Bodor-hidat), amelyben egyetlen szeg sem volt. Épített templomokat (bicskával szárnyas oltárt faragott, festett freskókat), szerkesztett gazdasági gépeket, díszkertet alakított ki szélhárfákkal, barlanggal. Házának udvarán, a mai vidámparkokhoz hasonlító szórakozóhelyet rendezett be hajó- és körhintával, csúszdával és más, saját kezűleg gyártott, elmés szerkezetekkel. Bodor gyakran látogatta Bolyait. Bizonyára szóba került közöttük a harang kérdése. A kutatót érdekelte, hogy Bodor ismerte-e Bolyai vizsgálatait, javaslatait, ha igen felhasználta-e ötleteit, személyesen is megbeszélték-e ezen kérdéseket?

A tudóstársadalmat mindmáig megosztja az elmélet-gyakorlat elsőbbsége, fontossági sorrendje. Bolyai és Bodor külön-külön világhírnévre tettek szert. Ugyanazon kis néhányezer fős közösség problémamegoldói voltak. Bolyai volt a „geniális fő”, Bodor pedig a „mechanikus művész” – ahogyan *Kőváry László* (1819–1907) történész nevezi őket *Székelyhonról* című munkájában. A harang kérdésében – úgy tűnik – Bolyai volt az elméleti szakértő, Bodor Péter pedig a mester, a kivitelező.

Kiért nem szólt a harang?

Néhány évvel később Bolyainak a harang „levelezés”-sel kapcsolatos aggályai beigazolódtak. A nagyharang öntvénye annyira megrongálódott, hogy végül elrepedt. 1834-ban Kolozsváron újat öntöttek, ez szólal meg ma is valahányszor szükség van rá.

A rajta lévő körirat csodálatosan foglalja össze a harang rendeltetését:

„Függjön itt számtalan évekig,
Isten védje ellenségtől,
Hívja az élőket buzgóságra,
Kísérje nyugalomra,
Veszély hirdetője ne legyen.”

Csak egyetlen református halottat nem kísért Marosvásárhelyen nyugalomra a vártemplomi harangszó – 160 évvel ezelőtt, 1856-ban Bolyai Farkast.

Az ő végakarata ugyanis az volt, hogy:

„*Meghagyás*… se pap… sem egyéb cérémonia, még harang se legyen; az oskola csengettyűje szólhatna.”

Így halálát mindössze a kollégiumi csengők adták a vásárhelyi emberek tudtára.

A FIZIKA TANÍTÁSA

MILYEN GÖRBÉT ÍR LE A GNÓMÓN CSÚCSÁNAK ÁRNYÉKA?

Szferikus csillagászat Geogebrával

Nyirati László
Széchenyi István Műsz. Szakközépiskola, Székesfehérvár

A szferikus csillagászat foglalkozik azzal, hogy az egyes égitestek adott időpontban, az adott földrajzi helyen éppen merre találhatók. Ezen belül a Nap aktuális helyzete is érdekes megfigyelési téma, ugyanis az idő mérésének egyik definíciója éppen ehhez kapcsolódik. Az alapegység, a középnap hossza csillagászatilag meghatározandó fogalom.

Egy földrajzi helymeghatározási elv is kapcsolódik a témához. A vízszintes talajba, arra éppen merőlegesen tűzzünk le egy pálcát: ez a gnómón. Dél környékén rövid időközönként megjelöljük a pálca csúcsának árnyékát, feljegyezve az óránk által mutatott időt. Megkeressük a legrövidebb árnyékot. Az árnyék hossza, a pálca hossza, valamint a legrövidebb árnyékhoz tartozó időpont (dátummal együtt) a mérési adat. Néhány táblázat és a zónaidő, valamint a helyi dél és világidő fogalmának ismeretében a földrajzi szélesség és hosszúság elég pontosan meghatározható.

Ezt a mérést a CERN-beli tanulmányút kapcsán több helyszínen, különböző időpontokban elvégeztük. Arra lettünk figyelmesek, ha a mérést a helyi dél előtt egy-két órával kezdjük és ugyancsak a helyi dél után egy-két óráig folytatjuk, akkor a gnómón árnyékának végpontja különböző pályákon halad végig. Vajon mitől függ, hogy a pálya milyen alakú?

Három mérésről készítettünk felvételt (*1. ábra*). A helyszínek: Siófok, Schaffhausen és Székesfehérvár. A dátumok: 2014-ben rendre július 25., augusztus 17. és december 27. A helyszín vagy az időpont miatt más a görbe?

A napórák sokszor művészi kialakításúak. Különböző helyzetű mérőpálcát használnak, és emiatt sokféle, nagyon érdekes felületre eső árnyékokat láthatunk. Sok tapasztalat gyűlt össze az ilyen szerkezetek készítésekor.

