AZ AMPÈRE-FÉLE GERJESZTÉSI TÖRVÉNY ALKALMAZHATÓSÁGÁNAK FELTÉTELE

Morvay Bálint, Pálfalvi László
Pécsi Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Fizikai Intézet

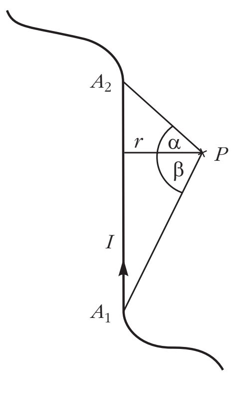
Az Ampère-féle gerjesztési törvény, ellentmondások

A magnetosztatika többek közt stacionárius, azaz időben állandó áramok által keltett mágneses tér leírásával foglalkozik. A Biot–Savart-törvénnyel meghatározhatjuk tetszőleges alakú áramjárta vezető általunk kiválasztott része által a tér tetszőleges pontjában keltett mágneses indukciót. Az *Ampère-féle* gerjesztési törvény (a továbbiakban gerjesztési törvény) – miszerint *a mágneses indukciónak egy tetszőleges zárt görbére egyszeri körüljárással vett integrálja egyenlő a görbe által határolt tetszőleges felületen áthaladó áramok áramerősségei előjeles összegének* μ_0*-szorosával* – nagy szimmetriával rendelkező esetekben használható, amelyekre tipikus tankönyvpélda a végtelen hosszú egyenes vezető, illetve a sűrűn csévélt, hosszú, egyenes tekercs belseje. Természetesen a gerjesztési törvény a Biot–Savart-törvénnyel azonos eredményt ad, hiszen ez utóbbi törvényből az előbbi levezethető [1].

Aki tanulmányaiban a magnetosztatika fejezeteinél jár és a teljes elektrodinamikát nem ismeri, könnyen zsákutcába juthat a gerjesztési törvény alkalmazásával. A Biot–Savart-törvény alkalmazásánál ugyanis megtanulta, hogy egy áramjárta vezető tetszőlegesen kiválasztott darabja által keltett mágneses indukciót mindig ki lehet számolni, ez pusztán technika kérdése. Például egy véges hosszúságú, vékony, egyenes vezető esetén az integrálást csak az A_1A_2 szakaszra (*1. ábra*) kell elvégezni, nem kell foglalkozni a végpontokon kívüli részekkel. Az I áramú egyenes vezetődarabtól r távolságra lévő P pontban a mágneses indukció nagysága

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi r} I(\sin\alpha + \sin\beta), \tag{1}$$

1. ábra. Véges hosszúságú vezető szakasz (A_1A_2), amelynek árama által keltett mágneses tér a vizsgálódás tárgya.

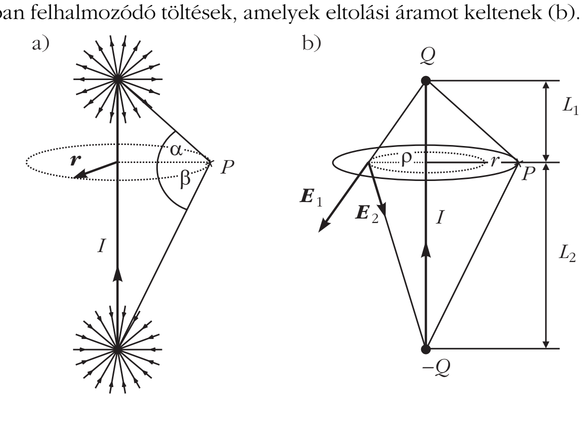


iránya pedig a rajz síkjára (*1. ábra*) merőleges. A szakasz által keltett mágneses tér hengerszimmetrikus, és csak azimutális komponenssel rendelkezik. Ez felbátorít arra, hogy a gerjesztési törvénnyel ellenőrizzük eredményünket. Meglepő módon az eredmény egyezik a végtelen hosszú, egyenes vezető terével, pedig a törvényt a „recept” szerint használtuk. Mi az ellentmondás oka?

Az ellentmondás feloldása I.

