

# ALKALMAZHATÓ-E A BIOT–SAVART-TÖRVÉNY NEM ZÁRÓDÓ »ÁRAMKÖRÖKRE« – I. RÉSZ

Gnädig Péter  
ELTE Fizikai Intézet

Ha a címben feltett kérdésre az lenne a válasz, hogy *nem*, akkor ez az írás itt akár be is fejeződhetne. Ha a válasz egyszerűen *igen* volna, akkor se kellene folytatnunk a fejtegetéseinket. Az igazság – mint oly sok más esetben is – a két szélsőséges nézet között van! Az eredetileg egyenáramokra és zárt áramkörökre megfogalmazott híres törvény – mint az a továbbiakból kiderül – kiterjeszthető *nem záródó* áramokra is. Az áramok forrásmentességének feladása természetesen együtt jár azzal, hogy bizonyos helyeken a töltések felhalmozódnak (vagy megritkulnak), tehát sűrűségük időben változik. Emiatt a töltésekhez kötődő elektromos tér sem lehet sztatikus, és – mint azt Maxwell<sup>1</sup> vizsgálatai (1861) óta tudjuk – az időben változó elektromos terek speciális megfontolásokat igényelnek.

A cikk további részében erről az általánosításról lesz szó. A gondolatmenet lényege – a szerző reményei szerint – a felsőbb matematika (elsősorban a vektoranalízis formalizmusának) ismerete nélkül is elmagyarázható és megérthető. Mégis – azok kedvéért, akik jártasak az elméleti elektrodinamika ezen területének matematikai nyelvezetében – apró betűvel szedve bizonyos formális levezetések is megadunk, hogy képletekkel is alátámaszthassuk az esetleg heurisztikusnak tűnő érvelésünket. Ezeket a részeket első közelítésben akár át is ugorhatja az Olvasó.

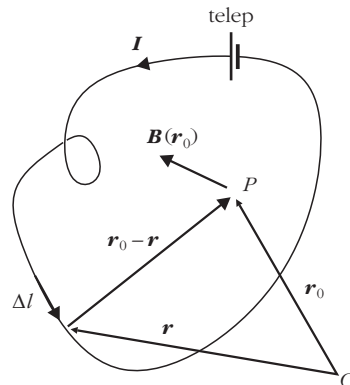
## A Biot–Savart-törvény zárt áramkörökben folyó egyenáramokra

Tekintsünk egy  $I$  erősségű, időben állandó nagyságú árammal átjárt *zárt* vezetőt (1. ábra)! A görbét gondolatban feloszthatjuk sok kis darabkára, és az egyes darabokat (az áram irányába mutató)  $\Delta \mathbf{l}$  vektorokkal jellemezhetjük. Az áramjárta vezető által egy tetszőleges  $P$  pontban létrehozott mágneses indukció vektorát a Biot–Savart-törvény<sup>2</sup> szerint jó közelítéssel a következő összeg adja meg:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{\text{a görbére}} \frac{\Delta \mathbf{l} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3}, \quad (1)$$

<sup>1</sup> James Clerk Maxwell (1831–1879)

<sup>2</sup> Jean-Baptiste Biot (1774–1862) és Félix Savart (1791–1841) körülbelül 1820-ban fogalmazta meg az áramok és a mágneses tér kapcsolatát megadó, ma a nevüket viselő törvényt.



1. ábra

és a felosztás finomításával (integrálra való áttéréssel) az eredmény egyre pontosabbá válik.

Általános esetben, ha az áram nem egy vékony vezetékben, hanem „szétkenten”, valamilyen  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  áramsűrűség-vektorral megadott módon folyik, akkor a Biot–Savart-törvény így írható fel:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} dV. \quad (2)$$

A mágneses indukciómező ezen alakjáról bebizonyítható, hogy eleget tesz a

$$\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

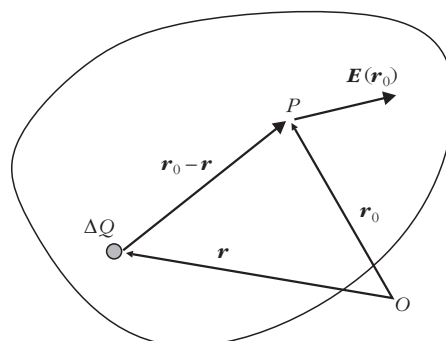
(magnetosztatikában érvényes) Maxwell-egyenletnek.

