KI MAGYARÁZTA ELŐSZÖR AZ EGYENSÚLY FELÉ TÖREKVÉST?

Gyenis Balázs
MTA BTK Filozófiai Intézet

Két gázt összekeverve hőmérsékletük kiegyenlítődik. A fizika tankönyvek ugyan meglehetősen szűkszavúak szoktak lenni tudományuk történetét illetően, ám nem ismerek olyan statisztikus mechanika tankönyvet, amely ne említené *Ludwig Boltzmann* H-tételét, mint az első mechanikai magyarázatot az egyensúly felé törekvés ezen jelenségére, „megnyitva a kaput a makroszkopikus világ molekuláris dinamikai alapokon nyugvó megértése felé”.[1] A fizikusokon túl a fizikatörténész szakma is egyetért abban, hogy Boltzmann volt az első, aki „molekuláris alapokat nyújtott a fizikai rendszerek egyensúly felé való természetes törekvésének és egyensúlyban maradásának”[2] magyarázatához. Boltzmann prioritása több, mint esetleges történeti állítás: a fizikán túlnyúló tudománytörténeti folklór része.

A folklór azonban gyakran téved; e rövid cikk arra hívja fel a figyelmet, hogy Boltzmann helyett *James Clerk Maxwellt* illeti az elsőbbség. Maxwell 1860-os *Illustrations of the Dynamical Theory of Gases* című cikkében [4] kezdett el foglalkozni a kinetikus gázok elméletével, és cikkének VI. állítása (*1. ábra*) bizonyítást ad a keveredő gázok hőmérsékletének kiegyenlítődésére, legalább hat évvel megelőzve Boltzmann első próbálkozását. Maxwell jóindulatúan rekonstruált bizonyítása ráadásul elegánsabb és egyszerűsége folytán beemelhető lenne akár a középiskolai szintű fizikaoktatásba is, ezért tudománytörténeti jelentőségétől függetlenül is érdemes megismerkedni vele.

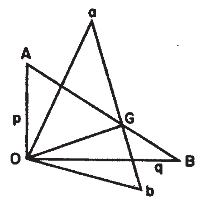
Az *Illustrations* egy gáz részecskéit kiterjedéssel és tömeggel rendelkező, egymással tökéletesen rugalmas módon ütköző gömbökként modellezi, és amellett érvel, hogy az ilyen módon felfogott gáz hőmérséklete arányos részecskéi átlagos mozgási energiájával. Az *Illustrations* VI. állításának célja annak megmutatása, hogy két gáz összekeverése után a részecskéik közötti ütközések a gázok átlagos mozgási energiája közötti kezdeti különbség csökkenéséhez, illetve eltűnéséhez, vagyis az összekevert gázok hőmérsékletének kiegyenlítődéséhez vezetnek.

A szerző munkáját az NKFIA K 115593 programja támogatta. A cikk tartalmi átfedésben van a szerző *Maxwell's „H-theorem”* című, angol nyelvű, jelenleg bírálat alatt álló cikkével.

Gyenis Balázs tudományfilozófus, az MTA BTK Filozófiai Intézetének tudományos munkatársa. Tudománytörténet és tudományfilozófia Ph.D. fokozatát, valamint fizikus és filozófus mesterfokozatait a Pittsburghi Egyetemen szerezte. Fő kutatási területei: a fizika filozófiája, formális episztemológia és általános tudományfilozófia.

Prop. VI. Two systems of particles move in the same vessel; to prove that the mean *vis viva* of each particle will become the same in the two systems.

Let P be the mass of each particle of the first system, Q that of each particle of the second. Let p, q be the mean velocities in the two systems before impact, and let p', q' be the mean velocities after one impact. Let $OA = p$ and $OB = q$, and let AOB be a right angle; then, by Prop. V., AB will be the mean relative velocity, OG will be



the mean velocity of the centre of gravity; and drawing aGb at right angles to OG, and making $aG = AG$ and $bG = BG$, then Oa will be the mean velocity of P after impact, compounded of OG and Ga, and Ob will be that of Q after impact.

