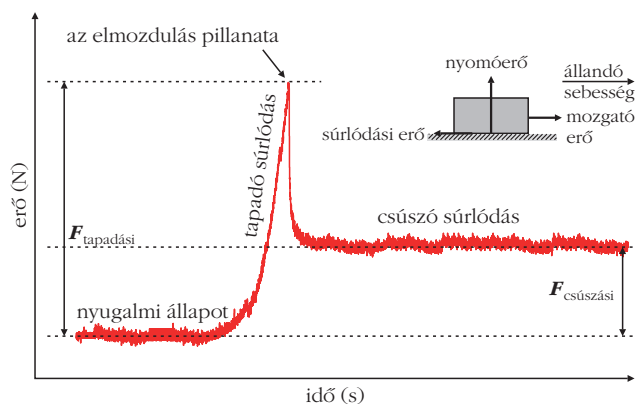
$$|F_{\text{tapadási}}| = \mu_0 |N|. \quad (1)$$

A  $\mu_0$  arányossági tényező a két érintkező felület anyagi minőségétől függő empirikus mennyiség és *statikus* vagy *tapadási súrlódási együtthatónak* nevezzük.

Ha legyőztük a tapadási súrlódást és a téglatestet egy bizonyos kezdősebességgel elindítottuk az asztalra, az tapasztaljuk, hogy sebessége egyre csökken és végül zérus lesz (megáll). A sebességcsökkenést, illetve a sebességgel ellentétes irányú gyorsulást az asztalra által ható *csúszási súrlódási erőnek* tulajdonítjuk. Erre az erőre is érvényes a Coulomb-féle súrlódási törvény: a sebességgel mindig ellentétes irányú  $F_{\text{csúszási}}$  súrlódási erő nagysága első közelítésben független az érintkezési felület és a sebesség nagyságától, és arányos a felületre ható  $N$  nyomóerő nagyságával:

$$|F_{\text{csúszási}}| = \mu |N|. \quad (2)$$

A  $\mu$  arányossági tényező szintén a két érintkező felület anyagi minőségétől függő empirikus mennyiség és *kinetikus* vagy *csúszási súrlódási együtthatónak* nevezzük.



1. ábra. Erő-idő diagram a súrlódási jelenségekhez.

Kísérletileg könnyen kimutatható, hogy a megmozdításhoz szükséges küszöberő nagyobb a már elindított test egyenes mozgásban való tartásához szükséges erőnél, ennek következtében a csúszási súrlódási együttható is kisebb, mint ugyanazon érintkező anyagpár tapadási súrlódási együtthatója:

$$\mu < \mu_0. \quad (3)$$

A súrlódás tanulmányozására és a súrlódási együttható meghatározására számos módszer áll rendelkezésünkre [4–8]. A változtatható hajlásszögű lejtős módszeren kívül mindegyik közös vonása az erőmérés.

A technikai fejlődésnek köszönhetően ma már nagyon sokfajta, modern erőmérő érzékelő áll rendelkezésünkre. Olyan eszközökről van szó, amelyek elektromos ellenállása megváltozik alakváltozás, külső erő vagy nyomás hatására [9–11]. Talán az egyik legegyszerűbb ilyen érzékelő a rugalmas ellenállás, vagy vezető gumiszál [12].

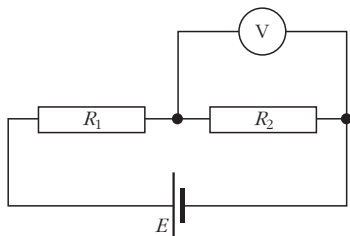
## Szükséges anyagok, eszközök

A kísérlet elvégzéséhez krokodilcsipeszekre, mérőszalagra, analitikai mérlegványra és súlyokra, vezető gumiszálra, Arduino Uno mikrokontrollerre, műanyag próbapanelre, 1 k $\Omega$ -os ellenállásra, számítógépre, vezérlő szoftverre, számítógép-vezérelt digitális multiméterre, fa téglatestre (hasábra), léptetőmotorra, damilra, különböző anyagi minőségű (fa, üveg, papír) felületekre van szükség.

