

A 2016. ÉVI FIZIKAI NOBEL-DÍJ

– Hogyan kerül a topológia a szilárdtest-fizikába?

Asbóth János – MTA Wigner FK SZFI

Iglói Ferenc – MTA Wigner FK SZFI és SZTE Elm. Fiz. Tsz.

A díjazottak

A Svéd Királyi Tudományos Akadémia a 2016. évi Nobel-díjat *David J. Thouless*-nek, *F. Duncan M. Haldane*-nek és *J. Michael Kosterlitz*-nek ítélte oda „A topológiai fázisátalakulással és az anyag topológiai fázisaival kapcsolatos elméleti felfedezéseiért”. A díjazott eredmények a múlt század 70-es, 80-as éveiben születtek és közvetlenül öt tudományos közleményhez kapcsolhatók [1–3, 5, 6]. Ezen eredmények közvetve az anyag szerkezetével kapcsolatos alapvető elképzeléseinket tágították ki, amely paradigmaváltáshoz vezetett a szilárdtest-fizikában és az anyagtudományban. A jelenkor hangsúlyozottan fontos kutatási területei közé tartoznak az anyag topologikus fázisainak és az azokkal kapcsolatos fázisátalakulások vizsgálata. A topologikus szigetelők és a topologikus szupravezetők kísérleti és elméleti szempontból is számos fontos kérdést vetettek és vetnek fel, és ezen vizsgálatok – reményeink szerint – közelebb hoznak a kvantumszámítógépek megvalósításához is.

A három nagy-britanniai születésű és később az USA-ban dolgozó díjazott közül ketten korábbi No-



A 2016. évi fizikai Nobel-díjasok: David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane és J. Michael Kosterlitz.

bel-díjasok tanítványai voltak. Thouless a Cornell Egyetemen 1958-ban *Hans Albrecht Bethe* (1967-es Nobel-díjas) témavezetésével nyerte el PhD címét, míg Haldane témavezetője Cambridge-ben 1978-ban *Philip Warren Anderson* (1977-es Nobel-díjas) volt. Kosterlitz szintén híres laboratóriumban, Oxfordban lett doktor 1969-ben. A díjazottak korábbi elismerései közül érdemes megemlíteni Thouless Wolf-díját (1990) és Dirac-medállját (1993), Kosterlitz és Thouless Lars Onsager-díját (2000) valamint Haldane Dirac-medállját (2012). Ezek alapján is megállapítható, hogy a díjazottak személyét szakterületükön a legnagyobbak között ismerték el.

A Nobel-díj méltatása három eredményt emel ki, amelyeket a következőkben egy-egy alfejezetben részletesebben ismertetünk. Írásunk végén egy kitekintésben a díjjal kapcsolatos eredményeknek a jelenkor fizikájára gyakorolt hatásáról is szólnunk.

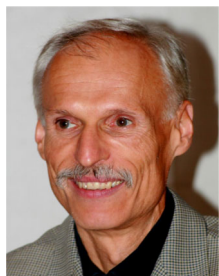
A Kosterlitz–Thouless átalakulás

A későbbiekben Kosterlitz–Thouless (KT) átalakulásnak elnevezett eredmények [1, 2] 1972-ben születtek Birminghamben, ahol Thouless a matematikai fizika professzora volt és Kosterlitz a második posztdoktori alkalmazását töltötte. Ebben az időszakban az elméleti fizikusok érdeklődésének homlokterében a kritikus jelenségek és – a nem sokkal korábban felfedezett – renormálásicoport-módszer különböző alkalmazásai álltak. A KT-átalakuláshoz kapcsolódó vizs-

A szerzőket munkájukban az NKFIH az OTKA K109577, K115959, és NN109651 sz. pályázatok keretében, A. J.-t a Magyar Tudományos Akadémia a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj keretében támogatta. Köszönetet mondunk *Sólyom Jenő*nek a hasznos diszkusszióért.



Asbóth János fizikus, az MTA Wigner FK SZFI tudományos főmunkatársa, a kvantum bolyongás topologikus fázisainak kutatója. A topologikus szigetelőről az ELTE-n és a Genfi Egyetemen tartott kurzust, a témáról *Pályi András*sal és *Oroszlány László*val közösen írt egyetemi jegyzete (*A Short Course on Topological Insulators*) a Springer kiadásában jelent meg idén.



Iglói Ferenc fizikus, az MTA Wigner FK SZFI tudományos tanácsadója, az SZTE Elméleti Fizikai Tanszék egyetemi tanára. Kutatási területe a statisztikus fizika és az elméleti szilárdtest-fizika, különös tekintettel a fázisátalakulások és kritikus jelenségek, rendezetlen klasszikus és kvantum rendszerek, nemegyensúlyi folyamatok vizsgálatára. Több mint 175 tudományos dolgozat szerzője. 2017-től az *Europhysics News Science* Editorja.

gálatokhoz kísérleti motivációt a szuperfolyékonyság, illetve a szupravezetés kétdimenziós, vékony rétegekben mutatott lehetséges viselkedése szolgáltatta. Matematikai szempontból a problémát a klasszikus, kétdimenziós XY-modell írja le, amelyet a

$$\mathcal{H}_{XY} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (1)$$

Hamilton-függvény jellemez, ahol az összegzés az $\langle i,j \rangle$ elsőszomszédpárookra történik. Az itt szereplő $0 \leq \theta_i < 2\pi$ változó jelentheti egy \vec{S}_i síkbeli vektorhoz tartozó szöveget, vagy szuperfolyékonyság esetén a szuperfolyadék