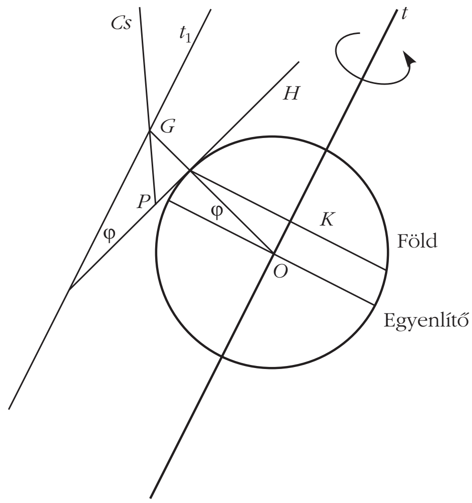
Nyirati László matematika-fizika szakos tanár 1972-ben végzett az ELTE-n. Később a BME Villamosmérnöki karán is szerzett diplomát, majd a Kossuth Lajos Tudományegyetemen informatika tanári végzettséget. Székesfehérváron tanít, többnyire középiskolában, de 1995-től 2007-ig a Kodolányi János Főiskola Informatika tanszékén dolgozott. 2008 óta nyugdíjas, jelenleg óraadó tanár.

1. ábra. A gnómón árnyéka különböző helyen és időpontban.

Kis térgeometria

Fogalmazzuk meg a problémánkat általánosabban! Egy *Cs* égitestet figyelünk meg, amely a nap folyamán végighalad az égbolton. Az égitest tartózkodási helyét és a pálca *G* végpontját egyenessel Összekötve, az a *P* pontban döfi a *H* vízszintes síkot. Vajon ez a döféspont milyen alakzatot rajzol a síkon az égitest látszó mozgása közben? Ezzel elvonatkoztatunk attól, hogy az égitest vet árnyékot vagy sem.

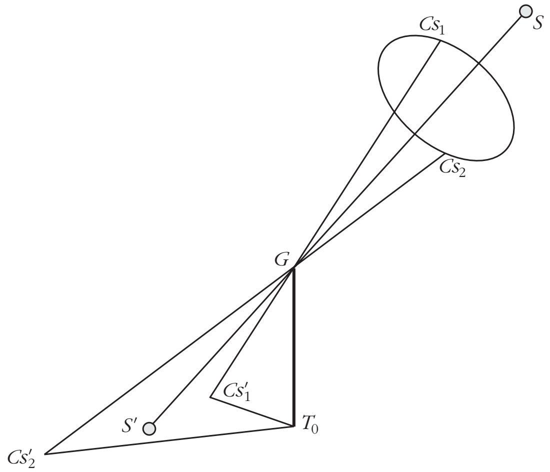
A *2. ábra* arra az időpontra vonatkozik, amikor a csillag éppen delel. Mitől is van, hogy az árnyék elmozdul? Földünk egy gömb, amely egy fix *T* tengely körül forog, miközben ellipszispályán halad a Nap körül. A napi előrehaladás a környező égitestek távolságához képest csekély mértékű, ezért ezt most elhanyagolhatjuk.



2. ábra. A Föld forgása a horizonttal együtt.

A Földön a tartózkodási helyünkhöz illesszünk egy *H* érintősíkot, ez a helyi horizont, azaz a vízszintes talaj. Ebből áll ki pálca, aminek egyenese átmegy Föld középpontján. Ez az egész lassan, egy nap alatt egyszer körbefordul a Föld forgástengelye körül, miközben a látható égitestek lényegében helyben maradnak. A gnómón csúcsa és talppontja tehát egy-egy kört ír le egy nap alatt, amelynek sugara a Föld forgástengelyé-

3. ábra. A csillagok látszó mozgása. Forrás: http://embers-eg.webnode.hu/news/sarkcsillag-es-goncolszeker-/ (fölül) és http://www.keptelenseg.hu/fotok/csillagkepek-90132 (alul).



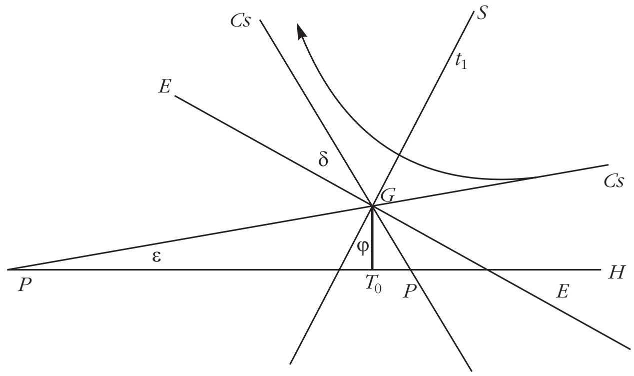
4. ábra. A csillag mozgása a képzeletbeli kettős kúppal.

től mért távolsága. Mivel e kör mérete is kicsi az egyéb csillagászati távolságokhoz, például a naptávolsághoz képest, egyszerűbb, ha a forgást a T_1 tengely körülinek tekintjük. (A *2. ábrán* a gnómón hossza lényegesen nagyobb a valóságos helyzetnél, hogy a horizont síkjára kerülő vetület érzékelhető legyen.)

Az ábrán látható φ szög két helyen jelenik meg. (Az egyenlítő síkja és a gnómón egyenese által bezárt szög, valamint a Sarkcsillag iránya és a horizont síkja által bezárt szög, lásd később.)

Ha a fentiek szerint kell leírni, hogy a P pont a H síkon milyen görbét rajzol a nap folyamán, igen nehéz helyzetbe kerülünk. Bármilyen furcsa, ezúttal egy álló Föld és a körülötte forgó csillagrendszer sokkal egyszerűbb képet fest. De ebben a szemléletben csupán a mozgás relatív volta miatt járunk el így, korántsem térünk vissza a geocentrikus világképhez. Nézzük meg a *3. ábra* képeit!