## A mérőáramkör elméleti és gyakorlati szempontjai

Munkánkban a súrlódás során lejátszódó jelenségek és a számítástechnika közötti „tölcsmérés” rugalmas ellenállást használunk. Kísérleteink során ezen elektromos ellenállás értékét és az érték időbeli változását kell követnünk.

Az ellenállásmérés az egyik leggyakoribb elektromos mérés. A gyakorlatilag rendelkezésünkre álló lehetőségek közül a legegyszerűbbek és leggyorsab-



2. ábra. A feszültségosztó.

bak a multiméteres, illetve a feszültségosztós technikák. Ha a mérendő ellenállás értéke néhány száz  $\Omega$  és néhány száz  $k\Omega$  közé esik, a multiméteres kétvezetékes mérések kielégítő eredményt adnak, akkor is, ha a mérővezeték ellenállását nem kompenzáljuk, nem vesszük figyelembe az esetleges átmeneti ellenállásokat és a környezeti hőmérsékletet. A leggyakrabban elkövethető hiba a „kézhatás” lenne (a mérést végző személy az ellenállást a két kezével szorítja a mérőtűskékhez, testének ellenállása pár tíz  $k\Omega$ -os értéke lesöntöli a mérendő ellenállást, ezzel lényegesen meghamisítva a mérést), de ez krokodilcsipeszek vagy próbapanel segítségével kiküszöbölhető.

Közismert, hogy két ellenállás soros kapcsolása (egylépcsős) feszültségosztót képez (2. ábra). Az elnevezés onnan származik, hogy az  $E$  tápfeszültség megoszlik a két ellenálláson. A voltmérő kijelzésének ismeretében az ismeretlen ellenállás értéke meghatározható.

A voltmérő kijelzése:

$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E, \quad (4)$$

ha  $R_2$  az ismeretlen ellenállás, akkor

$$R_2 = \frac{U}{E - U} R_1, \quad (5)$$

ha pedig  $R_1$  az ismeretlen ellenállás:

$$R_1 = \frac{E - U}{U} R_2. \quad (6)$$

Kísérletünkben  $R_1$  a gumiszál ellenállása és  $R_2 = 1\text{ k}\Omega$ .

## A rugalmas ellenállás

Az erőérzékelőként használt rugalmas ellenállás egy szénszemcséket (ipari kormot) tartalmazó gumiszál, amelynek két hasznos tulajdonsága van: vezeti az áramot és megnyújtva elektromos ellenállása nő.

A hozzávetőlegesen 1 m hosszú és 2 mm átmérőjű gumiszál jópár online üzletből viszonylag olcsón és könnyen beszerezhető [12–16]. A csomag még 2 krokodilcsipeszt és egy 1  $k\Omega$ -os ellenállást is tartalmaz. A gyártó a következő jellemzőket adja meg: nyugalmi állapotban (megnyújtás nélkül) a hosszegységre jutó ellenállás 140–160  $\Omega/\text{cm}$ ; maximum 50–70%-os relatív megnyúlás megengedett; lineáris kapcsolat várható az ellenállás és a megnyúlás között; a relaxációs idő (az



3. ábra. A vezető gumiszál a hozzá kapott 2 krokodilcsipeszrel és az 1  $k\Omega$ -os ellenállással.

az idő, ami alatt a külső nyújtóerő megszűnése után a szál visszanyeri eredeti hosszát és ellenállását) nem megadott, de több perc nagyságrendű.