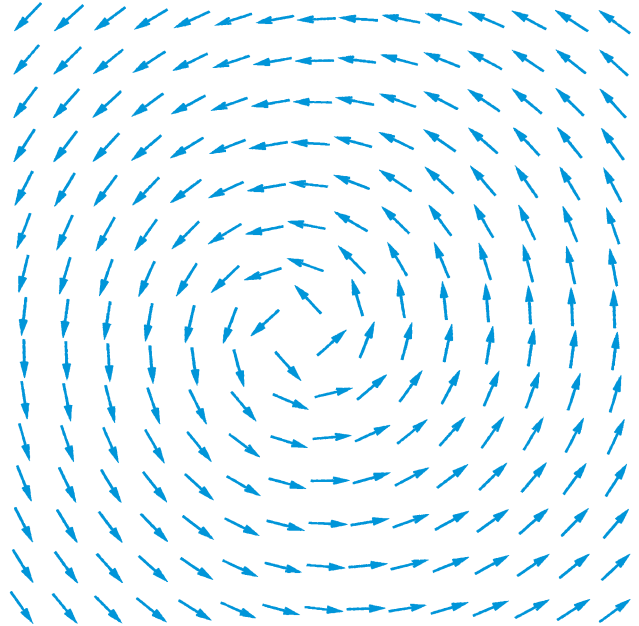
$$\Psi = \sqrt{\rho_s} e^{i\theta} \quad (2)$$

hullámfüggvényének fázisát, ahol ρ_s a szuperfolyadék sűrűségét jelöli. Az univerzalitás elvének megfelelően ezen két rendszer azonos univerzalitási osztályba tartozik. Az XY-modell esetén ismert volt egy egzakt eredmény, az úgynevezett Mermin–Wagner-tétel [7], amely szerint véges $T > 0$ hőmérsékleten nincs hosszútávú rend, mert az $\langle \vec{S}(0) \vec{S}(\vec{r}) \rangle$ korrelációs függvény nagy r esetén nullához tart.¹ Ennek ellentmondani látszottak a rendszeren számolt különböző numerikus eredmények, amelyek valamilyen fázisátalakulás jelenlétét mutatták. Közelítő, analitikus eredmény is ismert volt. Amennyiben az (1) egyenletet folytonos közelítésben írjuk fel:

$$\mathcal{H}_{XY} = \frac{J}{2} \int d^2r (\nabla \theta(\vec{r}))^2, \quad (3)$$

továbbá a szögváltozó értelmezési tartományát a $-\infty < \theta < \infty$ módon kiterjesztjük, akkor egy szabad, gausz-

¹ A rendezett fázis hiányát a következő energia-entrópia érveléssel lehet érzékeltetni. Először tekintsük a klasszikus Ising-modellt, amelynek Hamilton-függvénye $\mathcal{H}_I = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j$ alakú, $J > 0$ és $\sigma_i = \pm 1$ diszkrét spinváltozó. Egydimenzióban, a Landau-nak tulajdonított érvelés szerint, a rendezett fázist (+++...+) megtörő doménfal típusú gerjesztés (+++...+---...-) energiája $\epsilon = 2J$, míg entrópiája $s \approx k_B \ln L$, mivel egy L hosszúságú láncon $\approx L$ helyre lehet a doménfalat elhelyezni. A gerjesztéssel kapcsolatos szabadenergia-változás: $f = \epsilon - Ts \approx 2J - Tk_B \ln L$ minden véges T hőmérsékleten negatív, ezért a termikus fluktuációk doménfalakat keltenek a rendszerben és ezzel megszűnik a ferromágneses rend. Két dimenzióban, Peierls általánosítása szerint, egy ferromágneses (például +++...+) tengerben keltett, L kerületű, ellentétesen (---...-) mágnesezett domén gerjesztési energiája a kerület hosszával arányos: $\epsilon = 2JL$. Az L kerületű doménfalak lehetséges számát egy L lépéses bolyongás lehetséges kimeneteleivel becsüljük meg. Négyzetácsot tekintve egy bejövő lépés után tipikusan 3 különböző irányban folytatódhat a bolyongás, amely így (nem több mint) $\sim 3^L$ lehetőséget ad. Innen az entrópia $s \approx k_B L \ln 3$, a szabadenergia pedig $f \approx 2JL - Tk_B L \ln 3$. Láthatóan $T < T_c \approx 2J / \ln 3 k_B$ esetén nagy doménfalakat nem lehet termikus fluktuációkkal keltetni és a kétdimenziós Ising-modell a ferromágneses fázisában van. Folytonos szimmetriájú rendparaméter esetén, miként az (1) egyenlettel adott XY-modellnél a hasonló energia-entrópia érvelésnél a doménfal energiája akkor lesz minimális, ha a doménfal kiterjedt, mondjuk $\ell \sim L$ rácshelyet foglal el és két szomszédos rácshely között $\Delta\theta \sim 1/\ell$ szöggel fordul el a spin. Egy spinpár esetén az energiajárulék $\Delta\epsilon \sim (\Delta\theta)^2 \sim 1/\ell^2$, azaz a teljes doménfal esetén az energiasűrűség $\tilde{\epsilon} \sim 1/\ell \sim 1/L$. Két dimenzióban a doménfal keltése $\epsilon = C(1)$ energiával jár és ez minden véges hőmérsékleten kisebb, mint a $\sim Tk_B L$ entrópiájárulék, következésképpen termikus fluktuációkkal szemben a ferromágneses rend instabil.



1. ábra. Vortexgerjesztés az XY-modellben, a vortexparaméter, $v = 1$.

szos ingadozásokat mutató térelméltre jutunk, ahol a korrelációs függvény értéke:

$$\langle \vec{S}(0) \vec{S}(\vec{r}) \rangle \sim \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{k_B T}{2\pi J}}. \quad (4)$$

Itt a a mikroszkopikus hosszúságskálát jelöli. Ez az eredmény összhangban áll a Mermin–Wagner-tétellel, mivel nagy r esetén valóban eltűnik, viszont nem írja le megfelelően a magashőmérsékleti tartományban tapasztalt exponenciális lecsengést.

