

zsonglörködés – mint sok minden a világon – izgalmas matematikai feladvány, nagyon is komoly dolog. Bármily meglepő, a ma ismert zsonglörmutatványok egy részét matematikusok »találták fel«, nem pedig cirkuszi mutatványosok. 1972-ben a Nemzetközi Zsonglörszövetség elnöke az a *Ronald L. Graham* volt, aki a Magyar Tudományos Akadémia Tiszteleti tagja, 1993-ban az Amerikai Matematikai Társulat elnöke, *Erdős Pál* jó barátja, akivel 30 közös publikációjuk jelent meg.” [2]

Mint a [2] cikk – amelynek elolvasását szintén ajánlom – is rámutat, a zsonglörködés a matematikának is komoly vizsgálati/kutatási területe. Ugyanakkor fizikai szempontból is sok érdekeset tudunk mondani

róla, ráadásul fizikaórán egy mérlegre állva, még ha nem is zsonglörködve – mert még két almával sem olyan könnyű zsonglörködni –, de egyszerűen csak egy almát feldobva és elkapva, a fenti megállapításokat egyszerű súlyméréssel igazolhatjuk, ami igen meggyőző lehet a tanulók számára, rávilágítva arra, hogy ezt a tevékenységet még mélyebben vizsgálhatnánk, mint ahogyan a fentiekben tettük.

Irodalom

1. *Matlap* 7 (2013. szeptember) Kolozsvár, 257. o., F. 60. feladat
2. Czédli Gábor: A III. Béla Gimnáziumtól az egyszerű zsonglör-minták átlagtételéig. *Szeged*, 2007. január 26. <http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/publ.pdf/3.Bela1.pdf>

LISSAJOUS-GÖRBÉK ELŐÁLLÍTÁSA FERDESZÖGŰ REZGÉSEK EGYMÁSRA TEVŐDÉSÉVEL

Inceffy Szabolcs Zsombor
Ócsai Bolyai János Gimnázium

Lissajous-görbék

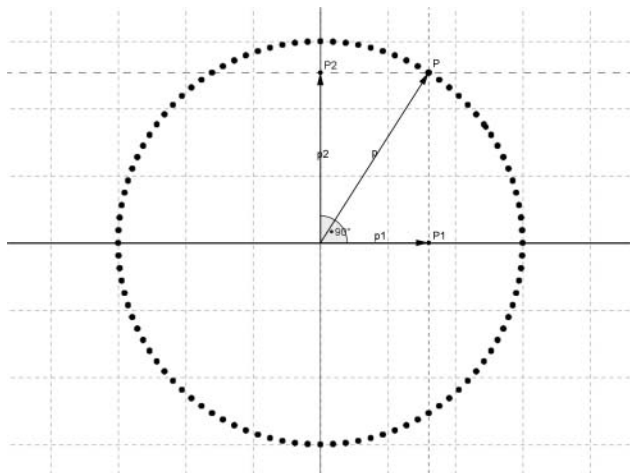
Ismeretes, hogy a Lissajous-görbék merőleges rezgések egymásra tevődéseként jönnek létre. A rezgések amplitúdóját, frekvenciáját, illetve kezdőfázisát változtatva különböző méretű és alakú látványos görbék, alakzatokat kapunk.

A *GeoGebra* (ingyen letölthető) számítógépes program segítségével a Lissajous-görbe a két rezgés egymásra tevődésének nyomvonalaként jön létre.

Az 1. és 2. ábrákon látható P pont helyzetét meghatározó \mathbf{p} vektor a \mathbf{p}_1 és a \mathbf{p}_2 vektorok összege. A \mathbf{p}_1 és \mathbf{p}_2 vektorok hosszát és irányítását a

$$p_1 = A_1 \cos(2\pi f_1 t) = A_1 \sin\left(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)$$

1. ábra. $f_1:f_2 = 1:1$ rezgésszámarányú Lissajous-görbe.



és a

$$p_2 = A_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2)$$

rezgés (kitérés) egyenletek határozzák meg. Ahol A_1 és A_2 a rezgések legnagyobb kitérését, f_1 és f_2 a rezgésszámokat, t az időt, φ_1 és φ_2 a kezdőfázisokat jelölik.