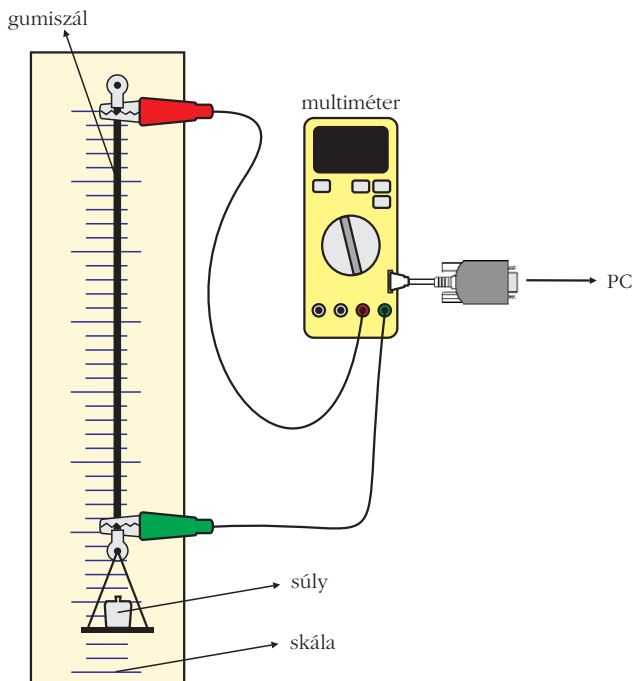
A [www.adafruit.com](http://www.adafruit.com) oldalról beszerzett 2 mm átmérőjű gumiszálunk (3. ábra) hossza 103 cm volt, elektromos ellenállása pedig 2,3  $k\Omega$ , ami 22,33  $\Omega/\text{cm}$  fajlagos ellenállást jelent. Ez kevesebb mint hatoda a termék leírásában található értéknek!

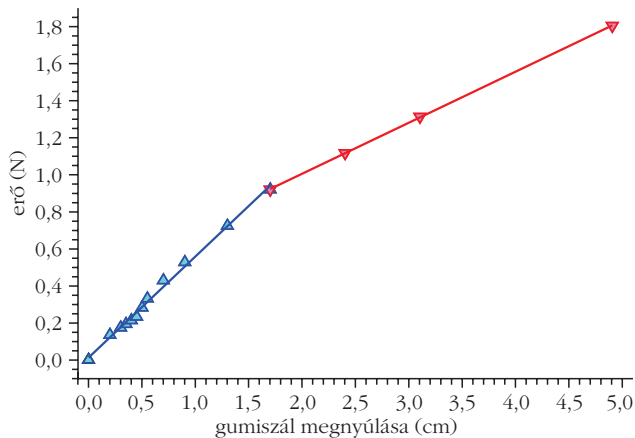
Ha a gumiszálát erőszenzorként akarjuk használni, akkor meg kell vizsgálni a szál elektromos és mechanikai tulajdonságait, illetve kapcsolatot kell találni közöttük.

## A rugalmas ellenállás tanulmányozása

Az eredeti gumiszálát félbe vágtuk, az így kapott két rövidebb szál végeit pedig szigetelt szemes sarukkal láttuk el. A mechanikai és elektromos tulajdonságok vizsgálata során elsődleges célunk az ellenállás idő- és erőfüggésének felderítése. Kísérleti berendezésünket a 4. ábra szemlélteti.

4. ábra. A gumiszál kalibrálása.





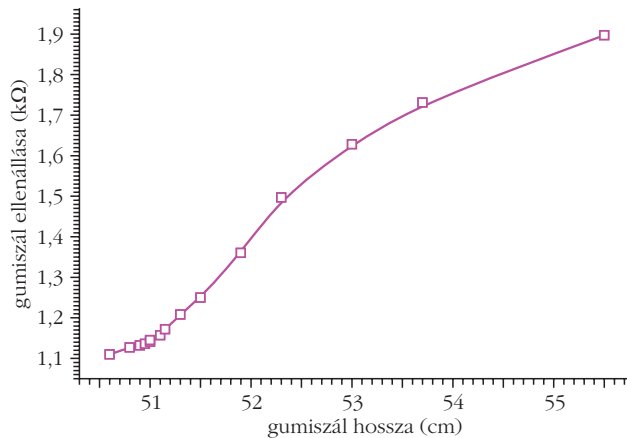
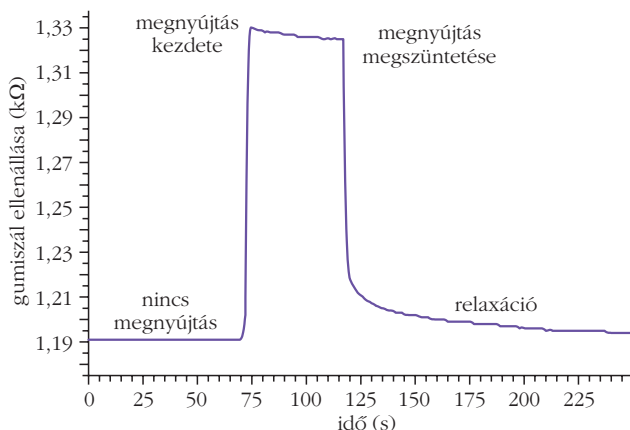
5. ábra. A gumiszál megnyúlása a rá ható erő függvényében.