A gerjesztési törvény alkalmazhatóságának rejtett kritériuma (ami a szakkönyvek ide vonatkozó fejezeténél nincs megemlítve), hogy vezetési áram(ok) esetén *a kiválasztott zárt görbe által kifeszített, a görbe által határolt bármely felületen az áram(ok)nak át kell folynia* [2]. Tehát a vizsgált vezetéknek önmagába záródónak kell lennie, ezáltal a *kontinuitásnak* (*töltésmegmaradásnak*) teljesülnie kell. Vezetődarab vizsgálata esetében tehát gondoskodnunk kell az áram végpontokhoz történő oda- és elvezetéséről. Az utóbbi időben több különböző változatban megjelent versenyfeladat [3–5] megoldása sugallta a kontinuitás biztosításához az alapötletet. Az önmagába záródó vezető konstruálása helyett a szakasz végeinél a be- és elvezetést gömbszimmetrikusan szerteágazó, végtelenbe vezető nagyszámú „küllővel” oldjuk meg, amelyek mindegyikén azonos erősségű áram folyik (*2.a ábra*). Ezen megoldás azért előnyös, mert a Biot–Savart-törvény ismeretében (de annak explicit alkalmazása nélkül) pusztán szimmetriamegfontolásokkal belátható, hogy a végpontokból sugárirányban kifelé, illetve befelé futó áramok nem adnak járulékot a vizsgált szakasz által keltett hengerszimmetrikus, csak azimutális komponenssel rendelkező mágneses térhez, amit most már a gerjesztési

2. ábra. Az áramvezető szakasz végpontjaihoz csatlakoztatott gömbszimmetrikus küllőszerű elágaztatás (a), illetve a szakasz végpontjaiban felhalmozódó töltések, amelyek eltolási áramot keltenek (b).



törvénnyel meghatározhatunk. Természetesen figyelembe kell venni a küllőkben folyó áramok azon hányadát, amelyek a P ponton átmenő r sugarú, a vezető szakaszra merőleges kör lapját átdöfik. Ezek pedig azok az (összesen I_1, illetve I_2 erősségű) áramok, amelyek a végpontokból nézve $90-\alpha$, illetve $90-\beta$ félcsúcsszögű kúp palástján belül folynak. Felhasználva a kúp térszögét az I_1 és I_2 áramerősségekre

$$I_1 = \frac{I}{2}(1-\sin\alpha) \quad \text{és} \quad I_2 = \frac{I}{2}(1-\sin\beta) \tag{2}$$

értékek adódnak. A gerjesztési törvény szerint:

$$\begin{aligned}\oint \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= B\,2\,r\pi = \mu_0 \sum I = \mu_0\left(I - I_1 - I_2\right) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)\end{aligned} \tag{3}$$

adódik, amelyből a mágneses indukcióra az (1) összefüggéssel azonos értéket kapunk.

Az ellentmondás feloldása II.

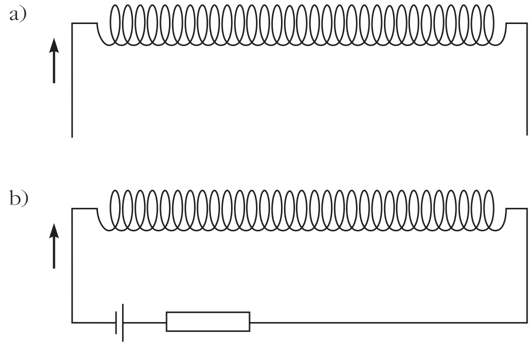
Az előző fejezetben bemutatott módszer lehetőséget adott arra, hogy a Biot–Savart-törvény explicit alkalmazása nélkül a gerjesztési törvénnyel meghatározzuk az egyenes vezető keltette mágneses teret. Az okfejtés során rámutattunk, hogy a peremfeltételek helytelen kezelése ellentmondáshoz vezet, ami az ilyen típusú problémák során vagy a töltések elvezetésével (lásd előző fejezet), vagy a töltés felhalmozódás okozta *eltolási áram* figyelembevételével kerülhető el [6]. A szakadások helyén létrejövő időbeli töltésváltozás következtében időben változó elektromos tér alakul ki, amihez rendelt eltolási áramot – a vezetési áram mellett – az alábbiak szerint figyelembe kell venni (Maxwell IV. törvénye):

$$\oint \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu_0\left(I + I_e\right) = \mu_0\left(I + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}\right), \tag{4}$$

ahol a felületi integrál a kontúr által határolt felületre vonatkozik.