Now $$AB = \sqrt{p^2 + q^2},\quad AG = \frac{Q}{P+Q}\sqrt{p^2+q^2},$$

$$BG = \frac{P}{P+Q}\sqrt{p^2+q^2},\quad OG = \frac{\sqrt{P^2p^2 + Q^2q^2}}{P+Q},$$

therefore $$p' = Oa = \frac{\sqrt{Q^2(p^2+q^2) + P^2p^2 + Q^2q^2}}{P+Q},$$

and $$p' = Ob = \frac{\sqrt{P^2(p^2+q^2) + P^2p^2 + Q^2q^2}}{P+Q},$$

and $$Pp'^2 - Qq'^2 = \left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)^2 (Pp^2 - Qq^2). \tag{6}$$

It appears therefore that the quantity $Pp^2 - Qq^2$ is diminished at every impact in the same ratio, so that after many impacts it will vanish, and then

$$Pp^2 = Qq^2.$$

Now the mean *vis viva* is $\frac{3}{2}P\alpha^2 = (3\pi/8)Pp^2$ for P, and $(3\pi/8)Qq^2$ for Q; and it is manifest that these quantities will be equal when $Pp^2 = Qq^2$.

If any number of different kinds of particles, having masses P, Q, R and velocities p, q, r respectively, move in the same vessel, then after many impacts

$$Pp^2 = Qq^2 = Rr^2, \text{\&c.} \tag{7}$$

1. ábra. A VI. állítás Maxwell 1860-as cikkében.

Először a VI. állítás bizonyításának jóindulatú és kortárs jelölésrendszert alkalmazó rekonstrukcióját adjuk

[1] A széles körben használt [1] nyitó Boltzmann portréja alatt található mondata talán a könyv *egyetlen* tudománytörténeti állítása.

[2] Az idézet forrása egy másik klasszikus, [2] (3. o.). A téma egy kiváló tudománytörténeti áttekintéshez és referenciákhoz lásd: [3].

meg, majd történeti megjegyzéseket teszünk a rekonstrukció és a Maxwell által ténylegesen leírtak közötti kapcsolatra. A rekonstruált bizonyításhoz először kiszámoljuk két részecske ütközés utáni mozgási energiájának különbségét, majd az összes ütköző részecskepárra összegzünk. Az ütközés előtti mennyiségeket vesszőtlen, az ütközés utáni mennyiségeket vesszős változókkal jelöljük, és – az egyszerűség kedvéért – először tegyük fel, hogy a két gáz minden részecskéje azonos, m tömeggel rendelkezik. Két részecske ütközés utáni mozgási energiájának különbségét rövid számolás után

$$\left(\frac{m\,v_f'^2}{2}-\frac{m\,V_b'^2}{2}\right)=2\,m\,r_f\boldsymbol{v}_{CM}\hat{\boldsymbol{r}}_f' \tag{1}$$

alakban írhatjuk fel. A jobb oldalon található $\boldsymbol{v}_{CM}$ az f és a b részecske tömegközéppontjának sebessége, és

$$\hat{\boldsymbol{r}}_f' = \frac{1}{r_f'}\boldsymbol{r}_f' \tag{2}$$

az f részecske ütközés utáni, a tömegközponttól vett relatív, $\boldsymbol{r}_f' = \boldsymbol{v}_f' - \boldsymbol{v}_{CM}$ sebességének iránya.

A bizonyítás második lépésének kulcsa az a feltételezés, hogy sok hasonló részecskepár ütközése esetén az ütközés utáni relatív sebesség minden iránya nagyjából azonos gyakorisággal fordul elő, ekkor ugyanis az összegzéskor az ellentétes ütközés utáni irányokra az egyenletek jobb oldalai kiejtik egymást, és így az átlagos mozgási energiák különbsége az ütközések után eltűnik. Egy kicsit formálisabban: írjunk $(f, b) \in I^{\Delta t}_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{V}}$-t pontosan akkor, ha f az összekevert „forró”, b a „hideg” gáz egy-egy részecskéje amelyek Δt időtartam alatt ütköznek egymással úgy, hogy f ütközés előtti sebessége $\boldsymbol{v}$ és b ütközés előtti sebessége $\boldsymbol{V}$. Tegyük fel, hogy csak páronkénti ütközések lehetségesek, és hogy Δt elég rövid ahhoz, hogy alatta a részecskék legfeljebb egy ütközésben vegyenek részt, ám elég hosszú ahhoz, hogy alatta az ütköző, $I^{\Delta t}_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{V}}$-ben lévő részecskepárokra minden lehetséges ütközés utáni $\hat{\boldsymbol{r}}_f'$ irány nagyjából azonos gyakorisággal forduljon elő. Ekkor