A gumiszál egyik végén található sarut a mérőszalag origójába helyeztük (0 cm), a másik sarura pedig egy analitikai mérlegtányért erősítettünk, amelyre különböző nagyságú analitikai súlyokat helyeztünk. A szál mindenkori hosszát a mérőszalagról olvastuk le, ellenállását pedig a számítógép-vezérelt multiméterrel mértük és rögzítettük. A megnyúlás és az azt előidéző erő kapcsolatát a 5. ábra szemlélteti.

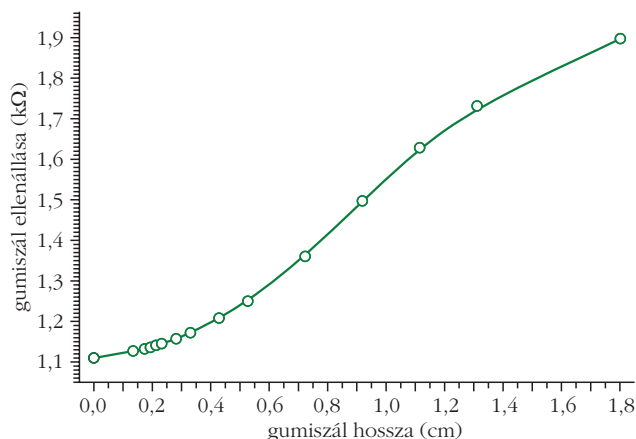
Megfigyelhető, hogy a gumiszál körülbelül 1 N erő értékig jó közelítéssel a Hook-féle rugalmassági törvény szerint viselkedik, majd – bár megnyúlása továbbra is lineáris 1,8 N-ig – rugalmassági modulusa megváltozik. A szál elektromos ellenállása a hossz növekedésével ugyan nő (6. ábra), de e növekedés nincs lineáris kapcsolatban a rá ható erővel (7. ábra), még akkor sem, ha a megnyúlás nem több, mint az eredeti hosszúság 10%-át jelentő 5 cm.

Kísérletünk során a multiméter másodpercenként mérte a gumiszál ellenállásának értékét és rögzítette azt a számítógép adattárolójába. Ezt az időfüggését a 8. ábra szemlélteti. Jól látható, hogy nyújtás hiányában a szál ellenállása állandó, az analitikai súly mérlegtányérra helyezése pedig a szál megnyúlását és az ellenállás ugrásszerű növekedését idézte elő. A súly eltávolítása az ellenállás hirtelen csökkenését vonja maga után, majd egy hosszabb relaxációs idő veszi kezdetét, amíg a szál visszanyeri eredeti méretét és ellenállását.

8. ábra. A gumiszál ellenállásának időfüggése különböző hatásokra.



6. ábra. A gumiszál hosszának hatása az ellenállásra.

