GONDOLATOK AZ EÖTVÖS-VERSENY 1. PÉLDÁJÁRÓL

2. rész: a teljes mozgás numerikus megoldása

Tichy Géza – ELTE Anyagfizikai tanszék
Vankó Péter – BME Fizika tanszék
Vigh Máté – ELTE Komplex Rendszerek Fizikája tanszék

Súrlódás

A 2016. évi Eötvös-verseny első példája a súrlódási erőn alapult. A súrlódási erő a fizikaoktatás egyik elég zavaros pontja, nemcsak a középiskolákban, hanem az egyetemeken is. Ez egy olyan erő, amit nem lehet olyan szép képletben megfogalmazni, mint a Coulomb-erőt vagy a Newton-féle gravitációs erőt. Még olyan alakban sem, mint a Stokes-féle erőt, pedig az is disszipatív.

Úgy tanuljuk, hogy a súrlódási erő nem függ sem a sebességtől, sem a felület alakjától vagy nagyságától. Ha ez abszolút igaz lenne, akkor sem síelni, sem korcsolyázni nem lehetne. Nem terveznének széles, bonyolult mintázatú autógumikat, nem lenne ilyen gazdag ismeretvilágunk. Mindezek ellenére a súrlódási törvény – ahogy tanuljuk – sok helyen alkalmazható.

A gyakorlati életben jó közelítés, ha feltesszük, hogy van egy tapadási és egy csúszási súrlódási együttható. Ameddig a felülettel párhuzamos erő nem éri el a nyomóerő és a tapadási együttható szorzatát, addig a két felület nem mozdul egymáshoz képest, azaz a két felület összetapad. Ha ennél nagyobb vízszintes erővel húzunk, akkor a tapadás enged, és a két felület elmozdul egymáson, fellép egy csúszási súrlódási erő, amely a relatív elmozdulás irányába esik és a felületek elmozdulását fékezi.

A tapadási súrlódási együttható mindig nagyobb, mint a csúszási, ami azt okozza, hogy a csúszási erő a sebességgel csökken. Ez a csökkenés gyakran instabilitáshoz vezethet, a legtöbb esetben ez okozza a recsegő, csikorgó hangokat, a kréta csikorgását is, de szintén ez okozza a hegedű élvezetes hangját.

A tapadás mögött általában a két felület közötti adhéziót véljük felfedezni, azaz a két felületet valójában a molekuláris erők kötik össze. A mozgási súrlódás a felület rücskösségével magyarázható, egyrészt olyanmód, hogy az egyenetlenségek miatt a felületeknek néha távolodniuk kell, és amikor újra közelednek, akkor a rugalmatlan ütközéssel elveszítik mozgási energiájukat, vagy másrészt az energia azáltal vész el, hogy a felület az egyenlőtlenség következtében képlékenyen deformálódik. Az utóbbi eset fordul elő az autó fékezésekor, amikor a gumi felkenődik az aszfaltra.

Elég érdes felületeknél nincs tapadás, ekkor a két súrlódási együttható (a tapadási és a csúszási) megegyezik. A legtöbb fizikapéldában ez a helyzet áll elő.

A tapadás nélküli súrlódási erőt a következő, ismert matematikai formulával írjuk le:

$$\boldsymbol{F}_{súrl} = -\mu\, N_{nyom} \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}, \quad \text{ha } |\boldsymbol{v}| \neq 0 \text{ és}$$
$$|\boldsymbol{F}_{súrl}| < \mu\, N_{nyom}, \quad \text{ha } |\boldsymbol{v}| = 0. \tag{17}$$

Amikor a húzás ereje nagyobb, mint a μN_{nyom} súrlódási határ, akkor a test csúszik a felületen. Az érdekesebb eset az, amikor az erő ennél kisebb. Ha a testnek volt sebessége, akkor az erőkülönbséggel fékeződik a test, amíg meg nem áll. Ha megállt, akkor a súrlódási erő pont akkora, hogy a testre eredő erő ne hasson, azaz ne gyorsuljon, és a test nyugalomban marad.