A fenti probléma megoldásához Kosterlitz és Thouless észrevette, hogy a szögváltozó periodicitását nem lehet elhagyni, mivel ezzel a vortex-jellegű gerjesztések is eltűnnek a rendszerből. Minden egyes vortexhez egy v vortexparamétert lehet definiálni:

$$v = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\vec{r} \nabla \theta(\vec{r}), \quad (5)$$

ahol C egy, a vortex középpontját megkerülő tetszőleges zárt görbét jelöl. v egy egész szám, amely azt adja meg, hogy hányszor végzett teljes fordulatot a spin, miközben megkerülte a vortextet.

A probléma szempontjából releváns $v = \pm 1$ vortexek esetén $|\nabla \theta(\vec{r})| = 1/r$ és egy izolált vortex energiája:

$$E_v = \frac{J}{2} \int d^2r \left(\frac{1}{r} \right)^2 = J\pi \ln \left(\frac{L}{a} \right), \quad (6)$$

ahol L a rendszer lineáris mérete és az a mikroszkopikus hosszúság a vortex magjának kiterjedését jelöli. A fentiek szerint egy izolált vortex energiája a rendszer méretével divergál és ezért termikus ingadozások során nem keletkezhet. Viszont lehetőség van vortex-antivortex párok keltésére, ahol az utóbbi

$v = -1$ vortexparaméterrel rendelkezik. Amennyiben ezek magjainak távolsága r , a gerjesztési energiájuk

$$2\pi J \ln\left(\frac{r}{a}\right),$$

amely véges értékű. Ezen topologikus gerjesztések kötött állapotai jelentik a vortex-antivortex gázt, amely az XY-modell alacsony hőmérsékletű állapotát jellemzi. Elegendően magas hőmérsékleten azonban a vortex-antivortex párok felszakadnak és a rendszer nem kötött állapotú vortexekből áll. Kosterlitz és Thouless az átalakulás T_{KT} hőmérsékletét energia-entrópia érveléssel becsülte meg. Egy L lineáris méretű rendszerben egy izolált vortex magja L^2/a^2 különböző helyen lehet, innen az entrópiája:

$$S = k_B \ln\left(\frac{L^2}{a^2}\right).$$

Így a vortex szabadenergiája:

$$F = E - TS = J\pi \ln\left(\frac{L}{a}\right) - T k_B 2 \ln\left(\frac{L}{a}\right), \quad (7)$$

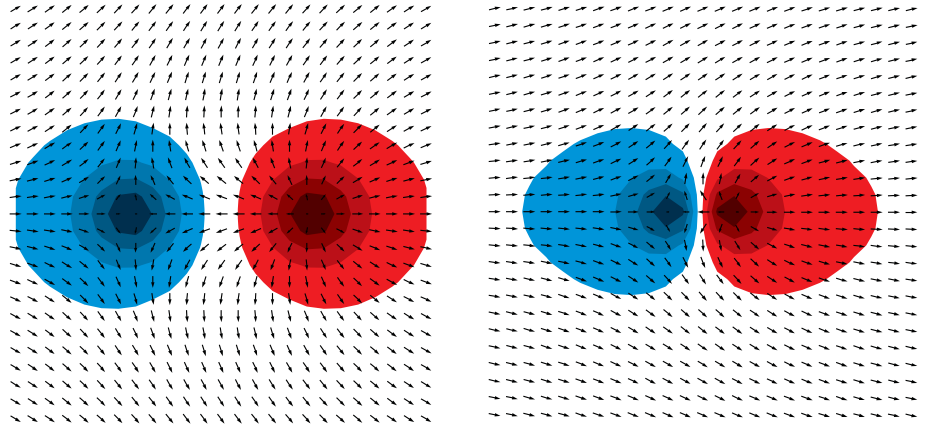
amely a $T_{KT} = J\pi/2k_B$ hőmérséklet felett negatív, azaz a szabad vortexek $T > T_{KT}$ esetén termodinamikailag stabilak.

A KT-átalakulás során az az új jelenség, hogy az átalakulás topologikus gerjesztések következtében lép föl, továbbá, hogy az átalakulás során nincs szimmetriasértés, amely a felfedezés időpontjában teljesen új és nem várt eredmény volt.

A KT-átalakulással kapcsolatban a következő eredményt a renormálási csoport-egyenletek származtatása és azok megoldása jelentette. A Kosterlitz által elvégzett számolásokból [8] következik, hogy az átalakulás során nagyon gyenge, úgynevezett lényeges szingularitás lép föl. A ξ korrelációs hossz a magas hőmérsékleti fázisban T_{KT} -hez közelítve hatványfüggvénynél gyorsabban divergál:

$$\xi \sim \exp\left(-\frac{A}{\sqrt{T - T_{KT}}}\right).$$

Az alacsony hőmérsékleti fázisban a korrelációs hossz divergens, a rendszer egy kiterjedt kritikus fázisban van. Itt a spin-spin korrelációs függvény a (4) szerinti hatványfüggvénnyel jellemzett lecsengést mutatja. A KT-átalakulás kísérletekben is megfigyelhető. Egyik következménye a ρ_s szuperfolyékony sűrűség átalakulási pontban mutatott univerzális ugrása [9], amelyet kísérletekben is az elmélettel összhangban állónak találtak.



2. ábra. Ellenkező polaritású vortex-antivortex párok az XY-modellben, balra nagyobb, jobbra kisebb távolságra egymástól.

Kvantumos Hall-effektus és a topologikus sáv szerkezet-elmélet

Thouless következő nagy hozzájárulása a topologikus fázisok és fázisátalakulások megértéséhez a kvantum Hall-effektus topológiai leírása volt. Thouless azt mutatta meg, hogy a KT-átalakuláshoz hasonlóan a kvantum Hall-effektusnál is egy olyan újfajta fázisátalakulásról (átalakulások sorozatáról) van szó, amelyek megértéséhez a Landau-paradigma nem elég: szimmetriasértés nincsen, hanem a topológiára van szükség.