A két kép a csillagos égboltról készült. Az egyik a 20. szélességi fok táján, a másik az Egyenlítőn. Az első képen láthatóan vannak olyan csillagok, amelyek nem kerülnek a horizont alá. Ezek a cirkumpoláris csillagok. Ha az első képen például a fa lenne a gnómón, akkor annak csúcsát kötnénk össze egy csillaggal, amely egy kört ír le a nap folyamán. Jól érzékelhető, hogy egy képzeletbeli kettős kúpot kapunk, ahogyan az a *4. ábrán* látható. A csillag Cs_1 helyzetének „árnyéka” a Cs'_1, Cs_2 helyzetének „árnyéka” Cs'_2. A S Sarkcsillag „árnyéka” mindig S'.

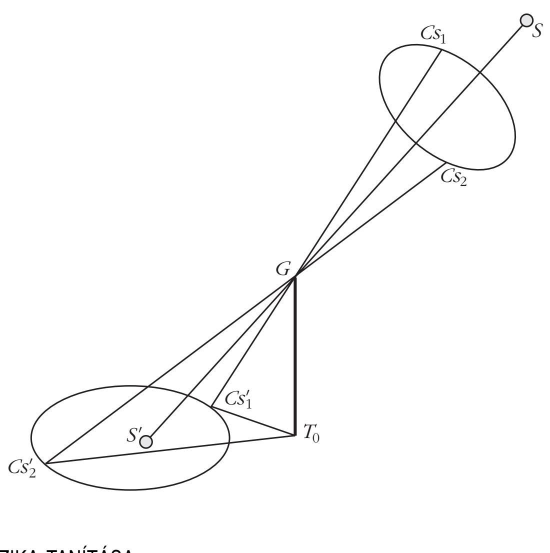


5. ábra. Egy csillag mozgása a Földről nézve.

Az *5. ábra* a fentiek metszetét mutatja, kiegészítve az Egyenlítő és a horizont síkjának vetületével. A Cs–Cs egyenesek ugyanazon csillag irányát mutatják a felső és alsó delelés helyzetében. A kettős kúpot úgy kapjuk, hogy a gnómón, az E Egyenlítő és a H horizont állva marad, miközben minden más a T_1 tengely körül egy nap alatt egyszer térben körbefordul, ahogyan a görbe nyíl mutatja.

A Föld az S északi pólus felől nézve az óramutató járásával ellentétesen forog. Forgása közben a Cs csillag irányát folyamatosan összekötve a gnómón csúcsával egy kettős körkúp palástját kapjuk, amelynek metszete a H horizont síkjával éppen a keresett görbét adja. Azaz, ha egy csillag által vetített árnyékot jelölgetnénk, egy kúpszeletet kapnánk. A *6. ábra* egy kúp metszetét mutatja, ahol az alkotók a Cs–Cs egyenesek, a H sík pedig egyenesnek látszik. A P–P pontok közötti szakasz az árnyékvonal vetülete. Tehát a gnómón árnyékára vonatkozó kérdést általánosságban megválaszolhatjuk: a vízszintes síkra merőlegesen leszúrt pálca végpontjának árnyéka egy kúpszelet. Már csak arra keressük a választ, hogy milyen kúpszelet.

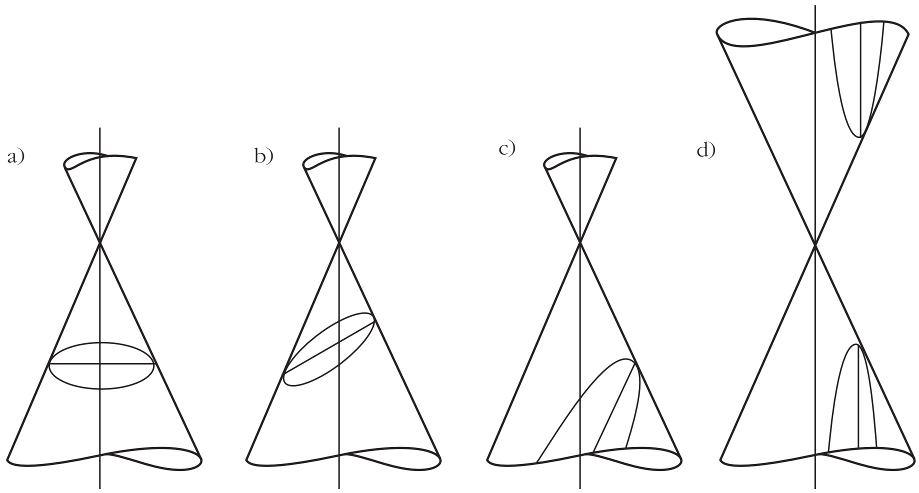
6. ábra. A gnómón árnyéka kúpszelet.