$$\sum_{(f,\,b)\,\in\,I^{\Delta t}_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{V}}} \frac{m\,v_f'^2}{2}-\frac{m\,V_b'^2}{2} \approx 0, \tag{3}$$

hiszen rögzített $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{V}$-re (és ezáltal rögzített r_f-re és $\boldsymbol{v}_{CM}$-re) az összeadott (1) egyenletek jobb oldali tagjai kiejtik egymást, amikor ellentétes $\hat{\boldsymbol{r}}_f'$ iránnyal rendelkező ütközések hatását adjuk össze! Tovább összegezve minden lehetséges ütközés előtti $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{V})$ sebességpárra számot adunk minden Δt alatti ütközésről, így az ütközések számával osztva

$$\overline{\frac{m\,v'^2}{2}}-\overline{\frac{m\,V'^2}{2}} \approx 0 \tag{4}$$

eredményt kapjuk, amely szerint a „forró” és „hideg” gáz egymással ütköző részecskéi közötti kezdeti átlagos mozgásienergia-különbség eltűnik!

Ha a „forró” és a „hideg” gáz részecskéi különböző tömeggel rendelkeznek, akkor (1) helyett

$$\begin{aligned}\frac{m\,v_f'^2}{2}-\frac{M\,V_b'^2}{2} = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2\left(\frac{m\,v_f^2}{2}-\frac{M\,V_b^2}{2}\right)+\\ +\;2\,\frac{m\,M\,(m-M)}{(m+M)^2}\,\boldsymbol{v}_f\,\boldsymbol{V}_b+\\ +\;2\,m\,r_f\,\boldsymbol{v}_{CM}\,\hat{\boldsymbol{r}}_f'\end{aligned} \tag{5}$$

egyenlethez jutunk.[3] Innen első lépésben $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{V}$ rögzítésével megismételjük a korábbi összegzést az egyenlet jobb oldali harmadik tagjainak kiejtéséhez, majd – azzal a további feltevéssel élve, hogy sok részecske ütközésénél az ütközés előtti sebességek irányainak eloszlása is nagyjából egyenletes – második lépésben a v, V magnitúdók rögzítésével tovább összegzünk minden lehetséges ütközés előtti sebesség*irányra,* ezáltal kiejtve az egyenlet jobb oldali második tagjait. Harmadik lépésként minden lehetséges v, V magnitúdóra összegezve és az ütközések számával osztva (4) helyett

$$\overline{\frac{m\,v'^2}{2}}-\overline{\frac{M\,V'^2}{2}} \approx \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2\left(\overline{\frac{m\,v^2}{2}}-\overline{\frac{M\,V^2}{2}}\right) \tag{6}$$

eredményre jutunk, amely szerint a „forró” és „hideg” gáz egymással ütköző részecskéi közötti kezdeti átlagos mozgásienergia-különbség csökken. Mivel a két – forró és hideg – gáz saját részecskéi közötti ütközések, illetve az edény falával történő ütközések nem befolyásolják a két gáz átlagos mozgási energiája közötti különbséget, ha az összes részecskére számolt

$$\overline{\frac{m\,v^2}{2}}-\overline{\frac{M\,V^2}{2}} \tag{7}$$

előjele megegyezik az ütköző részecskepárokra számolt (6) előjelével, akkor a két gáz kezdeti hőmérséklet-különbsége az ütközések után csökken.[4]

Az *Illustrations* VI. állításában a (6) eredményként értelmezett egyenlet levezetése után Maxwell arra a következtetésre jut, hogy ha az ütközések sokáig folytatódnak, akkor a két gáz hőmérséklete kiegyenlítődik. Maxwell érvelése egyszerű, elegáns, és több szempontból is vonzó – azon túl, hogy statisztikus jellegű, nincs hozzá szükség a statisztikus fizika későbbi fejlődése során gyakran felbukkanó, a fázistéren értelmezett absztrakt és gyanús eredetű, *a priori* valószínűség-eloszlás feltételezésére sem. A bizonyítás fő feltevését – tudniillik, hogy minden