A Biot–Savart-törvény (1) alakja bizonyos hasonlóságot mutat a kiterjedt, térben elosztott töltésrendszer elektrosztatikus terét megadó

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \sum_{\mathbf{r}} \frac{\Delta Q(\mathbf{r})}{4\pi \epsilon_0} \frac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} \quad (3)$$

kifejezéssel (2. ábra).

2. ábra



Folytonos,  $\rho(\mathbf{r})$  töltéssűrűséggel jellemzett töltéeloszlásra a (3) összeg az

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r})(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} dV \quad (4)$$

térfogati integrálhoz tart. Az elektromos térerősség ezen alakjáról bebizonyítható, hogy elegendő tesz a

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

Maxwell-egyenletnek.

A (3) összeg azt fejezi ki, hogy az  $\mathbf{r}$  helyen lévő,  $\Delta Q$  nagyságú „kicsiny töltés” az  $\mathbf{r}_0$  helyen

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q(\mathbf{r})(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3}$$

Coulomb-teret hoz létre, és ezeket az „elemi tereket” összegezve megkaphatjuk a teljes töltésrendszer által kialakított elektromos térerősséget az  $\mathbf{r}_0$  vektorral jellemzett pontban.

Csábító gondolat, hogy az (1) összeget is így értelmezzük: az áramvezető minden egyes kicsiny (az  $\mathbf{r}$  helyen lévő) darabkája (úgynevezett *árameleme*) létrehozza az  $\mathbf{r}_0$  vektorral jellemzett pontban a maga

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\Delta \mathbf{l} \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3}$$

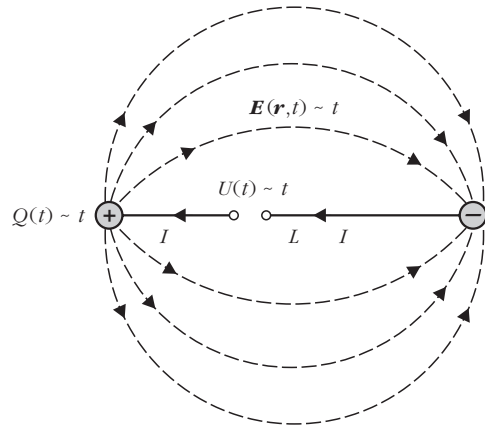
„elemi mágneses terét”, hiszen ezek összegéből áll elő a vizsgált pontban a teljes mágneses indukció vektora.

Ez az értelmezés azonban nem indokolt (legalábbis nem megalapozott), hiszen a töltésrendszertől eltérően az *egyenáram* nem darabolható fel kicsiny, nem záródó darabokra, ezek – a magnetosztatika keretei között – fizikailag megvalósíthatatlan, a *Természetben nem létező* állapotokat írnának le! (Hasonló helyzetbe kerülünk, amikor a magnetosztatikai erőhatásokat, például két mágneses dipól kölcsönhatását, hipotetikus mágneses töltések – monopólusok – erőhatásaira vezetjük vissza. Ez az eljárás számítástechnikailag néha hasznos lehet, de fogalmilag megalapozatlan és félrevezető, emiatt újabban a tankönyvek kerülnek is a „mágneses töltések” használatát.)

## Időben állandó, de nem záródó áramok

Próbáljuk meg általánosítani a Biot–Savart-törvényt nem záródó áramokra! A magnetosztatikában megszokott helyzethez az áll a legközelebb, ha az áramok időben állandóak. (Ezt a feltételt később lazítjuk; megmutatjuk, hogy nem szükséges a szigorú időfüggetlenség, elegendő, ha az áramok „lassan” változnak.) Ilyen áramelrendeződés esetén a vezetékek végeinél – természetesen – a töltések mennyisége nem maradhat állandó, hanem időben változnia kell, méghozzá egyenletesen növekszik vagy csökken.