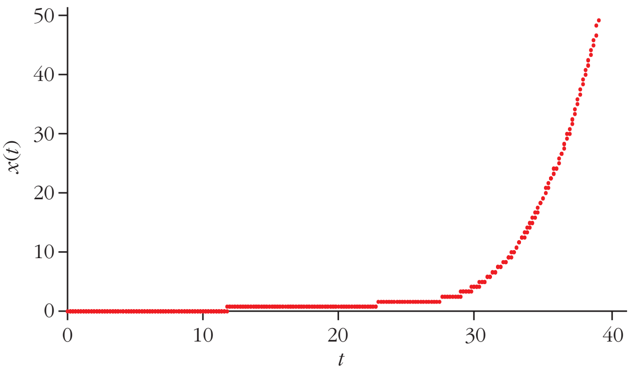
Amikor numerikusan oldunk meg egy dinamikai problémát, akkor hogyan célszerű ezt a bonyolult erőtörvényt a programba beírni? Legyen egy egyszerű, egydimenziós mozgásegyenletünk, ahol a súrlódási erőt a súrlódási határ nélkül írjuk be, és egy időtől függő erővel húzzuk a testet.

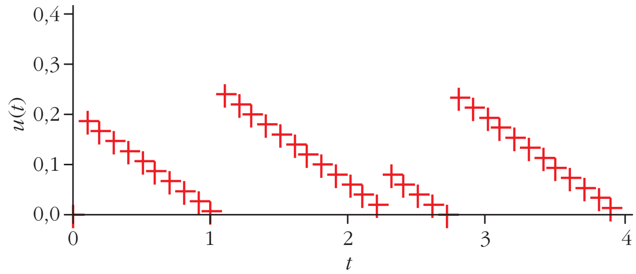
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\mu\, m\, g \frac{v}{|v|} + F(t). \tag{18}$$

Az *1. ábra* e rendszer elmozdulás-idő grafikonját adja meg lineárisan növekvő, időfüggő erővel. E numerikus számolásban az erő nulla értéktől indul és 25-ös időegységnél éri el a súrlódási határértéket. Az ábrán látszik, hogy csak ekkor kezd elmozdulni a test, és ezután egyre gyorsabban és gyorsabban csúszik.

A numerikus számolás anélkül is „tudta”, hogy a testnek nem kell elmozdulnia, hogy a program tartalmazná az egyenlőtlenségi feltételt. Ugyanis, ha az erő

1. ábra. Egy súrlódó test út-idő ábrázolása. Az erő nullától lineárisan nő és 25 időegységnél éri el a súrlódási határt.





2. ábra. A sebesség időfüggése az előző megoldás elején.

gyorsítani kezdi a testet, akkor a sebesség kicsit megnő, ám ezt a súrlódási erő mindaddig leállítja, amíg az erő nem nagyobb a csúszás határértékénél. Ez jól látszik a *2. ábrán,* ahol a folyamat legelején – amikor a test még nem mozdul el – az idő függvényében nagy nagyításban ábrázoltuk sebességet.

A versenypélda numerikus megoldása

Az eredeti feladathoz visszatérve, a numerikus megoldás most már kézenfekvő. Felírjuk Newton második törvényét vektorokkal. Az $\boldsymbol{R}(t)$, $\boldsymbol{V}(t)$ és $\boldsymbol{A}(t)$ függvény a rajztábla mozgásának hely-, sebesség- és gyorsulásvektorát írja le. A súrlódás a mozgó rajztábla és a test között lép fel, ezért a súrlódási erő képletében a relatív sebességet kell figyelembe vennünk.

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\mu\, m\, g\, \frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}(t)}{|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}(t)|}. \tag{19}$$

Ezt az egyenletet a differenciálegyenletek numerikus megoldására kidolgozott Runge–Kutta-módszerrel oldottuk meg. Itt most azt a megoldást mutatjuk be, amelynek kezdeti feltétele, hogy a test kezdetben az origóban, nyugalomban volt. A *3. ábra* az inerciarendszerbeli megoldást, a *4. ábra* a rajztábla mozgó, azaz gyorsuló rendszerében lévő pályát mutatja. Az állandósult megoldás hamar beáll, alig telik le egy teljes periódus. A két görbe összehasonlításából jól látszik a két mozgás közötti fázisszög, és a két kör sugarának különbözősége.