[3] Megjegyzések: $\boldsymbol{v}'_{CM} = \boldsymbol{v}_{CM}$ a lendületmegmaradás miatt; $r_f' = |\boldsymbol{r}_f'| = |\boldsymbol{r}_f| = r_f$, mert az ütközések tökéletesen rugalmasak; $2\,m\,r_f\boldsymbol{v}_{CM}\hat{\boldsymbol{r}}_f' = -2\,M R_b\,\boldsymbol{v}_{CM}\hat{\boldsymbol{R}}_b' = (m\,r_f + M R_b)\,v_{CM}\cos\gamma$, ahol $\gamma \doteq \angle(\boldsymbol{v}_{CM}, \boldsymbol{r}_f)$. A számoláshoz lásd [5] függelékét.

[4] Minél nagyobb a „forró” és a „hideg” gáz közötti kezdeti hőmérséklet-különbség, annál nagyobb az esély arra, hogy a két előjel megegyezik, ha Δt alatt ütköző részecskepárok halmaza véletlen mintának tekinthető. Ha az ütközések előtti hőmérséklet-különbség elenyésző, akkor a két mennyiség előjele az esetek közel felében egyezik csak meg és így az ütközések kicsi hőmérséklet-ingadozáshoz vezetnek. Ez jól mutatja a bizonyítás statisztikus jellegét.

ütközés utáni relatív sebesség irány nagyjából azonos gyakorisággal fordul elő – Maxwell II. állításában (*2. ábra*) megpróbálta alátámasztani annak megmutatásával, hogy ez következménye azon természetesnek tűnő feltevésnek, hogy az ütközés utáni relatívsebesség-irányt meghatározó ütközési paraméter nagyjából egyenletesen oszlik el az ütközési körlemezen.

A fent rekonstruált érvelés – természetesen – a legjobb esetben is hiányos, hiszen ahogyan erre *Johann Josef Loschmidt* jól ismert megfordíthatósági ellenvetése rögtön rámutat, az érvelés implicit valószínűségi függetlenségi feltevéseit nehéz összeegyeztetni a mozgásegyenletek által meghatározott dinamikával, akármenynyire is természetesnek tűnnek. Ebből a szemszögből nézve azonban az érvelés nem rosszabb, mint Boltzmann H-tétele, amely szintén hasonló implicit valószínűségi függetlenségi feltevésekkel él, és szintén elvérzik a megfordíthatósági ellenvetésen.[5] Hogyan lehetséges akkor, hogy a fizikatörténészek eddig figyelmen kívül hagyták Maxwell VI. állítását, és nem ismerték el Maxwell prioritását az egyensúly felé törekvés első mechanikai magyarázatának megadásában?

A válasz abban rejlik, hogy Maxwell első olvasatra meglehetősen obskúrus módon jut el a (6)-ként értelmezett egyenletéhez. A tömör bizonyítás azt a látszatot kelti, mintha Maxwell nagyon speciálisan ütköző részecskepárok mozgási energiái közötti különbséget számolná ki: úgy tűnik, hogy egyrészt feltételezi, hogy a visszaütközési $\angle(\boldsymbol{v}_{CM}, \boldsymbol{r}_f)$ szög derékszög, másrészt feltételezi, hogy az ütközés előtti sebességek $\angle(\boldsymbol{v}_f, \boldsymbol{V}_b)$ szöge derékszög. Nyilvánvaló, hogy ilyen speciális ütközésekből levezetett eredmény alapján nem lehet következtetni az összes ütközés nyomán kialakuló átlagos mozgásienergia-különbség változásra. Emiatt még azon tudománytörténészek is, akik futtában megemlítik Maxwell VI. állítását, „elképesztőnek” találják, hogy a máskülönben zseniális Maxwell, vagy „bármely kortársa, aki vette a fáradságot az érv vizsgálatára, az érvet elfogadta volna” [6] (344. o.).