Kúpszeletek

Hajós György Bevezetés a Geometriába [1] című könyve elég tág teret szán a kúpszeleteknek. Kúpszerű testről beszélünk, ha egy folytonos zárt síkgörbét veszünk, valamint a síkon kívül egy pontot. A ponton és zárt síkgörbe egyik kerületi pontján egy egyenest fektetünk át. Az egyenest végigvisszük a görbe minden pontján, miközben a külső ponttal folyamatosan érintkezik. A zárt görbe ezúttal kör. Esetünkben jobbnak látszik a körkúpnak egy ezzel egyenértékű származtatása. Vegyünk két egymást metsző egyenest, esetünkben az egyik a Sarkcsillag irányába mutat. A metszéspontot a gnómón csúcsába helyezzük. A másik egyenes az aktuális égitest irányába mutat. A második egyenest – az első mint tengely körül – forgassuk körbe! A kapott kúp nyílásszöge a két egyenes által bezárt szög. Ez annál nagyobb, minél távolabb van a csillag iránya a sarkcsillag irányától. A kúp tengelye a Föld tengelyével párhuzamos. Ezt a kúpot vágjuk el a horizont síkjával.

Egy kettős körkúp és egy sík közös részéről beszélünk. Kúpszeletek közé soroljuk a következő alakzatokat: pont, egyenes, kettős egyenes, kör, ellipszis, parabola, hiperbola. Az első három abban az esetben adódik, ha a kúpot metsző sík illeszkedik a kettőskúp csúcsára. Ilyen esetünkben nem fordul elő, mert a metsző sík – a horizont – a gnómón talppontjára illeszkedik, kúp csúcsa pedig a gnómón csúcsa egyben. Tehát a valós esetekben: kört, ellipszist, parabolát, hiperbolát kapunk. Így most csak azt kell tárgyalnunk, hogy milyen körülmények határozzák meg, hogy melyik esettel van dolgunk. Fontos megjegyezni, hogy létezik egy elfajult eset, amelynél a kúpot származtató két egyenes merőleges egymásra. Ekkor a kúp palástja síkká fajul. A horizont síkjával való metszete egyenes.



7. ábra. A kúpszeletek 4 esete (http://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/forgaskuppalast-sikkal-valo-metszetei/kupszeletek-szemleltetese).

A *7. ábra* mutatja azokat az eseteket, amelyek kérdésünk megválaszolásában számításba jönnek. A kúp tengelyét a Sarkcsillag iránya adja, amely az ábrán ezúttal mindig függőleges. Hozzá képest látjuk elhajolni a metsző síkot, ami a horizont.

Az a) eset azt mutatja, hogy a póluson állva milyen a helyzet. A b) eset egy olyan konstellációt mutat, ahol az adott csillag mindvégig a horizont fölött marad. A c) határeset, amelynél a csillag épp a horizontot érinti egy ponton. Ekkor a metsző sík a kúp egyik alkotójával párhuzamos. A d) pedig olyan csillag esete, amely látható a horizont felett, de a nap egy részében a horizont alatt van. A b) és c) esetek az úgynevezett cirkumpoláris csillagokat jellemzik. Az a), b), c), d) esetek rendre ugyanazon csillagról szólnak, miközben az északi pólustól az Egyenlítő felé haladunk. A d) eset kivételével a csillag mindvégig a horizont felett marad.

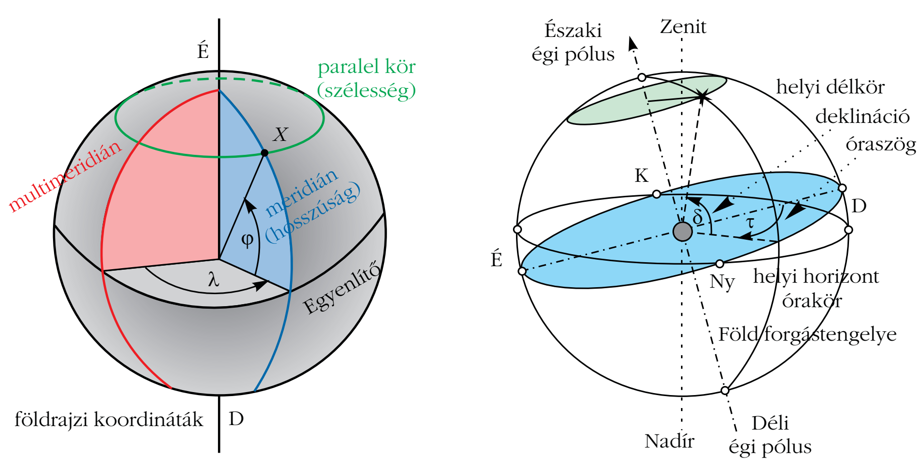
Egyik ábra sem mutatja, de az is nyilvánvaló, hogy a kúp nyílásszöge csillagról csillagra változik. A tengelyhez közeliek kicsi, a távolabbiak nagy nyílásszögű kúpot alkotnak. Van olyan extrém eset is, amelynél a palást egy síkká fajul (az Egyenlítő síkjában), sőt 90 foknál is nagyobbnak adódik a kúp nyílásszöge (a déli félteke csillagainál).

A csillag tengelytől való távolsága, azaz mekkora a kúp nyílásszöge, és a gnómón pólustól való távolsága – ez a horizont helyzetét változtatja a forgástengelyhez képest – dönti el, hogy a négy eset közül melyik érvényes a rajzolt árnyékvonalra.