Hátra van még az a kérdés, hogy az állandósult megoldás stabil-e, azaz ha megzavarjuk a mozgást, visszatér-e a rendszer az állandósult megoldáshoz, és ugyanahhoz az állandósult megoldáshoz tér-e vissza?

A stabilitás vizsgálata

A (19) mozgásegyenlet egy nemlineáris differenciálegyenlet, amelyben két függvény, a sebesség két komponense az ismeretlen. A stabilitási feltételeket a linearizált egyenletből tudjuk kiolvasni. Mielőtt elvégeznénk a linearizálás műveletét, vezessük be a

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}(t) \tag{20}$$

relatív sebességet. Ezzel a transzformációval az inerciarendszerből a rajztábla rendszerébe térünk át. Ekkor a mozgásegyenlet:

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = -\mu\, m\, g\, \frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} + m\boldsymbol{A}(t). \tag{21}$$

Az állandósult megoldás legyen az előző cikkben meghatározott $\boldsymbol{u}_0$. Ez a megoldás kielégíti a (21) egyenletet. Most egy kis perturbációt (azaz zavart) adjunk hozzá, és így megoldásunkat $\boldsymbol{u}_0+\delta\boldsymbol{u}$ alakban keressük. A perturbáció kicsi, ezért linearizált egyenletet írunk fel reá. Ez az egyenlet:

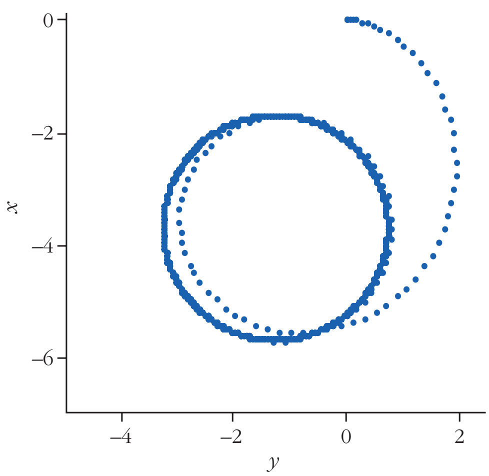
$$m\frac{\mathrm{d}\delta\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = -\mu\, m\, g\, \frac{1}{|\boldsymbol{u}_0|}\left[\delta\boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{u}_0\,\delta\boldsymbol{u})}{|\boldsymbol{u}_0|^2}\right].$$

Az állandósult megoldás következtében $|\boldsymbol{u}_0| = \rho\,\omega$ egy időtől nem függő állandó.

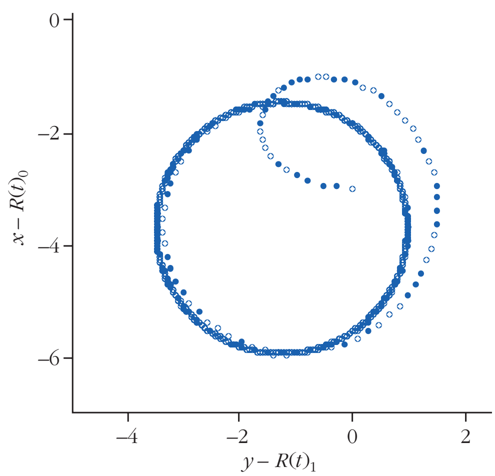
Vizsgáljuk meg azt a két esetet, amikor a zavar sebességirányú, azaz a sebesség nagyságát növeljük, és amikor a zavar merőleges a sebességre, azaz a sebesség irányát változtatjuk. Amikor a perturbáció merőleges a sebességre, akkor ezen egyenletnek exponenciálisan lecsengő megoldása van

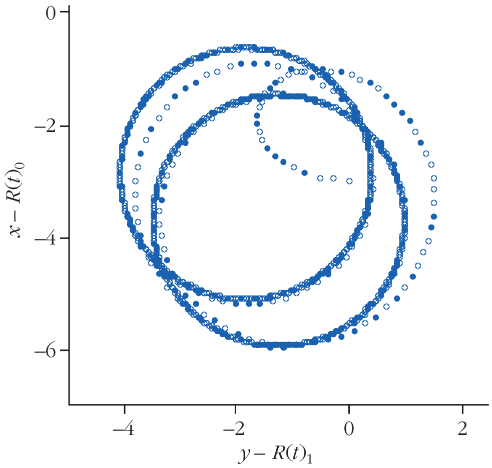
$$\frac{\rho\,\omega}{\mu\, g}$$

3. ábra. Numerikus megoldás az inerciarendszerben.