Vizsgált problémánk esetében a végpontokba képzeljünk parányi vezető gömböket, amelyek felületein lévő töltések az adott pillanatban Q, illetve $-Q$. A végpontbeli töltések időbeli változása időben változó, gömbszimmetrikus elektromos teret kelt, amelyek szuperponálódnak. Adott „futó pontban” (*2.b ábra*) a végpontbeli töltések által keltett térerősségek normális komponensei előjelhelyesen:

$$\begin{aligned}E_{1n} &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L_1}{\left(L_1^2+\rho^2\right)^{3/2}}, \\ E_{2n} &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L_2}{\left(L_2^2+\rho^2\right)^{3/2}}.\end{aligned} \tag{5}$$



3. ábra. A hosszú egyenes tekercs mágneses terének meghatározásához használt tipikus ábra (a), illetve annak módosított változata a gerjesztési törvény alkalmazhatóságához (b).

A (4) összefüggésben felhasználva, hogy

$$\int_A \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_0^r \left(E_{1n} + E_{2n}\right) 2\,\pi\,\rho\,\mathrm{d}\rho,$$

illetve felhasználva az (5)-beli összefüggéseket, majd az integrálást elvégezve és figyelembe véve, hogy

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I,$$

illetve, hogy

$$\sin\alpha = \frac{L_1}{\left(L_1^2 + r^2\right)^{1/2}} \quad \text{és} \quad \sin\beta = \frac{L_2}{\left(L_2^2 + r^2\right)^{1/2}}$$

a vezetőszakasz által keltett mágneses indukció értékére az előző fejezetbeli megoldás eredményével, és az (1) összefüggésbelivel azonos eredményt kapunk.

Megjegyezzük, hogy a két bemutatott módszer nem különbözik sarkosan egymástól. Ha a végpontok környezetét nagy kiterjedésű gömbszimmetrikus vezető közegnek tekintjük, akkor az eltolási áram helyett sugárirányú vezetési áramok jelennek meg (amelyek persze szuperponálódnak), ami hasonlít a végtelen számú küllő esetéhez.

Az egyenes tekercs mágneses tere

A hosszú, egyenes, sűrűn csévélt tekercs belsejében kialakuló mágneses tér meghatározására a tankönyvek a gerjesztési törvényt alkalmazzák, és illusztrációként a *3.a ábrához* hasonlót használnak. A fentiek tanulsága tükrében a szakadás okozta problémák elkerülése és a törvény alkalmazhatósága érdekében a *3.b ábrának* megfelelő átalakítást kell elvégezni. Ez a módosítás a kiegészítő vezetékek által keltett, a rajz síkjára merőleges indukciókomponens megjelenését eredményezi. Viszont ez a gerjesztési törvényben (a skalárszorzat miatt) nem kap szerepet, így a longitudinális komponensre a jól ismert eredményt kapjuk. A teljesség kedvéért viszont a tényt, miszerint a gerjesztési törvény érvényességi körének biztosításához a szükséges körülményeket meg kell teremteni (azaz a *3.b ábra* szerinti elrendezést kell tekinteni), hangsúlyozni kell, hogy az említett, a rajz síkjára merőleges indukciókomponensről nem kapunk információt.

Rámutattunk, hogy („álöltözetben”) magnetosztatikai problémák megoldása során körültekintőnek kell lenni az Ampère-féle gerjesztési törvény alkalmazása során. Az érvényességi kör az elektrodinamika-tankönyvek későbbi fejezetei ismeretében kristályosodik ki. Az okfejtést egy konkrét fizikai problémán keresztül bontottuk ki. Az általános tanulság levonása mellett bemutattuk a véges hosszú egyenes vezető szakasz mágneses terének gerjesztési törvényen alapuló, a Biot–Savart-törvény explicit alkalmazását mellőző levezetését. Az elemzett problémák során levont következtetések tükrében kijelenthetjük, hogy az elektrodinamika-kurzusok során az Ampère-féle gerjesztési törvény első felbukkanásakor már érdemes felhívni a hallgatóság figyelmét a tankönyvekben (ezen a ponton még) nem hangsúlyozott követelményre, ugyanis pusztán a „*stacionárius* áramok mágneses tere” fejezetcím nem biztos, hogy elegendő.

Irodalom

1. J. D. Jackson: *Klasszikus elektrodinamika*. Typotex, Budapest, 2004.
2. D. Barchiesi: Didactical formulation of the Ampère law. *Eur. J. Phys. 35* (2014) 038001.
3. Gnädig P.: A 2014. évi Eötvös-verseny 3. feladata
4. Gnädig P.: A 2014. évi Ortvay-verseny 17. feladata
5. Gnädig P., Honyek Gy., Vígh M.: *333 furfangos feladat fizikából* Typotex, Budapest, 2014.
6. M. Landini: About the physical reality of „Maxwell's displacement current” in classical electrodynamics. *Progress in Electromagnetics Research 144* (2014) 329.