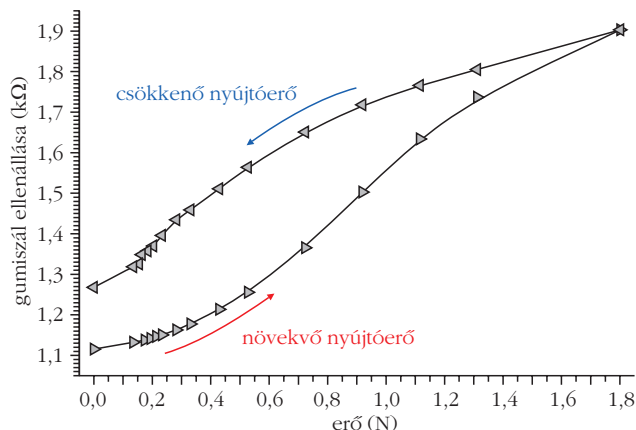


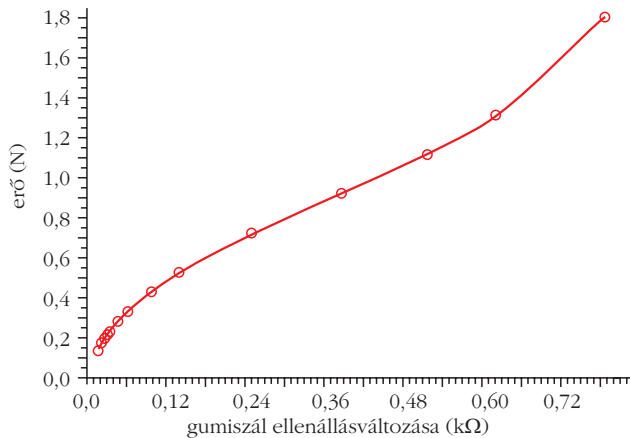
7. ábra. A gumiszálra ható erő hatása az ellenállásra.

Amennyiben az alkalmazások vagy a kísérletezések során nincs lehetőség kivárni a relaxációt, vagyis a gumiszálra folytonosan hat erő, hiszterézises viselkedésre számíthatunk (9. ábra).

A relaxációhiány és a hiszterézis miatt a kalibrálás során nem az erő-ellenállás kapcsolatot célszerű keresni, hanem egy olyan fizikai mennyiséget ajánlott találni, amelyet ezen hatások nem befolyásolnak. Érdeemesnek tűnt megvizsgálni, hogyan változik a gumiszál ellenállása (az eredeti nyújtatlan értékhez viszonyítva) a megnyújtó erő függvényében. Erre a kapcsot

9. ábra. A gumiszál hiszterézises viselkedése.





10. ábra. Megnyújtó erő az ellenállás-változás függvényében.

latra (10. ábra) legjobban egy polinom illeszthető, így a gyakorlati alkalmazások során megmért  $\Delta R$  ellenállás-változással kiszámolhatjuk az erőt és gumiszálunk erőszenzorként használható.

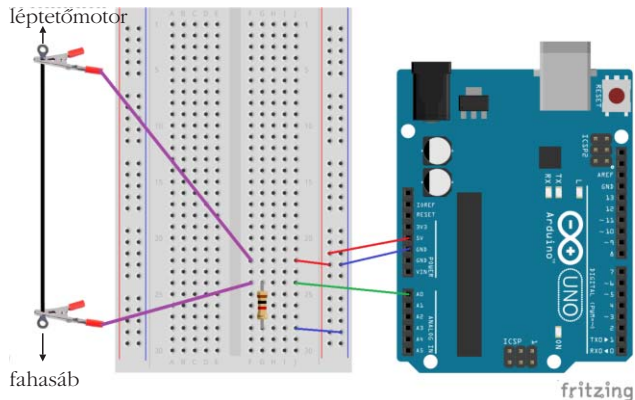
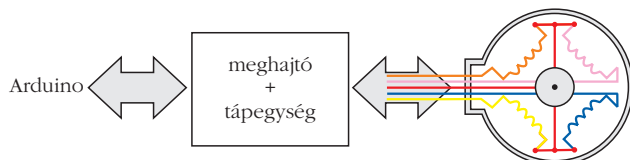
## A vezető gumiszál alkalmazása súrlódási együttható meghatározására

A gumiszál másik felét a súrlódási együttható meghatározására végzett kísérleteknél használtuk fel. A mikrokontrolleres kivitelezésben a feszültségosztó voltmérős méréseit az Arduino Uno mikrokontroller [17] végzi el, és az ismert ellenállás segítségével kiszámolja a mérendő ellenállás értékét, majd minden időpillanatban rögzíti azt (11. ábra). A kísérlet vázlatja a 12. ábrán látható.