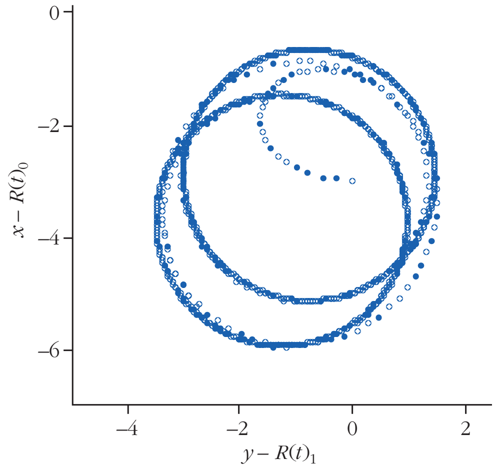


4. ábra. Numerikus megoldás a rajztábla rendszerében.





5. ábra. A perturbált mozgás. A perturbáló sebesség merőleges az állandósult mozgás sebességére.



6. ábra. A perturbált mozgás. A perturbáló sebesség egyirányú az állandósult mozgás sebességével.

időállandóval. A másik eset érdekesebb, mivel amikor a perturbáció párhuzamos a sebességgel, akkor a szögletes zárójelben lévő kifelezés nullát ad, azaz a perturbáció nem cseng le, de nem is növekszik. Ezt marginális stabilitásnak nevezzük. Ekkor nagyobb sebességgel megy a test, mint a stacionárius sebesség, de amikor be kellene fordulnia, nem elég a centripetális erő a körmozgás fenntartásához. Közben az erő iránya, azaz az állandósult sebesség iránya is változik, a perturbáció már nem tisztán egyirányú a sebességgel, a merőleges komponens lecseng, és így egy új állandósult megoldás áll be.

Mivel a párhuzamos módus nem cseng le, a merőleges eset sem olyan egyszerű. Itt is változik az irány, és új állandósult állapot áll be. Az új állandósult állapot azt jelenti, hogy a körmozgás középpontja elvándorolt, a körmozgás többi paramétere változatlan marad.

Ennek igazolására numerikus számolásokat is végeztünk. Kiindulásunk ugyanaz a program, ugyanolyan paraméterekkel, aminek megoldása a *4. ábrán* látható. Amikor már beállt az állandósult állapot, az eredeti sebesség ötödével pillanatszerűen megváltoztattuk a sebességet. Az *5. ábrán* azt látjuk, amikor a hozzáadott sebesség merőleges, a *6. ábrán,* amikor az eredeti sebességgel párhuzamos. Mindkét esetben a kör eltolódik, de az eltolódás a két esetben más és más irányú. Az ábrából az is leolvasható, hogy az új állandósult állapotok eléréséhez kevés idő is elegendő.

Ha kísérletileg megvalósítjuk a feladatot, akkor jól láthatjuk a stacionárius megoldást. Hosszabb ideig figyelve, észrevehetjük, hogy a körpálya középpontja szép lassan vándorol. Ez annak következménye, hogy nagyon nehéz olyan egyenletes felületet készíteni, ahol a súrlódási együttható mindenütt ugyanaz. Helyről-helyre egy kicsit változik. Ezek az inhomogenitások mind egy kis zavart, perturbációt jelentenek, és ez okozza a középpont vándorlását. Ez azonban nem változtatja meg az eredeti feladat megoldását: az valóban egy körmozgás (a táblához és az inerciarendszerhez képest is), amelynek középpontja esetleg kicsit elmozdul, de sugara (jó közelítéssel) állandó marad.