Földi és égi koordináta-rendszerek

A pontos analízishez két koordináta-rendszert kell ismertetnünk. Az egyik a földi koordináta-rendszer, amely alapján a helyzetünket határozzuk meg, a másik az égi koordináta-rendszer, amely a csillag helyzetét mutatja meg. A földi koordináta-rendszer a Földhöz rögzített két koordinátát, azaz a földrajzi szélességet és a földrajzi hosszúságot jelenti. Számításainkhoz a földrajzi szélesség ismerete elegendő. Ez megadható úgy, hogy meghatározzuk, mekkora φ szöget zár be a Sarkcsillag iránya a horizont síkjával. Az Északi-sarkon 90°, az Egyenlítőn 0° (lásd *2.* és *8. ábrát*).

Az égi koordináta-rendszer hasonló a földihez, de ez a csillagokhoz rögzített, úgynevezett ekvatoriális rendszer. Két koordinátája a rektaszcenzió és a δ



8. ábra. A földi és az égi koordináta-rendszer.

deklináció. Ez utóbbi épp a Sarkcsillag és az adott csillag iránya között bezárt szög pótszögét jelenti. A Sarkcsillag esetében 90°, az égi egyenlítőn levő pontok esetében 0. (Az égi egyenlítő – az ekvátor – a Föld egyenlítősíkja.) A két koordináta-rendszert elképzelhetjük, mint koncentrikus gömböket, közös egyenlítősíkkal, közös pólussal. A belső gömb a Föld, a külső az állócsillagok gömbje. A belső egy csillagnap alatt körbefordul a külsőhöz képest a közös tengelyen.

A φ határozza meg, hogy a Földön északabbra vagy délebbre vagyunk, azaz milyen magasan áll a kúp tengelye, míg a δ, hogy milyen közel van a csillag iránya a Sarkcsillag irányához.

Kérdésünk megválaszolásához az *5. ábrához* hasonló ábrákat kell készítenünk jól megválasztott φ és δ értékekkel. Az ábra jelöléseivel:

$$\varepsilon = \varphi + \delta - 90°. \qquad (1)$$

Az (1) egyenlet a kulcsa annak, hogy milyen kúpszelet keletkezik. φ és δ egyaránt –90° és 90° között változhat, ezért ε értéke –270° és 90° között változhat, ugyanis ε a kúpot metsző sík és a kúp egyik alkotójának hajlásszöge. Ha $\varepsilon > 0$, akkor a metszet kör vagy ellipszis. Ha $\varepsilon = 0$, akkor parabola, $\varepsilon < 0$ esetén hiperbolát kapunk.

Geogebra

A különböző helyzeteket síkmetszetben ábrázoljuk a Geogebra program [2] segítségével. Először egy általános helyzetet válasszunk! Paraméterként felveszszük a φ és δ szögeket, mindkettő –90° és + 90° között változhat. Vízszintesen az X tengelyre helyezzük a H_1 és H_2 horizont vetületét. Kijelöljük a gnómón G csúcsát. Ezen keresztül – a vízszinteshez φ szöggel – felvesszük a pólus irányát az S ponton át. Erre merőlegesen az Egyenlítő síkjának E_1, E_2 vetületét. Ehhez képest δ szöggel a Cs_1 és Cs_2 csillagirányokat, amelyek P_1 és P_2 ponton metszik a horizont vetületét. A beépített φ csúszkával tehát a Föld felületén észak–déli mozoghatunk, valamint a δ csúszkával pedig tetszőleges csillagirányt jelölhetünk ki. Közben a P_1 és P_2 pontok helyzete megfelelő módon változik (*9. ábra*).

A térbeli kettős kúp síkkal történő metszetén a megfelelő kúpszeletek a Dandelin-féle gömbök [3] segítségével mutathatók meg. A két Dandelin-gömb egyaránt érinti a kettős kúp palástját és a metsző síkot. A síkon levő érintési pont az adott kúpszelet F_1 és F_2 fókuszpontja. Könnyű belátni, hogy metszetünkön a P_1, P_2, G háromszög beírt és hozzáírt köre a Dandelin-gömbök vetülete. A háromszög beírt és hozzáírt körének középpontja a megfelelő szögfelezők metszéspontja, amit a Geogebrában könnyedén megszerkesztünk. (Az ábrán a segédvonalakat nem tüntettük fel.) A középpontokból a H_1, H_2 síkra (vetületben egyenesre) emelt merőleges megadja a fókuszpontokat. Ez utóbbi szerkesztés menete a Geogebra algebra-ablakában végigkövethető. A két fókusz és egy kúpszelet pont (F_1, F_2, valamint P_1 vagy P_2) szerkeszthetővé teszi a kúpszeletet. A kúpszelet az ábrán csak vetületben lenne látható, de az X tengely körüli 90 fokos elforgatással valódi nagyságban szerkeszthető.

A Geogebra szerkesztett ábrái sokféleképp menthetők, az egyes képek pdf formátumban akár papíron is megjeleníthetők. Motion gif formátumban mozgó ábra jeleníthető meg, amely valamelyik kijelölt paramétert futtatja adott lépésenként, míg ggb formátumban a teljes szerkesztés megjeleníthető.