PENDULUMHULLÁM, AVAGY SZERELEM ELSŐ LÁTÁSRA

Lendvai Dorottya, Czövek Márton, Forrás Bence
Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest

„Egy húron pendulum!”

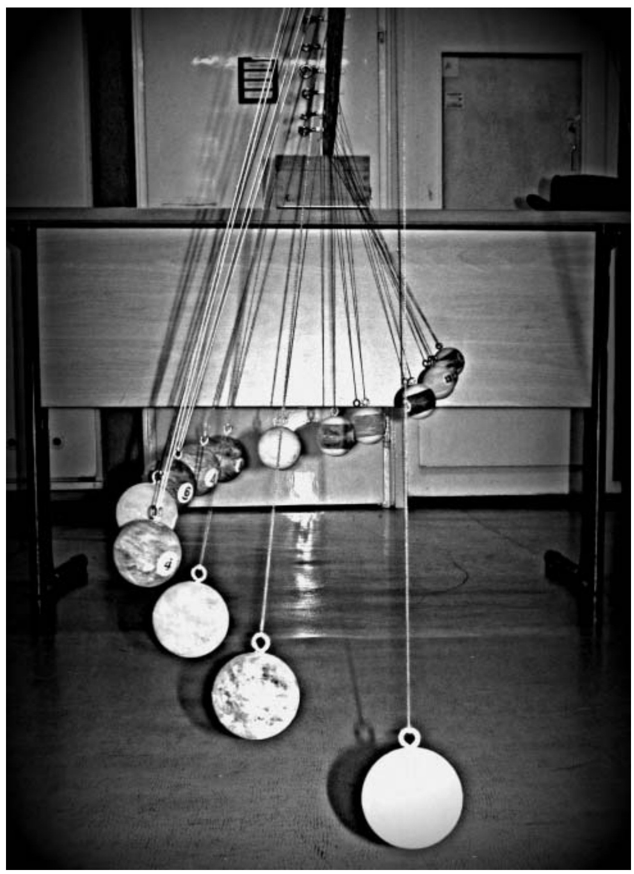
Valamikor 2013 őszén találkoztam először a pendulumhullám jelenségével, aminek egy pillanatát örökítettük meg a később elkészült eszközön (*1. ábra*).

Bevallom, első látásra beleszerettem. Azóta az eszköz elkészítésén, fizikai-matematikai leírásán és a benne rejlő további lehetőségeken töröm a fejem. A budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium nyolcadikos, valamint tizenkettedikes speciális matematika tantervű osztályainak tanulóival – fizikatábori projektmunka keretében – álltunk neki részletesebben foglalkozni ezzel a jelenséggel.

A fizikatáborról[1]

A helyszín legtöbbször egy előadótermekkel, tantermekkel felszerelt erdei iskola. A gimnázium 40-50 diákja vesz részt a minden évben megrendezésre kerülő fizikatáborban. A 13-19 éves tanulók meghívásos alapon kerülnek be a négynapos programba, amely komoly munkát, felkészülést és odafigyelést igényel. A tábort néhány hetes-hónapos előzetes felkészülés előzi meg, amelynek ideje alatt a tanulók egy közösen kiválasztott téma keretében csoportokban dolgoznak tanári irányítás segítségével. Egyéb programok mellett az elkészült munkákat is a táborban mutatják be egymásnak a diákcsoportok. A kidolgozandó projektnek nincsen előre kötött formája. Lehet ez egy vagy több kísérlet, mérés, kiértékelés bemutatása, kísérleti eszköz építése, számítógépes szimuláció elkészítése stb., esetenként történeti háttérrel vagy elméleti, számítási

1. ábra. Pendulumhullám (elölnézet).



Lendvai Dorottya az ELTE Fizika Doktori Iskola hallgatója. *Czövek Márton* és *Forrás Bence* az informatikai hátteret írták és a jelenséghez kapcsolódó szimulációt készítették, ők a Berzsenyi Dániel Gimnázium 2014-ben végzett tanulói, jelenleg a BME VIK, illetve az ELTE TTK hallgatói.

[1] http://fizika.berzsenyi.hu/fizika-tabor