A \mathbf{p} vektor nagyságát Pitagorasz tételével a

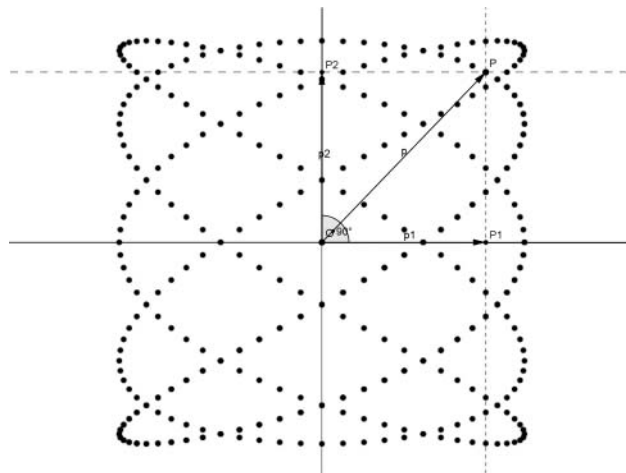
$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

összefüggésből számolhatjuk ki, míg irányát a

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

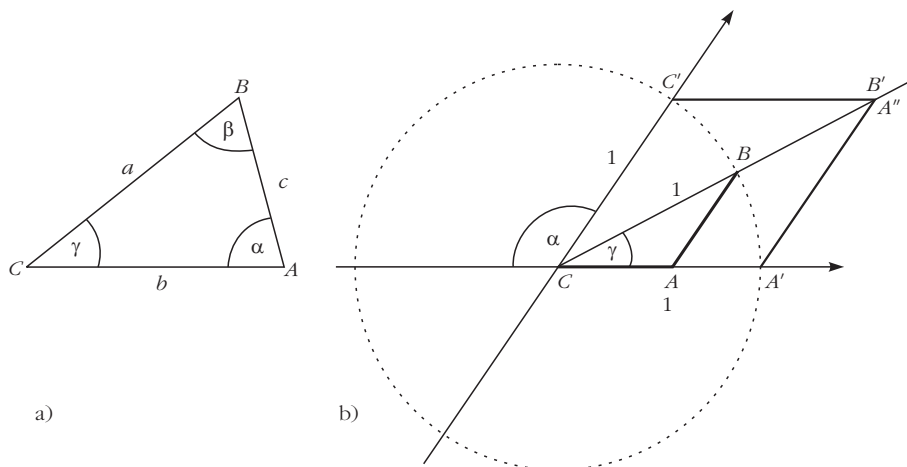
képlettel határozhatjuk meg!

2. ábra. $f_1:f_2 = 5:3$ rezgésszámarányú Lissajous-görbe.



Sajátos esetben, ha $A_1 = A_2$, $f_1 = f_2$ és $\varphi_1 = \varphi_2$, akkor a nyomvonal egy kör (1. ábra), ha $A_1 = A_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$ és $f_1 \neq f_2$, de a rezgésszámok úgy aránylanak egymáshoz, mint a természetes számok ($f_1 : f_2 = n_1 \cdot n_2$), akkor a 2. ábrához hasonló görbét kapunk.

A következőkben megvizsgáljuk a Lissajous-görbék előállítását egymással ferde szöget bezáró rezgések összegeként. Ehhez szükségünk lesz az általános háromszögben, illetve a trigonometrikus (egység sugarú) körben értelmezett általános szögfüggvényekre.



3. ábra. a) általános háromszög és b) egység sugarú (trigonometrikus) kör.

$$\operatorname{tg}_\alpha \gamma = \frac{1}{\operatorname{ctg}_\alpha \gamma} = \frac{\sin_\alpha \gamma}{\cos_\alpha \gamma},$$

illetve

$$\begin{aligned} \sin_\alpha \gamma &= \frac{1}{\sin_\gamma \alpha} = \cos_\alpha \beta = \frac{1}{\cos_\gamma \beta} = \\ &= \operatorname{tg}_\beta \gamma = \frac{1}{\operatorname{tg}_\beta \alpha} = \operatorname{ctg}_\beta \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}_\beta \gamma}. \end{aligned}$$

A szöveget megfelelően felcserélve még öt, a fentiekhez hasonló, összefüggést tudunk felírni.