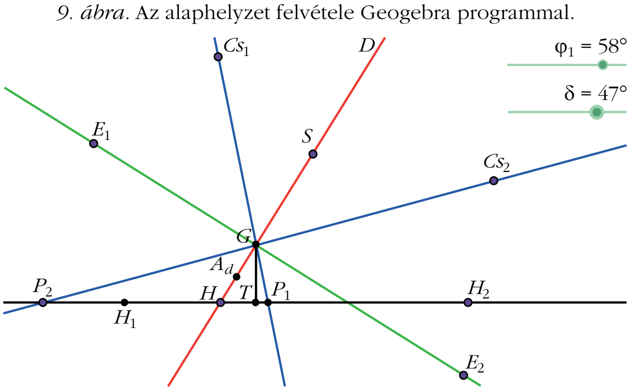
A Geogebra program a https://drive.google.com/file/d/0B6SRh_JT1eq6X3BNTWNjbEhJT28/view?usp=sharing link beírásával letölthető és alkalmazható.

Példák

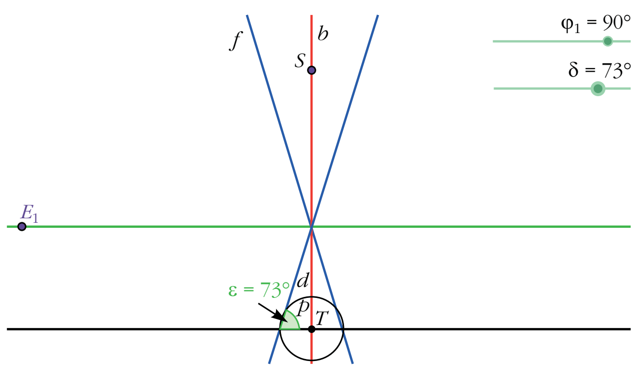
Nézzük meg sorra az egyes eseteket, amelyek nyomán kiderül, hogy miért változik a gnómón csúcsának árnyéka az évszakok és a földrajzi helyzet változása nyomán.

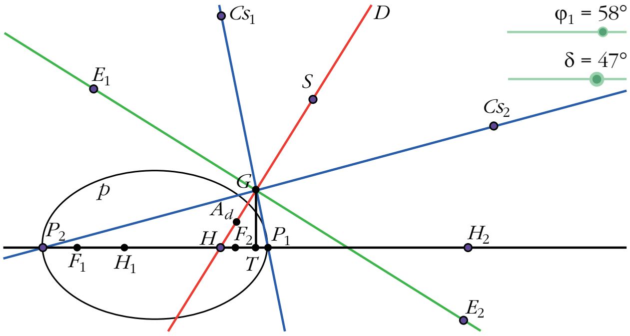
Vegyük a *7. ábra* a) esetét φ = 90°, –90° ≤ δ ≤ 90°. Az Északi-sarkon állunk, fejünk felett a zeniten a pólus, amelyhez nagyon közel van egy csillag, a Sarkcsillag, amelyik nem mozdul el a Föld forgása során (*10. ábra*). A leszúrt pálca csúcsát vele összekötve a talpponthoz jutunk. A horizont merőleges a pólus irányára. A csillagok által vetett árnyék kört fog leírni. A kúpok nyílásszöge 0 és 90° közötti. A horizont a távolban egybeesik az ekvátor síkjával. Az (1) egyen-

9. ábra. Az alaphelyzet felvétele Geogebra programmal.

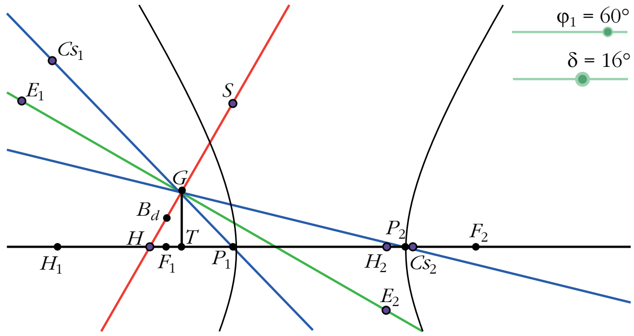


10. ábra. Az Északi-sarkon állva.





11. ábra. Cirkumpoláris csillag vetített árnyéka ellipszis.



12. ábra. Hiperbolaág szerkesztése nem cirkumpoláris csillag esetére.

let szerint itt a φ értéke 90°, ezért ε = δ. Minden csillag vetett árnyéka a horizonttal δ szöget zár be. A sarkcsillaghoz közeliek majdnem merőleges, a horizont síkjához közeliek majdnem 0 fokosat.

Körülbelül 30 fokkal délebbre megyünk. A horizont fölött 60 fokra látszik a sarkcsillag, φ = 60°. Vetített árnyéka egyetlen pont. Az (1) egyenlet szerint ε = δ − 30°. A *11. ábra* φ = 58°, δ = 47° értékekkel ennek felel meg. A *7. ábra* b) esetét valósítjuk meg. A csillag árnyéka ellipszist rajzol. δ változtatásával változik az ellipszis alakja. Közelítve az ε = 0° értékhez a csillag látszó mozgása során északon érinti a horizontot, az árnyék parabolába megy át.

Az ε < 0° esetében a horizont síkja mindkét félkúpot metszi, tehát a kapott árnyékgörbe hiperbola. A csillag ezen a szélességen nem cirkumpoláris. Természetesen árnyék csak a nyíl irányából jövő fénynél keletkezhetne, ezért csak az ábra bal oldali részén látható hiperbolaágat rajzolja az árnyék (*12. ábra*).