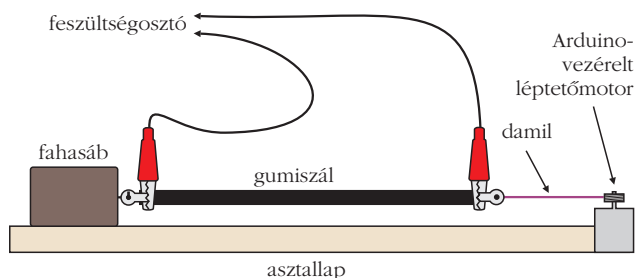
A súrlódási erő mérésekor a gumiszál egyik végén található szemes sarut a fa téglatesthez, a másik végén levőt pedig 0,3 mm-es horgászszinórral a léptetőmotor tárcsájához rögzítettük. A téglatest egyenletes mozgatását egy 28BYJ-48 típusú léptetőmotorral [18] oldottuk meg, amelynek lépésszöge – a katalógusadatok alapján –  $0,09^\circ$ .

A léptetőmotor egy olyan egyenáramú motor, amely jól meghatározott kis lépésekben forog. Ezt a gyakorlatban úgy érik el, hogy a motor tengelyére szerelt mágneseket tekercsekkel (elektromágnesekkel) veszik körül, az éppen üzemben levő tekercs(ek) mágneses tere kölcsönhatásba lép a tengelyen levő állandó mágnes terével és egy lépést elfordítja, majd ezt a tekercset „lekapcsolják” és „felkapcsolják” a következőt és így tovább. Számítógépes vezérléssel eme szögelfordulás rendkívül pontos és reprodukálható. Fő hátrányuk, hogy áramfelvételük terhelésfüggetlen.

13. ábra. Az unipoláris léptetőmotor belső felépítése és huzalozása, a piros a közös szálát, azaz az 5 V-os tápfeszültséget, míg a többi az elektromágneseket jelöli.



11. ábra. Gumiszálás feszültségosztó Arduino Uno mikrokontrolleres kivitelezésben.



12. ábra. Kísérleti berendezés a súrlódás tanulmányozásához.

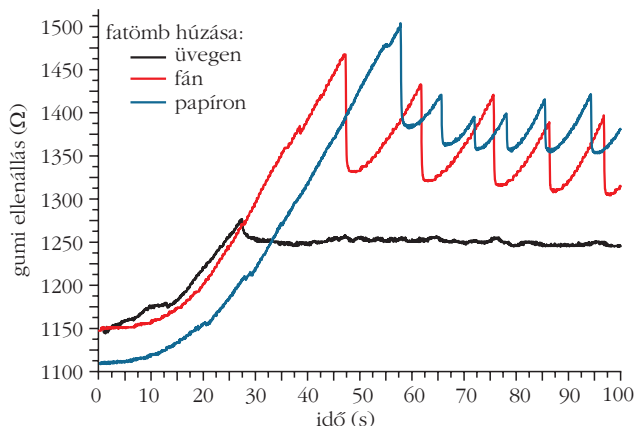
Kísérleteinkben használt unipoláris – azaz áramellátása egyetlen egy szálon történik – léptetőmotorunk az elfordulást a négy tekercs egymást követő fel- és lekapcsolásával (13. ábra) valósítja meg.

Az elfordulás sebességét a mikrokontroller „delay ()” függvényével, a soron következő elektromágnes felkapcsolásának késleltetésével, szabályoztuk. A mérések alatt a motor két lépése között 30 ms késleltetési időt használtunk. Ezzel és az apró,  $0,09^\circ$ -os lépésszöggel a motor ugrásmentes, állandó sebességű húzást biztosít.

Itt érdemes megjegyezni, hogy a mérések és számítások, illetve a léptetőmotor meghajtásához szükséges program a [19] helyről tölthető le.

A szál ellenállásának húzás közbeni időfüggését a 14. ábra szemlélteti. Jól látható, hogy üvegen a tapadás legyőzése után folyamatosan csúszik a test, míg

14. ábra. A gumiszál ellenállásának húzás közbeni időfüggése.





15. ábra. A rugós erőmérő.

fán vagy papíron történő húzáskor a tapadás és a csúszás jelenségei periodikusan ismétlődnek.

A tapadási, illetve a csúszási súrlódási erőt minden esetben az 1. ábra szerinti értelmezés alapján határoztuk meg, a súrlódási együtthatókat pedig az (1) és (2) képletek alapján számítottuk ki.