A kvantum Hall-effektust 1980-ban fedezte fel Klaus von Klitzing, amikor egy félvezető felületén kialakított kétdimenziós elektrongáz tulajdonságait próbálta alacsony hőmérsékleten Hall-méréssel tesztelni. A Hall-mérésben a síkra merőleges B mágneses térben I áramot vezetnek a mintán keresztül, és mérik a mintának az árammal párhuzamos szélei között ébredő U_H elektromos feszültséget. A kísérlet klasszikus leírása (1879, Hall) egyszerű: az állandósult állapotban a töltéshordozókat eltérítő Lorentz-erőt kompenzálja a minta két szélén felhalmozódott töltések elektromos tere, amiből téglalap alakú mintára

$$U_H = \frac{IB}{nq}$$

adódik, ahol n a töltéshordozók felületi sűrűsége, q pedig a töltésük (ami lehet pozitív is, például lyukvezetésnél). Von Klitzing ehelyett azt tapasztalta, hogy elég tiszta minták, alacsony töltéshordozó-sűrűség, nagy mágneses tér és alacsony hőmérséklet esetén a Hall-vezetőképesség nem egyszerűen folytonosan változik a mágneses térrel, hanem bizonyos élesen meghatározott

$$\sigma_H = \frac{I}{U_H} = \nu \frac{e^2}{h}, \quad \nu \in \mathbb{N} \quad (8)$$

értékeket vesz fel, és ezen platók között viszonylag éles átmenetek vannak. A platókon ν értéke rendkívül stabil, relatív hibája $1:10^9$ -nek adódott, ami sok nagyságrenddel kisebb, mint akár a mintakészítés hibái, vagy a mágneses tér és a hőmérséklet fluktuációi.

A kvantumos Hall-effektus első elméleti értelmezésének alapjául Landau 1930-as munkája szolgált, ami szabad elektronok mágneses térben történő kétdimenziós mozgásának kvantummechanikai leírását adta. Az elektronok energia-sajátértékei itt sokszorososan degeneráltak, úgynevezett Landau-nívókba rendeződnek. Ha a Landau-nívó van betöltve, az anyag tömbi része szigetelő, de a minta szélén áram fog folyni, amihez minden betöltött nívó e^2/h vezetőképességgel ad járulékot. A magyarázat kulcsfontosságú része volt Laughlin érvelése (1981), ami segítette megérteni, hogy a mintában jelenlévő rendezetlenség milyen szerepet játszik. Azonban a Laughlin-érvelés nem segítette megérteni, mi történik, amikor a minta kristályrácsának periodikus potenciálja felhasítja a Landau-szinteket.

Thouless fontos hozzájárulása az volt, hogy 1982-ben, *Kobmotóval*, *Nightingale*-l és *den Nijs*-szel írt (TKNN, [3]) cikkében rámutatott: a kvantumos Hall-effektus kulcsa, hogy a mágneses tér az anyag tömbi részének topológiáját módosítja. Ha a mágneses tér akkora, hogy minden elemi cellára a h/e elemi fluxuskvantum racionális, p/q -ad része esik, a teret és a kristályrács potenciálját egyszerre lehet figyelembe venni egy nagyobb mágneses elemi cella bevezetésével. A nagyobb elemi cella miatt az eredeti energiasávok alsávokra esnek szét, amelyeket al-energiarészek (subgap) választhatnak el egymástól. A mágneses teret hangolva ezek az alrészek, mint azt néhány évvel korábban Hofstadter numerikusan felfedezte, fraktálstruktúrájú, úgynevezett Hofstadter-pillangót rajzolnak ki. Ha a kémiai potenciál egy alrészbe esik, a Hall-vezetőképesség a lineáris válaszelméletből, mint az áram válasza az U_H perturbációra meghatározható. TKNN eredménye ebből a számolásból:

$$v = \frac{i}{2\pi} \sum_{m \in \text{occ}} \int_{\text{BZ}} d^2k \nabla_k \times \langle u_m(k) | \nabla_k | u_m(k) \rangle, \quad (9)$$

ahol az m szerinti összeg a betöltött alsávokra vonatkozik, a k -integrál a mágneses Brillouin-zónán történik, az $|u_m(k)\rangle$ pedig az m -edik energia-sajátállapot. A Stokes-tétel alkalmazásával könnyű belátni, hogy v valóban egésznek adódik. Matematikusabb nyelven megfogalmazva, TKNN szerint a Hall-vezetőképességet meghatározó v a betöltött állapotokra való projektor első Chern-száma a mágneses Brillouin-zónában. A TKNN-eredmény akkor lett igazán teljes, amikor társszerzőkkel Thouless 1985-ben megmutatta [4], hogyan lehet az érvelést a rendezetlen, illetve a kölcsönható esetre is átültetni.

A technikai jellegű 1982-es TKNN-számoláshoz Thouless 1983-ban a „Thouless-pumpa” szemléletes képét csatolta. Azt mutatta meg, hogy ha a kvantumos Hall-effektus leírásánál a k , kristályimpulzust $2\pi t/(Ta)$ időre cseréljük (a a rácsállandó, T egy tetszőlegesen megválasztható periódusidő), a kétdimenziós kvantumos kristály problémáját egy periodikusan pumpált egydimenziós kvantumos lánc problémájára képezhetjük le. Ha T elegendően nagy, a pumpálás adiabatikusnak tekinthető, és a v egész szám ilyenkor az egy ciklus során a lánc

mentén pumpált töltés mennyiségét adja meg. Ez a Thouless-pumpa, ami a Hall-effektus megértéséhez nyújt segítséget, 2015 óta nemcsak elméleti konstrukció: lézerek csapdázott ultrahideg atomokon ekkor közvetlenül, kísérletileg megvalósították a jelenséget.