Az általános szögfüggvények kiszámítása

A szinusz-tétel segítségével könnyen igazolható, hogy

$$\sin_\alpha \gamma = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha},$$

de ennél több is igaz:

$$\sin_\alpha \gamma = \frac{\sin_\delta \gamma}{\sin_\delta \alpha}.$$

Ez az összefüggés az alapszög változtatását teszi lehetővé. Továbbá igaz, hogy

$$\cos_\alpha \gamma = \sin_\alpha \beta = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha},$$

$$\operatorname{tg}_\alpha \gamma = \frac{\sin_\alpha \gamma}{\cos_\alpha \gamma} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} \text{ és}$$

$$\operatorname{ctg}_\alpha \gamma = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma}.$$

A bizonyítások és az általános szögfüggvények egyéb tulajdonságai az irodalomjegyzékben megtalálhatók.

Lássunk egy példát, számítsuk ki a $\operatorname{tg}_{45^\circ} 45^\circ$ értékét! A fenti összefüggés segítségével:

$$\operatorname{tg}_{45^\circ} 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ + 45^\circ)} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Általános szögfüggvények

Az általános szögfüggvények definíciói

A hagyományos szögfüggvényeket derékszögű háromszögben szokás értelmezni, illetve az egységnyi sugarú kör segítségével az értelmezést tetszőleges (forgás) szögekre is ki lehet terjeszteni.

Felvetődik a kérdés, hogy tovább lehet-e általánosítani a szögfüggvényeket, azaz az általános háromszögben lehet-e általános (alakú) szögfüggvényeket értelmezni? A válasz igen, sőt bizonyos esetekben az általános szögfüggvényeket előnyösebben lehet használni, mint egyéb tételeket, de lássuk miről is van szó!

Az általános háromszögben (3.a ábra), a szokásos jelöléseket használva és az α -t tekintve alapszögnek, a következő szögfüggvényeket értelmezhetjük:

$$\sin_\alpha \gamma = \frac{c}{a}, \quad \cos_\alpha \gamma = \frac{b}{a},$$

$$\operatorname{tg}_\alpha \gamma = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{ctg}_\alpha \gamma = \frac{b}{c},$$

ha $\alpha + \gamma \neq 0^\circ$. Természetesen $\alpha, \beta, \gamma \neq 0^\circ$ vagy 180° és $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, illetve $a, b, c \neq 0$.

Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor visszakapjuk a hagyományos szögfüggvényeket, például $\sin_{90^\circ} \gamma = \sin \gamma$.

Általánosabb definíciókat a trigonometriai (egységnyi sugarú) kör segítségével adhatunk meg: ha $|CB| = |CA'| = |C'A''| = 1$, akkor a 3.b ábra szerint (a szakaszok valójában előjeles szakaszok):