Keressünk olyan égitestet, amely az egyenlítő közelében van (δ ≈ 0° közeli érték). A kúp nyílásszöge 90° körüli. A hiperbola ága kiegyenesedik.

A δ = 0° eset különleges. A kúp félnyílásszöge 90°, azaz olyan „elfajult” esettel van dolgunk, ahol a kúp palástja egy síkká alakul, így két sík metszésvonala alakítja az árnyékvonalat, és egyenest kapunk. A *13. ábrán* a δ = 1 állapotot vettünk.

A δ < 0 eddig nem szerepelt. A pólustól indulva nyitjuk szét a kúpot, egyre nagyobb nyílásszögűre. A 90° után továbbfeszítjük. Ismét normális (nem elfajult) kúpot kapunk (*14. ábra*). Az ilyen kúp a *7. ábra* c) esetéhez hasonló metszetet mutat, azzal a különbséggel, hogy a csillag a horizont felett állásakor a hiperbola jobb oldali vonalát rajzolja.

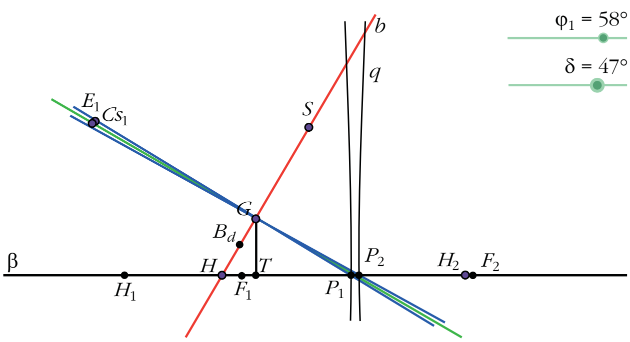
További eseteket terjedelmi okok miatt nem ábrázolunk. Érdekes lehetne az Egyenlítőn vagy a déli féltekén taglalni az egyes csillagok árnyékkúpját.

A gnómón árnyékának alakja, ha a Nap a csillag

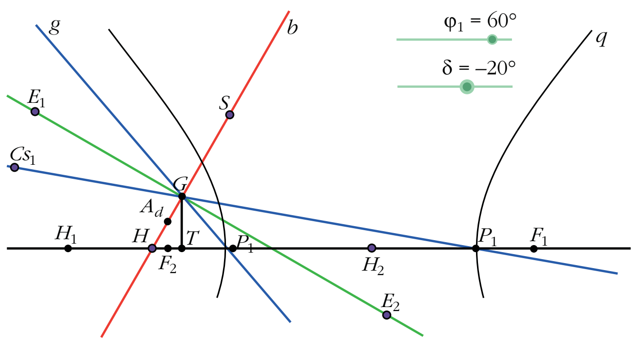
Áttérünk a címünkben megjelölt fő kérdés tárgyalására. Milyen vonalat rajzol a Nap által vetett árnyék? A Nap mindig az ekliptika síkjában van. Az ekvátor ehhez képest 23,5 fokkal dől, mert a Föld forgástengelye 66,5 fokot zár a pályasíkhoz (ekliptikához) képest. Ez okozza az évszakok váltakozását. A Föld keringése során kétszer látjuk a Napot az Egyenlítőn, a tavaszi és őszi napéjegyenlőség idején. Nyáron a Nap az egyenlítő fölött, télen alatta látszik. Szélső helyzetben, a nyári és téli napforduló idején 23,5 fokkal fent, illetve ugyanannyival lent. Az *1. ábra* Siófokon készült képe a nyári napfordulóhoz közeli időpontban készült. A Nap az Egyenlítő felett volt. Az árnyékvonal a *12. ábra* kategóriájába tartozik és hiperbola. Az augusztus 17-én készült kép jóval közelebb állt a napéj egyenlőség időpontjához. A Nap még az Egyenlítő felett, de ahhoz nagyon közel mozgott az égbolton, az árnyékvonal majdnem egyenes. A *13. ábra* mutat hasonlót. A karácsonyhoz közeli mérés Székesfehérváron éppen a téli napforduló idejére esik, ami a *14. ábra* szerinti vonalat eredményezte.

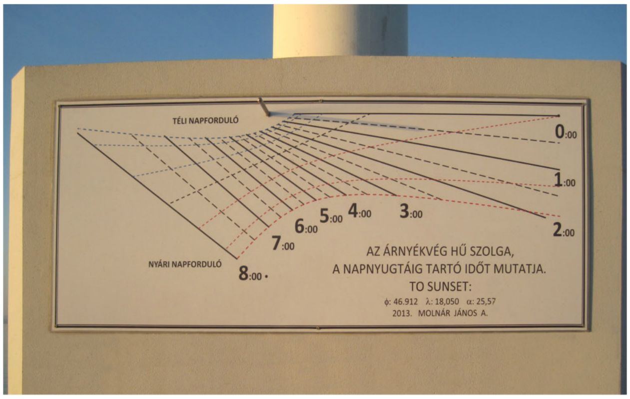
Példáinkban csak néhány esetet elemeztünk, alátámasztva a vizsgált helyzeteket. Érdekes lenne például az Egyenlítőn, vagy az északi sarkkörön az árnyékvonal alakja. A sarkkörön a Nap egy napon nem nyugszik le, és egy másik napon, fél évvel később nem kel

13. ábra. Elfajult eset az Egyenlítőn látható csillag árnyékvonala.