Thouless (és különböző társszerzői) munkája azt mutatta meg, hogy a kvantumos Hall-effektusra valóban érdemes egyfajta topologikus fázisátalakulások sorozataként tekintenünk. A fázisokat jellemző topologikus invariáns a Chern-szám, amely, szemben a KT-átalakulással, itt nem a rendszer valós térbeli, hanem az impulzustérbeli topológiáját adja meg.

Rögtön adódik a kérdés: nem lehet-e ezt a topológiát mágneses tér helyett valami mással megváltoztatni, azaz létezik-e kvantumos Hall-effektus Landau-nívók nélkül? A kérdésre Haldane adott pozitív választ 1988-ban, megmutatva, hogy egyrétegű grafitban (amit ma grafénként ismerünk) a másodsomszédhoppingoknak megfelelő komplex fázisokat adva, a Chern-számot, és így a minta Hall-vezetőképességét ugrásszerűen lehet hangolni. Azonban a komplex fázisokat Haldane kénytelen volt „kézzel beírni”, illetve egy játékmódban egy olyan inhomogén mágneses térből származtatni, amely nagy értékeket felvéve az elemi cella közepén kifelé, a szélein befelé mutat, oly módon, hogy az összegzett fluxus az elemi cellára eltűnik. Ebből a játékmódból nőtt ki két évtizeddel később a topologikus szigetelők területe.

Kvantumos spinláncok és az anyag szimmetria által védett topologikus fázisai

Haldane esetén a Nobel-díj Bizottság indoklása a díjazott két 1983-ban írt egyszerűs munkáját emeli ki, amelyek az antiferromágneses Heisenberg (AFH) spinlánc alacsony energiás gerjesztéseinek vizsgálatával foglalkoznak [5, 6]. Mindkét munkát már Los Angeles-ből küldte be publikálásra a szerző, viszont a vizsgálatok még visszanyúlnak a korábbi vizsgálatoktól töltött időkre is. Ugyancsak Grenoble-ban születtek Haldane fontos új eredményei az egydimenziós elektrongáz leírására szolgáló, úgynevezett Luttinger-folyadék témakörében [10].

Ami az AFH-spinláncot illeti, azt a következő Hamilton-operátor definiálja:

$$\mathcal{H}_H = J \sum_i \vec{S}_i \vec{S}_{i+1}, \quad (10)$$

ahol $J > 0$, \vec{S}_i az i -edik rácshelyen lévő spinoperátor és S egész vagy félegész értékű lehet. Egzakt eredmények szerint az $S = 1/2$ -es modellben a gerjesztésekben az energiárés eltűnik és hasonló igaz a klasszikus határesetet jelentő $S \rightarrow \infty$ modellre is. Tetszőleges S értékre ugyan nem voltak eredmények, mégis a nyolcvanas évek elejéig általánosan elfogadott nézet volt, hogy az energiárés nélküli viselkedés S -től függetlenül teljesül.

Haldane korszakos, új eredményeket hozó munkáiban a fenti problémát nagy S értékekre térelméleti

módszerekkel vizsgálta [5, 6]. Először megmutatta, hogy a modell alacsonyenergiás gerjesztéseit a következő hatásintegrált tartalmazó rendszer szolgáltatja:

$$S_{NLS} = \frac{1}{2g} \int dt dx \left(\frac{1}{v} (\partial_t \vec{n})^2 - v (\partial_x \vec{n})^2 \right), \quad (11)$$

ahol \vec{n} egy háromdimenziós egységvektor, amely az antiferromágneses rendparaméter lassú változását írja le, v a spinhullám sebessége és a g csatolási állandó értéke $1/2S$. Ez a modell az $O(3)$ nemlineáris szigma-modell, amely az akkor már ismert eredmények szerint véges energiárral rendelkezik. Ennek minden S -re igaznak kellett volna lennie, de ez nyilvánvaló ellentmondásban állt az $S = 1/2$ esetén ismert egzakt eredménnyel. A probléma feloldásában Haldane rámutatott arra, hogy az erős kvantumos fluktuációk eltérő módon viselkednek egész és félegész spinű láncok esetén. A hatásintegrált tovább analizálva egy, a (11) egyenlethez járuló, úgynevezett topologikus θ tagot származtatott:

$$S_{top} = i \frac{\theta}{4\pi} \int d^2 x \vec{n} (\partial_1 \vec{n} \times \partial_2 \vec{n}), \quad (12)$$

ahol $\theta = 2\pi S$ és euklideszi koordinátákat használt $(x^1, x^2) = (it, x)$. Ez a tag a mozgásegyenlethez ugyan nem ad járulékot, viszont a fázishoz egy $\exp(i2\pi SQ)$ tényezőt szolgáltat, ahol a

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2 x \vec{n} (\partial_1 \vec{n} \times \partial_2 \vec{n}), \quad (13)$$

úgynevezett csavarodási szám (angolul winding number) egész értékű. Q értéke az \vec{n} térváltozó konfigurációjától, pontosabban annak topológiájától függ. S egész értéke esetén a fázistényező mindig 1 és ezért a lánc a korábbi állítások szerint energiárral rendelkezik. S félegész értékére a fázistényező $(-1)^Q$ különböző előjelű lehet, amely egyes tagok kiesését eredményezi. Haldane azt jósolta, hogy minden félegész spinű lánc energiárral nélküli, míg az összes egész spinű lánc energiárral rendelkezik. A maga idejében ez egy váratlan és meglepő jóslat volt, és az első numerikus eredmények az $S = 1$ lánc esetén még nem szolgáltattak egyértelmű igazolást.