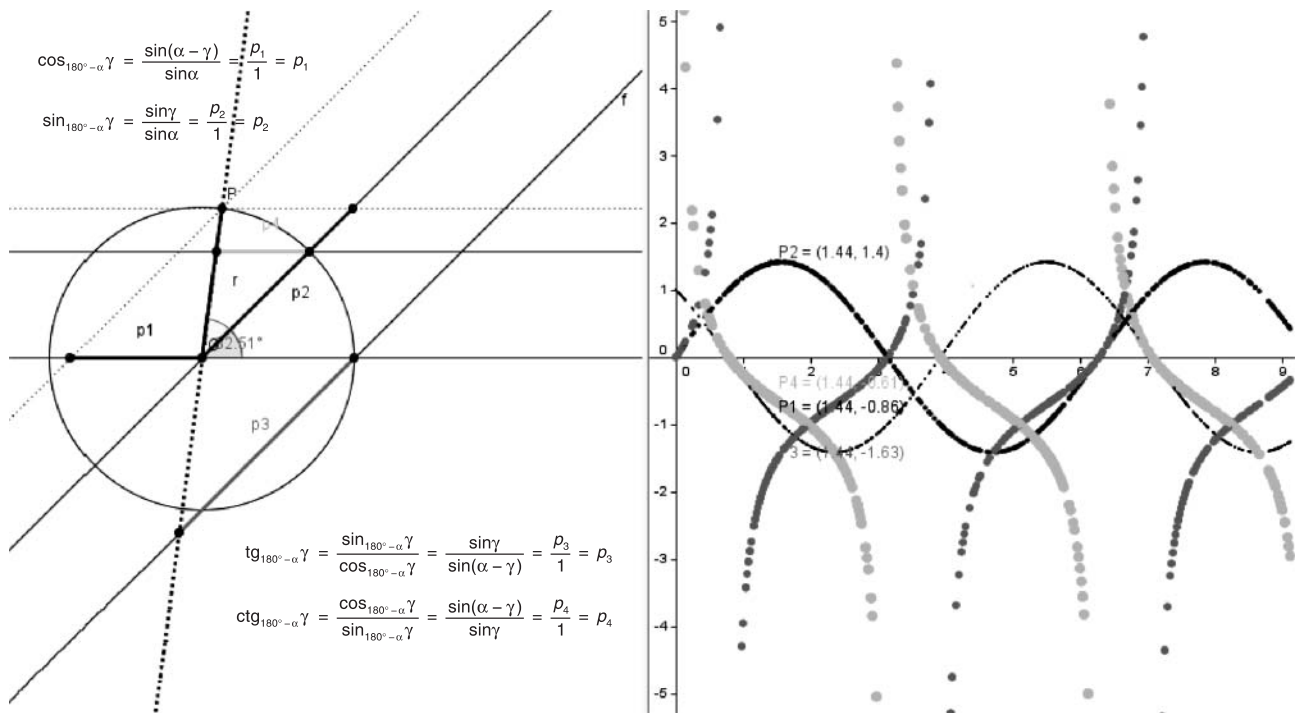
$$\sin_\alpha \gamma = AB, \quad \text{ahol } \alpha \neq k \cdot 180^\circ,$$

$$\cos_\alpha \gamma = CA, \quad \text{ahol } \alpha \neq k \cdot 180^\circ,$$

$$\operatorname{tg}_\alpha \gamma = A'B', \quad \text{ahol } \gamma \neq -\alpha + k \cdot 180^\circ,$$

$$\operatorname{ctg}_\alpha \gamma = C'A'', \quad \text{ahol } \gamma \neq k \cdot 180^\circ \text{ és } k \text{ egész szám.}$$

Egy adott háromszög esetén a definíciók segítségével könnyen bizonyíthatók a következő összefüggések:



4. ábra. Az $\alpha = 45^\circ$ -os alapszögű szögfüggvények grafikus képei.

A programozható számológépek vagy a számítógépek segítségével könnyen kiszámítható az értelmezési tartományon belüli tetszőleges szög tetszőleges alapú szögfüggvényértéke.

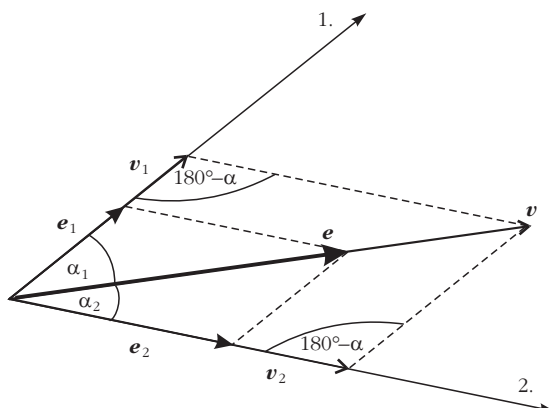
Grafikus kép

Az általános szögfüggvények grafikus képei hasonlóak a 90° -os alapszögűekéhez, csak az értékhelyek és az értékek mások. Az 4. ábrán az $\alpha = 45^\circ$ -os alapszögű szögfüggvények grafikus képei nyomvonalként ábrázolva láthatók.

Alkalmazás

A továbbiakban vizsgáljuk meg az általános szögfüggvények alkalmazását a vektorok ferdeszögű koordináta-rendszerben történő felbontásakor keletkezett kontravariáns koordináták kiszámítására (5. ábra)!