Az (5)-ös egyenletre pillantva azonban nyilvánvaló, hogy az első összegzés, amelynek során kiejtettük az egyenlet jobb oldalának harmadik tagjait, matematikailag ugyanazt az eredményt adja, mintha a visszaütközési $\angle(\boldsymbol{v}_{CM}, \boldsymbol{r}_f)$ szöget derékszögnek választanánk, és a második összegzés, amelynek során kiejtettük az egyenlet jobb oldalának második tagjait, matematikailag ugyanazt az eredményt adja, mintha az ütközés előtti sebességek $\angle(\boldsymbol{v}_f, \boldsymbol{V}_b)$ szögét derékszögnek választanánk. Ha jóindulatúan feltételezzük, hogy Maxwell speciálisan elrendezett ütközései csak geometriailag intuitív helyettesítői a fent rekonstruált érvelés kiejtési lépéseinek (amelyekhez az *Illustrations* korábbi részeiben Maxwell alapos előkészületeket tesz), akkor Maxwell így rekonstruált VI. állítása rövid, ám a kor bizonyítási sztenderdjeinek megfelelő, meggyőző bizonyításává válik az egyensúly felé törekvésnek.[6]

Prop. II. To find the probability of the direction of the velocity after impact lying between given limits.

In order that a collision may take place, the line of motion of one of the balls must pass the centre of the other at a distance less than the sum of their radii; that is, it must pass through a circle whose centre is that of the other ball, and radius (*s*) the sum of the radii of the balls. Within this circle every position is equally probable, and therefore the probability of the distance from the centre being between *r* and *r* + *dr* is

$$\frac{2rdr}{s^2}.$$

Now let ϕ be the angle *APa* between the original direction and the direction after impact, than $APN = \frac{1}{2}\phi$, and $r = s \sin \frac{1}{2}\phi$, and the probability becomes

$$\tfrac{1}{2} \sin \phi d\phi.$$

The area of a spherical zone between the angles of polar distance ϕ and $\phi + d\phi$ is

$$2\pi \sin \phi d\phi;$$

therefore if ω be any small area on the surface of a sphere, radius unity, the probability of the direction of rebound passing through this area is

$$\frac{\omega}{4\pi};$$

so that the probability is independent of ϕ, that is, all directions of rebound are equally likely.

2. ábra. A II. állítás Maxwell 1860-as cikkében.

Irodalom

1. Huang, K.: *Statistical Mechanics.* John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 1987.
2. Pathria, R. K.: *Statistical Mechanics.* Butterworth–Heinemann, Oxford, 1996.
3. Uffink, J.: Compendium of the foundations of classical statistical physics. In J. E. J. Butterfield, J. Earman (eds.): *Philosophy of Physics, Part B of the Handbook of the Philosophy of Science.* Elsevier, The Netherlands, 2007.
4. Maxwell, J. C.: Illustrations of the dynamical theory of gases. *Philosophical Magazine 19, 20* (1860) 19–32, 21–37.
5. Gyenis, B.: Maxwell and the normal distribution: A colored story of probability, independence, and tendency toward equilibrium. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics 57* (2017) 53–65.
6. Brush, S. G.: *The Kind of Motion we call Heat.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1976.

[5] Ahhoz, hogy az idő irányának megfordítására invariáns mikroszkopikus dinamikából valamilyen makroszkopikus szintű irreverzibilitást le lehessen vezetni vagy Maxwell, illetve Boltzmann feltevéseivel analóg valószínűségi függetlenségi feltevésekre, vagy más, a kezdeti értékek eloszlására vonatkozó feltevésre van szükség; a lehetőségek tárgyaláshoz lásd [3].

[6] További tudománytörténeti részletekért lásd [5].

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682
A Társulat Internet honlapja http://www.elft.hu, e-postacíme: elft@elft.hu
Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős kiadó Groma István főtitkár, felelős szerkesztő Lendvai János főszerkesztő.
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.
Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Attila ügyvezető igazgató.
Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszámlán.
Megjelenik havonta (nyáron duplaszámmal), egyes szám ára: 900.- Ft (duplaszámé 1800.- Ft) + postaköltség.
HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és **HU ISSN 1588–0540** (online)