A probléma megértéséhez nagyban hozzájárultak Affleck, Kennedy, Lieb és Tasaki (AKLT) vizsgálatai [11], akik egy közeli kapcsolatban álló modell esetén egzaktul a Haldane által jósolt véges energiárral eredményre jutottak. Az AKLT-modell Hamilton-ope-

3. ábra. Az AKLT-modell felírása $S = 1/2$ spinváltozók segítségével (lásd Wikipedia). Az $S = 1/2$ változók állapotai $|\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\rangle$, az $S = 1$ változók állapotai $|+\rangle$, $|0\rangle$ és $|-\rangle$.



$$\bullet \text{---} \bullet = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle)$$

$$\circ = |+\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |0\rangle \frac{\langle\uparrow\uparrow| + \langle\downarrow\downarrow|}{\sqrt{2}} + |-\rangle\langle\downarrow\downarrow|$$

rátorában az $S = 1$ -re vonatkozó (10) egyenletet egy bikvadratikus taggal egészítik ki:

$$\mathcal{H}_{AKLT} = \sum_i \vec{S}_i \vec{S}_{i+1} + \frac{1}{3} \sum_i (\vec{S}_i \vec{S}_{i+1})^2, \quad (14)$$

amelynek alapállapotát mátrixszorzat-állapottal lehet felírni. Ehhez az $S = 1$ spineket két $S = 1/2$ kompozit spinnel fejezik ki, amelyek szingulett állapotban vannak a mellékelt, 3. ábra szerint. Nyitott határfeltétel esetén a lánc két végén $S = 1/2$ spin szabadsági fokok maradnak, amelyek között a láncmérettel exponenciálisan csökkenő kölcsönhatás van. Ez az egyik első példája a spinfraktálosodásnak.

Megjegyezzük, hogy a CsNiCl₃ rendszerben, amely egy $S = 1$ spinű AFH-láncot ír le, a Haldane-sejtéssel összhangban véges gerjesztési energiát mértek.

Összefoglalva elmondhatjuk, hogy az $S = 1$ spinű AFH-láncban megjósolt Haldane-fázis az anyag szimmetria által védett topologikus fázisainak prototípusát jelenti. Ebben az esetben egy nemlokális, úgynevezett sztring rendparamétert tudunk értelmezni:

$$O^z(r) = -\langle S_l^z \exp[i\pi (S_{l-1}^z + S_{l-2}^z + \dots + S_{l-r-1}^z)] S_{l,r}^z \rangle, \quad (15)$$

amely a Haldane-fázisban véges értéket vesz fel. Az így értelmezett topologikus rend viszonylag gyenge külső perturbációk esetén robusztusan fennmarad. Példaképp említhetjük a kötésrendezetlenség esetét, viszonylag erős rendezetlenség szükséges ahhoz, hogy sztring rendparaméter és vele együtt a Haldane-féle energiárral a rendszerben eltűnjön.

Kitekintés

Alfred Nobel végrendelete szerint a nevére elnevezett díjat azon kutatóknak kell odaítélni, akik „a díjat megelőző évben az emberiség javát legjobban szolgálták”. Az évek során a Svéd Királyi Akadémia lazított a kitételeken, és a díjjal legtöbbször – így idén is – évtizedekkel korábban végzett kutatást ismernek el. Az „emberiség javát” pedig sokszor talán csak a tudásvágy csillapításaként értelmezhetjük (lásd a tavalyi, neutrínóoszillációkért, vagy a 2013-as, a Higgs-mechanizmusért, vagy akár a 2011-es, a Világegyetem gyorsulva tágulásának felfedezéséért adott díjat). Idén azonban nemcsak az absztrakt tudásvágyról van szó: Kosterlitz, Thouless és Haldane úttörő munkáiból kinőtt a topologikus szigetelők, és az erősen kölcsönható anyagok topologikus rendjének kutatása is, ez utóbbi pedig új, ígéretes utat nyitott a kvantumszámítógép megépítése felé.

A TKNN-invariánshoz hasonló impulzustérbeli topologikus invariánsok, amelyek közvetlenül megjelennek mérhető fizikai mennyiségek robusztusan kvantált értékeiben, a topologikus szigetelők [12] definiáló jellemzői. Az első elméleti jóslatot a külső tér nélküli topologikus szigetelőkre közvetlenül Haldane

1988-as, a 3. fejezetben tárgyalt munkájára építve, 2005-ben *Fu* és *Kane* adták. Azt mutatták meg, hogy a Haldane által a másodszozszed-hoppinghoz hozzáadott fázisok ténylegesen megjelennek a grafénben a spin-pálya csatolás miatt. A grafén, *Fu* és *Kane* szerint, megfelelően alacsony hőmérsékleten két Haldane-modellként értelmezhető: kicsit leegyszerűsítve, az egyik spinbeállítású vezetési elektronok a +1, a másik spinbeállításúak a -1 Chern-számot valósítják meg. Sajnos hamar kiderült, hogy grafénben a spin-pálya csatolás túl gyenge ahhoz, hogy *Fu* és *Kane* jóslata kísérletileg valaha is észlelhető legyen (a grafén gyűrődései és egyéb fluktuációk még alacsony hőmérsékleten is elmoszák). Az ötlet azonban természetesen bizonyult: 2006-ban *Bernevig*, *Hughes* és *Zhang* megjósolta, és 2007-ben Würzburgban *Molenkamp* csoportjában kimérték, HgTe-vékonyrétegben a spin-pálya csatolás elég erős, és itt valóban külső tér nélkül is kvantált vezetőképesség (és spin Hall-effektus) mérhető. Azóta számos egy-, két-, és háromdimenziós topologikus szigetelőanyagot szintetizáltak, az elmélet pedig a 2000-es évek végére jutott el a topologikus szigetelők univerzalitási osztályainak felírásához. Ez a „topologikus szigetelők és szupravezetők periódusos rendszere”, ami tetszőleges dimenziószám esetén megmutatja, hogy az elemi szimmetriák (időmegfordítási, részecske-lyuk, illetve az ezek kombinációjaként jelentkező királis szimmetria) milyen kombinációja szükséges ahhoz, hogy egy anyag topologikus szigetelő lehessen.