5. ábra. A \mathbf{v} vektor felbontása két egymással α szöget bezáró irány szerint.



Az 1., illetve 2. irányokba eső egységvektorok \mathbf{u}_1 , illetve \mathbf{u}_2 , így a \mathbf{v} vektor irányába eső \mathbf{e} egységvektor:

$$\mathbf{e} = \cos_{180^\circ-\alpha}\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cos_{180^\circ-\alpha}\alpha_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

ahol \mathbf{e}_1 és \mathbf{e}_2 az \mathbf{e} egységvektor 1., illetve 2. irányba eső összetevő vektorai. A $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, ahol $\mathbf{v}_1 = v_1 \mathbf{u}_1$ és $\mathbf{v}_2 = v_2 \mathbf{u}_2$. A kontravariáns koordinátákra, pedig a $v_1 = v \cos_{180^\circ-\alpha}\alpha_1$ és a $v_2 = v \cos_{180^\circ-\alpha}\alpha_2$ összefüggéseket írhatjuk fel. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\alpha = 90^\circ$ esetben, vagyis derékszögű koordináta-rendszerben, visszkapjuk a szokásos koordinátákat.

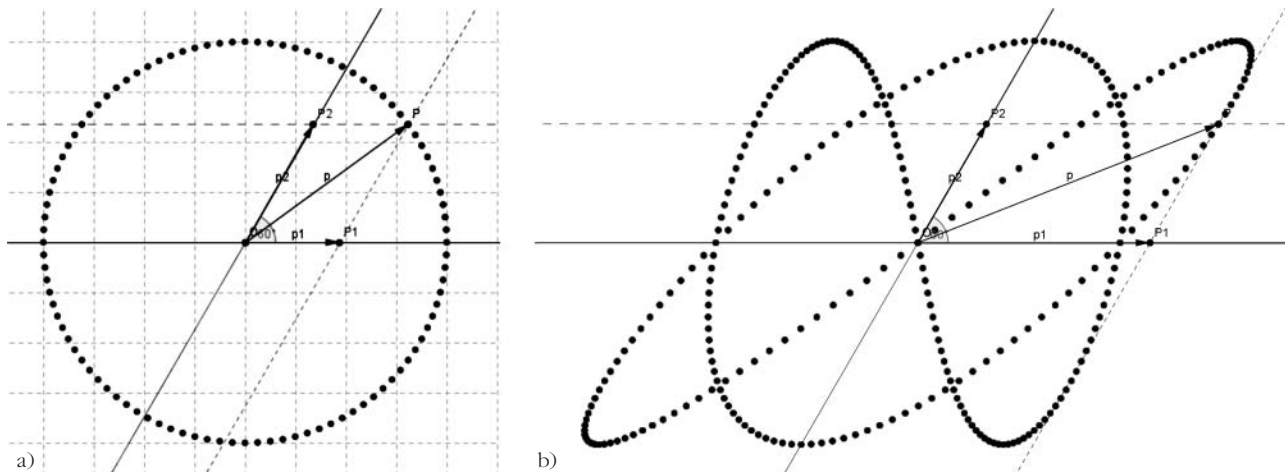
Látható tehát, hogy a kontravariáns koordináták felírása (kiszámítása) olyan egyszerűvé válik, mint derékszögű koordináta-rendszer esetén.

Lissajous-görbék ferdeszögű koordináta-rendszerben

Az általános szögfüggvények, illetve a GeoGebra utolsó alkalmazásaként vizsgáljuk meg az egymással ferde szöget ($\alpha \neq 90^\circ$) bezáró rezgések egymásra tevődését, amely a Lissajous-görbékhez hasonló görbék előállítását teszi lehetővé!