Ellenőrzésként a kísérleteket rugós erőmérővel is elvégeztük. A gumiszalagot egy 2 N-os rugós erőmérővel (15. ábra) helyettesítettük, a húzás állandó sebességét a léptetőmotor biztosította, az erő leolvasása pedig az erőmérő skálájáról történt.

Kísérleteinket minden esetben négyszer végeztük el: az eredeti fatömb húzása után, 50 g, 100 g és 150 g tömegtöbblettel is megismételtük a méréseket. A kapott  $\mu$  tapadási és  $\mu_0$  csúszási súrlódási együtthatókat az 1. táblázat mutatja.

A táblázatban szereplő súrlódási együtthatók jó egyezést mutatnak az irodalmi értékekkel [20, 21]. Véleményünk szerint a két mérési módszer között megfigyelhető különbség az erőmérő skálájának szabad szemmel történő, kevésbé pontos leolvasásának következménye.

## Összefoglalás

A súrlódási együttható meghatározásának olyan érdekes – és olcsó – alternatíváját mutattuk be, amely a szakkörön résztvevő természettudományos és műszaki érdeklődésű gimnazisták, illetve fizikaszakos főiskolai vagy egyetemi hallgatók számára hasznos segítséget vagy kiindulópontot jelenthet. Méréseink és számításaink jó egyezést mutatnak az irodalmi eredményekkel. Meggyőződésünk, hogy érdemes hasonló mikrokontroller-vezérelt fizikai kísérleteket tervezni

1. táblázat  
Súrlódási együttható-mérések eredményei

	vezető gumiszalag		rugós erőmérős	
	$\mu$	$\mu_0$	$\mu$	$\mu_0$
fa üvegen	0,24±0,08	0,19±0,02	0,27±0,03	0,13±0,01
fa fán	0,35±0,02	–	0,37±0,01	–
fa papíron	0,41±0,03	–	0,44±0,01	–

és megvalósítani. Tapasztalataink is azt mutatják, hogy az érdeklődésfelkeltés, a tudás, a megértés és a készségek kialakulása könnyebben elérhető ilyen gyakorlati munkák segítségével.

## Irodalom

- Budó Ágoston: *Kísérleti Fizika I.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- Szalay Béla: *Fizika.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982.
- <https://en.wikipedia.org/wiki/Friction>
- Juhász A.: *Fizikai kísérletek gyűjteménye 1.* Typotex Kiadó, Budapest, 1996.
- Halász Tibor: *Fizika 7.* Mozaik kiadó, Szeged, 2012.
- Halász Tibor: *Fizika 9.* Mozaik kiadó, Szeged, 2012.
- Halász Tibor: *FIZIKA 11–12.* Mozaik kiadó, Szeged, 2011.
- <http://www.tribology-abc.com/abc/friction.htm>
- [http://www.sensitronics.com/pdf/Sensitronics\\_FSR\\_101.pdf](http://www.sensitronics.com/pdf/Sensitronics_FSR_101.pdf)
- <https://www.generationrobots.com/media/FSR400-Series-Integration-Guide.pdf>
- <https://www.sparkfun.com/datasheets/Sensors/Pressure/fsrguide.pdf>
- <https://www.adafruit.com/product/519>
- <https://www.amazon.com/Adafruit-Conductive-Rubber-Stretch-Sensor/dp/B00NAY2R9A>
- <http://www.bc-robotics.com/shop/conductive-rubber-cord>
- <https://www.kiwi-electronics.nl/conductive-rubber-cord-stretch-sensor?lang=en>
- <https://store.mansteri.com/fi/conductive-rubber-cord-stretch-sensor-extras.html>
- <https://www.arduino.cc/>
- <https://cdn.instructables.com/ORIG/FQY/RHST/HMVJ7U24/FQYRHSTHMVJ7U24.pdf>
- <http://phys.ubbcluj.ro/~alpar.simon/friction.ino>
- [http://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d\\_778.html](http://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d_778.html)
- David R. Lide (ed.): *CRC Handbook of Chemistry and Physics.* 85<sup>th</sup> Edition, CRC Press (2004) 15–51.