A TKNN-invariánsból kinőtt topologikus szigetelők elméletéből jósolták meg a topologikus szupravezetőkben megjelenő Majorana-fermionokat, amelyekért a 2010-es évek szilárdtest-fizikájának egyik éles versenyfutása zajlik. Ezek a kölcsönható rendszer olyan sajátmódusai, amelyeket „Zen-részecskéknek” is neveznek, mivel az egymástól távoli Majorana-fermionoknak sem energiájuk, sem töltésük, sem spinjük nincs. Mivel ezen módusok így külső terekhez nem csatolódnak, betöltési számaikban kvantuminformációt lehetne elrejtetni a környezet fluktuációi okozta dekoherencia elől. Ráadásul ezen gerjesztések „fonásával” a bennük tárolt információt bizonyos mértékig manipulálni is lehet. A Majorana-fermionokat kísérletileg eddig csak áttételesen sikerült detektálni, elsőként 2012-ben Delftben, *Kouwenhoven* csoportjában, InSb-ből növesztett nanodróton, amit szupravezetővel proximitizáltak. A közvetlen kísérleti jelért folyik a mostani verseny: ez az lesz, ha Majorana-fermionokba beírunk, ott manipulálunk, majd onnan kiolvassuk kvantuminformációt. Sajnos, azonban úgy tűnik, a Majorana-fermionokban elrejtett információn nem lehet minden, a kvantumszámítógéphez szükséges műveletet fonással elvégezni.

A Haldane-lánc tulajdonságainak módszeres vizsgálata vezetett el a topologikus rend fogalmáig. Ez egy-, két-, illetve háromdimenziós erősen kölcsönható spinrácsok jellemzője, amelyeknek a termodinamikai határesetben is véges sok degenerált alapállapota van, amiket energiérés választ el a gerjesztett állapo-

toktól. Az alapállapotokat egymástól nem valamilyen lokális, Landau-féle rendparaméter várható értéke különbözteti meg, hanem valamilyen nagyon nemlokális sztring-rendparaméter. Ezért a topologikus rend kéz a kézben jár a hosszú távú kvantumkorrelációk kialakulásával az alapállapotban (szemben a topologikus szigetelőkkel, vagy akár a szimmetriavédett topologikus renddel, ahol a kvantumkorrelációk exponenciálisan lecsengenek). A topologikus rend másik fontos jellemzője, hogy az alapállapot felett részecske-szerű elemi gerjesztések vannak, ezen részecskék fúziós szabályaival lehet karakterizálni egy-egy topologikus rendet. A vizsgálatokat egzaktul megoldható „játékmodellek” segítik, amelyek ősatya *Kitaev* toric-code-modellje: egy négyzetrácsos definiált spinmodell, ami négyspin-kölcsönhatásokat tartalmaz. Ha a négyzetrácsot kilyukasztjuk, a rendszer alapállapota degenerálttá válik, az egymásra ortogonális alapállapotok száma a lyukak számával nő.

A manapság legígéretesebbnek tűnő kvantumszámítógép-prototípusokban a dekoherencia elleni védekezést a topologikus rend adja. A cél az úgynevezett surface code megvalósítása, ami a Kitaev-féle toric-code-modell egyfajta implementációja. A módszer hátránya, hogy így egy-egy logikai kvantumbitet többszáz fizikai kvantumbit ábrázol, de előnye, hogy a műveletek megengedett hibája 1% nagyságrendű, ami elérhető a jelenlegi technológiával. Erre épít, szupravezető kvantumbitek segítségével, a Google (UCSB+Google, Martinis-csoport, 9×1 kvantumbit), az IBM (Gambetta csoportja, 2×2 kvantumbit), de vannak ötletek a surface code implementációjára az ausztrál Kane-féle kvantumszámítógépen is (itt a kvantumbitek szilíciumba ágyazott foszforatomok magspinje tárolja). A vezető technológiai cégek nemcsak a kísérleti, hanem az elméleti fejlesztésbe is beszálltak: a topologikus kvantumszámítás-elmélet egyik vezető csoportját, a Station Q-t, a Microsoft finanszírozza. Ez a pezsgés mutatja, hogy a topologikus fázisok és fázisátalakulások nemcsak az 1970-es és 1980-as évek fizikájának kérdéseit választották meg, de a kvantumfizika jövőbeli alkalmazásának is szerves részei.

Irodalom

1. J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless: Long range order and metastability in two dimensional solids and superfluids. (Application of dislocation theory). *Journal of Physics C: Solid State Physics* 5 (1972) L124.
2. J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless: Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *Journal of Physics C: Solid State Physics* 6 (1973) 1181.
3. D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, M. den Nijs: Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Physical Review Letters* 49 (1982) 405.
4. Q. Niu, D. J. Thouless, Y.-S. Wu: Quantized Hall conductance as a topological invariant. *Physical Review B* 31 (1985) 3372.
5. F. D. M. Haldane: Continuum dynamics of the 1-D Heisenberg antiferromagnet: Identification with the O(3) nonlinear sigma model. *Physics Letters A* 93 (1983) 464.
6. F. D. M. Haldane: Nonlinear Field Theory of Large-Spin Heisenberg Antiferromagnets: Semiclassically Quantized Solitons of the One-Dimensional Easy-Axis Néel State. *Physical Review Letters* 50 (1983) 1153.

7. N. D. Mermin, H. Wagner: Absence of ferromagnetism or anti-ferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models. *Physical Review Letters* 17(1966) 1133.
8. J. M. Kosterlitz: The critical properties of the two-dimensional xy model. *Journal of Physics C: Solid State Physics* 7(1974) 1046.
9. D. R. Nelson, J. M. Kosterlitz: Universal jump in the superfluid density of two-dimensional superfluids. *Physical Review Letters* 39(1977) 1201.
10. F. D. M. Haldane: 'Luttinger liquid theory' of one-dimensional quantum fluids. *Journal of Physics C: Solid State Physics* 14 (1981) 2585.
11. I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, H. Tasaki: Rigorous results on valence-bond ground states in antiferromagnets. *Physical Review Letters* 59(1987) 799.
12. M. Z. Hasan, C. L. Kane: Colloquium: Topological insulators. *Review of Modern Physics* 82(2010) 3045.