A P pont nyomvonalát továbbra is a \mathbf{p}_1 és \mathbf{p}_2 vektorok összege határozza meg. A \mathbf{p}_1 és \mathbf{p}_2 vektorok hosszát és irányát a

$$\begin{aligned}
 p_1 &= A_1 \cos_{\pi-\alpha}(2\pi f_1 t + \varphi_1) = \\
 &= A_1 \frac{\sin(2\pi f_1 t + \pi - \alpha + \varphi_1)}{\sin(\pi - \alpha)} = \\
 &= A'_1 \sin(2\pi f_1 t + \pi - \alpha + \varphi_1),
 \end{aligned}$$



6. ábra. a) az $f_1:f_2 = 1:1$ és b) az $f_1:f_2 = 2:3$ rezgésszámarányú Lissajous-görbéhez hasonló görbe.

valamint a

$$p_2 = A_2 \sin_{\pi-\alpha}(2\pi f_2 t + \varphi_2) =$$

$$= A_2 \frac{\sin(2\pi f_2 t + \varphi_2)}{\sin(\pi - \alpha)} = A'_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2)$$

rezgés (kitérés) egyenletek határozzák meg, ahol az

$$A'_1 = \frac{A_1}{\sin(\pi - \alpha)} \text{ és az } A'_2 = \frac{A_2}{\sin(\pi - \alpha)}$$

a legnagyobb kitérések. A p vektor nagyságát a koszinusz-tétel (általános Pitagorasz-tétel) segítségével, a

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2 p_1 p_2 \cos \alpha}$$

összefüggésből számolhatjuk ki, míg a vektor irányát a

$$\operatorname{tg}_{\pi-\alpha} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{p_2}{p_1}$$

képletből (egyenletből) határozhatjuk meg.

Sajátos esetben, ha $A_1 = A_2$, $f_1 = f_2$ és $\varphi_1 = \varphi_2$, akkor a nyomvonal egy kör (1. ábra), ha $A_1 = A_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$ és $f_1 \neq f_2$, de a rezgésszámok úgy aránylanak egymáshoz, mint a természetes számok ($f_1:f_2 = n_1:n_2$), akkor a 2. ábrához hasonló görbét kapunk (6.a és 6.b ábra).

Irodalom

1. Budó Á.: *Kísérleti fizika II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
2. Inczeffy Sz.: *A trigonometrikus függvények általános alakjai. A matematika tanítása 3/3* (1995).
3. Inczeffy Sz.: *A GeoGebra számítógépes program felhasználása, Lissajous-görbék előállítására derékszögű, illetve ferdeszögű rezgések egymásra tevődéseként.* Műhelyvezetés az 58. Országos Fizikatanári Ankét és Eszközbemutatón, Hévíz, 2015.

HÍREK – ESEMÉNYEK

A TÁRSULATI ÉLET HÍREI

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat közhasznúsági jelentése a 2014. évről

A Fővárosi Bíróság 1999. április 26-án kelt 13. Pk. 60451/1989/13. sz. végzésével a 396. sorszám alatt nyilvántartásba vett Eötvös Loránd Fizikai Társulatot közhasznú szervezetnek minősítette. A Társulat önálló jogi személy, amely az egyesülési jogról, a közhasznú jogállásról, valamint a civil szervezetek működéséről és támogatásáról szóló 2011. évi CLXXV. törvény („Civil törvény”) keretei között közhasznú civil szervezetként működik. A Fővárosi Törvényszék 2015. április 28-án kelt 13. Pk. 60451/1989/49. sz. végzésével megerősítette a Társulat közhasznú jogállását. Ez a közhasznúsági jelentés az említett jogszabály előírásainak figyelembevételével készült.

I. rész – Gazdálkodási és számviteli beszámoló Mérleg és eredmény-kimutatás

A Társulat 2014. évi gazdálkodásáról számot adó mérleget jelen közhasznúsági jelentés 1. sz. melléklete tartalmazza. A 2. sz. mellékletként csatolt eredmény-kimutatás szerinti 107 444 Ft tárgyévi eredmény a mérlegben tőkeváltozásként kerül átvezetésre. (A 2014. évi teljes bevétel: 41 857 508 Ft, összes kiadás: 41 750 064 Ft.) A 3. sz. melléklet tartalmazza a közhasznú jogállás megállapításához szükséges mutatókat. A mellékletekben szereplő adatokat *Pusztainé Holczer Magdolna* bejegyzett mérlegképes könyvelő állította össze.