14. ábra. Az Egyenlítő alatt látható csillag árnyékvonala.





15. ábra. Napóra vízszintes gnómónnal a siófoki móló végén.

fel. Másképpen fogalmazva a sarkkörtől északra a Nap cirkumpoláris égitestté válik. Ekkor valóban ki tudja rajzolni a megfelelő ellipszist. A helyzet azonban ennél érdekesebb. A Nap felkel egy ponton, csigavonalban emelkedik, majd süllyedni kezd és lenyugszik. Télen viszont egy időre eltűnik, amikor persze a Déli-sark környékén viselkedik hasonlóan, de ellentétes fázisban.

Méréseinket vízszintes talajon, függőleges pálcával végeztük. Diszkutálhattuk volna a jelenséget függőleges síkkal és arra merőleges pálcával. Ha a siófoki móló végén található napórához elmegyünk, annak függőleges falán találunk egy ilyen vízszintes helyzetű gnómónt, táblájára vésve láthatjuk a különböző időszakokhoz tartozó vonalakat, amelyek természetesen szintén kúpszeletek (*15. ábra*).

Irodalom

1. Hajós György: *Bevezetés a geometriába.* 9. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
2. https://www.geogebra.org/
3. https://hu.wikipedia.org/wiki/Dandelin-g%C3%B6mb

CSATOLT REZGÉSEK

Kedves barátom, Skrapits Lajos tanár úr emlékére

Schipp Ferenc
ELTE IK Numerikus Analízis Tanszék

A szabadon eső rugó fizikája

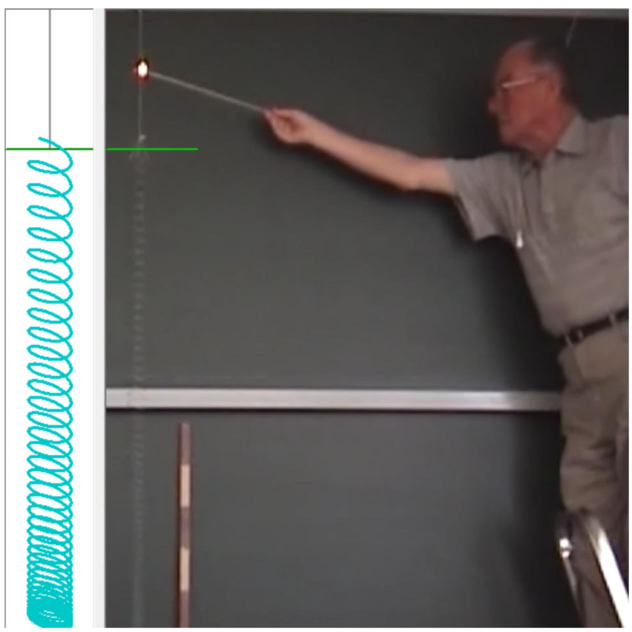
Húsz évvel ezelőtt az ELTE Általános Fizika Tanszék hagyományos téli visegrádi konferenciáján *Skrapits* tanár úr egy érdekes, és első pillanatra meglepő, kísérletet mutatott be. A kísérletet filmen rögzítették, azt *Medgyessy Gábor,* a tanszék mérnöke gondosan megőrizte és rendelkezésemre bocsátotta. Az *1.* és *2. ábra* képei a film alapján készültek.

Az *1. ábra* bal oldalán egy felfüggesztett hosszú rugó látható, amely súlyánál fogva 1,29 méterre megnyúlik és felveszi egyensúlyi helyzetét. Skrapits tanár úr elégeti a tartó szálat és a *2. ábra* 8 felvétele mutatja, mi történik ezután. Látható, a rugó oly módon húzódik össze, hogy az alja egy ideig (0,3 másodpercig) helyben marad. Miután a rugó teteje eléri az alját az egész szabadon esik tovább. A kísérlet során készített felvétel alapján rekonstruált rugóadatokat a *2. ábra* képein tüntettük fel.

A matematikai modellben a rugót N részre bontva az $x_k(t)$ ($t \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, N$) függvényekkel leírjuk az m tömegű részek időbeli mozgását. A k-ik tömegpontra a gravitációs erő és a csatlakozó egy vagy két rugó feszítő ereje hat. Ha $1 < k < n$, akkor a k-ik tömegpontra az alatta és felette lévő rugók feszítő ereje, míg az N-ikre csak a felette lévő, az elsőre pedig rögzített esetben a gravitációs erőn kívül a rögzítő fonál is hat.

Azonos d rugóállandókat feltételezve és az egyes tömegpontokra felírva Newton 2. törvényét a csatolt

1. ábra



Schipp Ferenc Széchenyi-díjas matematikus az ELTE IK Numerikus Analízis Tanszék professzor emeritusa, az MTA doktora. Több mint 150 tudományos dolgozat, két angol nyelvű monográfia és számos egyetemi tankönyv és jegyzet szerzője, illetve társszerzője. Többek között a harmonikus és diadikus analízis, a Fourier-sorok, a rendszer- és irányításelmélet, a numerikus módszerek, a jel- és képfeldolgozás elméleti kérdésivel és alkalmazásaival foglalkozik.