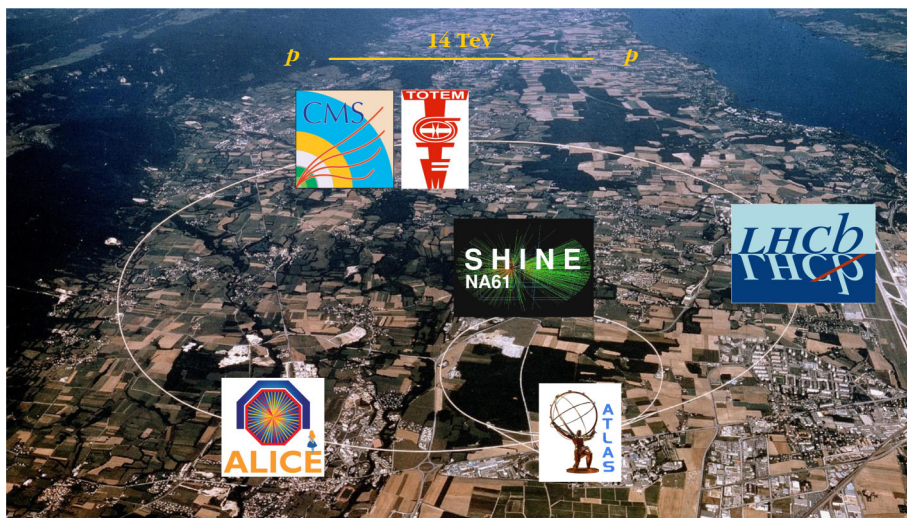
A CERN NAGY HADRONÜTKÖZTETŐJE, 2016

Horváth Dezső
Wigner Fizikai Kutatóközpont, Budapest
és Atomki, Debrecen

A világ legnagyobb részecskegyorsítója, a CERN Nagy hadronütköztetője (hivatalos nevén LHC, Large Hadron Collider) 100 m-re a föld alatt, 27 km kerületű alagútban (1. és 2. ábra), 2000-től 2008-ig épült, és két megszakítással (az első kisebb katasztrófától, a második tervezett továbbfejlesztés miatt) azóta sikeresen működik.

Nagyenergiás részecskegyorsítók

A részecskegyorsító elnevezés némileg félrevezető, hiszen ezeken az energiákon a részecske sebessége nagyon közel van már a fénysebességhez, tovább nemigen gyorsul, csak az energiája növekszik. A gyorsítók teljesítményét az elért energia, valamint a nyaláb intenzitása és minősége határozza meg. A modern nagyenergiájú részecskegyorsítók egymással szemben mozgó részecskecsomagokat ütköztetnek az észlelőrendszerek közepén, ezzel biztosítva a befektetett energia legjobb kihasználását. Az energiát a részecskefizikában elektronvoltban (eV) mérjük, azzal az energiával, amelyre 1 volt feszültség átszelésekor tesz szert egy egységnyi töltésű részecske, például elektron vagy proton. A nagyenergiájú



1. ábra. A CERN és környéke a Szuper-proton-szinkrotron (SPS) és az LHC gyűrűivel, valamint a Genfi-tóval. Jelentős magyar csoportok dolgoznak a CMS-, ALICE-, NA61- és TOTEM-kísérleteknél.

fizika kedvenc egységei a giga- és teraelektronvolt ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ és $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$).

Ütköző nyalábok esetén az ütközések gyakoriságát a részecskenyalábok intenzitásán kívül, azok menél kisebb keresztmetszeten történő átfedése, azaz lehető legjobb fókuszálása és pontosabb összeirányítottága határozza meg. A részecskefolyamatok valószínűségét a szóródási kísérletekhez bevezetett *hatáskeresztmetszettel* jellemezzük, amelynek mértékegysége a *barn* ($1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$). Nem véletlenül kapta az angol *csűr* nevet, hiszen nagyon nagy: a jelenleg tanulmányozott részecskefizikai folyamatok hatáskeresztmetszetét általában *picobarnban* ($1 \text{ pb} = 10^{-12} \text{ b}$) vagy *femto-barnban* ($1 \text{ fb} = 10^{-15} \text{ b}$) mérik. Az ütközési gyakoriságot legkönnyebben azzal lehet szemléltetni, mekkora



Horváth Dezső Széchenyi-díjas kísérleti részecskefizikus. 1970-ben végzett az ELTE-n, vizsgálatait Dubnában és Leningrádban kezdte, a kanadai TRIUMF-ban, az amerikai BNL-ben, a svájci Paul-Scherrer Intézetben, az olasz INFN-ben, majd a CERN-ben folytatta. Budapest–Debrecen kutatócsoportokat szervezett CERN-kísérletekre. 2006 óta koordinálja a magyar fizikatanárok részecskefizikai oktatását a CERN-ben. Emeritus professzor, magántanárként részecskefizikát oktat a Debreceni Egyetemen.

A szerző köszönettel tartozik kollégáinak, főleg *Siklér Ferencnek* és *Trócsányi Zoltánnak* értékes tanácsaikért, valamint az NKFI Alap kutatási támogatásáért (K-103917 és K-109703. sz. szerződés). Ez a munka a szerző *MTA Hírekben* 2016 tavaszán és kora nyarán megjelent elektronikus cikkei alapján készült. A *Fizikai Szemlében* többször is publikáltunk a témában, de az általános érthetőségre törekedve szükségszerű ismétlésekkel írtuk ezt az cikket, és ezért elnézést kérünk a rendszeres olvasótól.