Vizsgáljunk meg egy konkrét példát! Kössünk össze két kicsiny, egymástól  $L$  távolságban lévő vezet



3. ábra

gömböt (a továbbiakban ezeket gömbkondenzátoroknak nevezzük) egy egyenes vezetővel, és a vezetékben hozzunk létre egyenáramot. (Az áram állandósága megfelelő szabályozással, a vezetékbe kapcsolt feszültségforrás feszültségének alkalmas változtatásával, vagyis áramgenerátorral egy bizonyos ideig ténylegesen megoldható.) A két kondenzátor időben egyenletesen töltődik, a közöttük kialakuló elektromos dipóltér erőssége is időben egyenletesen változik (3. ábra). (Természetesen a kicsiny gömbök kapacitása nagyon kicsi, tehát a rájuk áramló töltések hatására a feszültségük igen hamar nagyon nagygyá válhat. Ez azonban csak technikai nehézséget jelenthet, az elvi kérdéseket tisztázni kívánó gondolat kísérletet nem teszi ellentmondásossá.)

Vajon milyen mágneses tér alakul ki a véges szakaszon folyó áram hatására? A Biot–Savart-törvény (1) alakját használva (integrálásra áttérve) kiszámíthatjuk a mágneses indukció értékét, ami például az elrendezés felezősíkjában a vezetéktől  $r_0$  távolságban az ábra síkjára merőleges irányú és

$$\begin{aligned} B(r_0) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{r_0}{(x^2 + r_0^2)^{3/2}} dx = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \frac{1}{\sqrt{1 + 4r_0^2/L^2}} \end{aligned} \quad (5)$$

nagyságú lesz.

Helyes ez az eredmény, vagy valamit elrontottunk? J. C. Maxwell felismerése óta tudjuk, hogy az időben változó elektromos tér úgynevezett eltolási áramot képvisel, ami  $\mathbf{j}_{\text{eltolási}} = \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$  áramsűrűséggel egyenértékű (itt  $\dot{\mathbf{E}}$  az elektromos térerősség változási sebességét jelöli). Ez az áram és a valódi (a töltések mozgásához köthető) áram együtt még akkor is forrásmentes (vagyis  $\operatorname{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{eltolási}}) = 0$ ), ha az áramok és töltések időben változnak.

Levezethető, hogy a Biot–Savart-törvény ebben az esetben (állandó áramerősségeket feltételezve) éppen olyan alakú, mint a magnetosztatikában, de a valódi áramok mellett az eltolási áramokat is figyelembe kell venni:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}_{\text{eltolási}}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} dV. \quad (6)$$

(Megjegyezzük, hogy az elektromos térerősségek időben egyenletes változása miatt az eltolási áram is időfüggetlen, tehát a kialakuló mágneses mező sem változik időben. Emiatt Faraday-féle indukciós jelenségekkel nem kell foglalkoznunk.)

Mennyivel módosítja az eltolási áram például az (5) képletben megadott eredményt, ami még csak a valódi áram járulékát tartalmazza? A válasz meglepő: *semmennyivel!* A két gömbkondenzátor ugyanis minden időpillanatban gömbszimmetrikus Coulomb-teret hoz létre, az eredő elektromos tér ezen két erőter szuperpozíciója. Ugyanilyen jellegű az eltolási áram is: két gömbszimmetrikus vektormező összege, amelynek forrása azonban nem a töltés, hanem a töltés *változási sebessége*. Másrészt viszont egy gömbszimmetrikus árameloszlás járuléka a Biot–Savart-törvényben biztosan nulla, hiszen az eredmény csak a gömb középpontjából a vizsgált pontba mutató vektortól függhet, és egyetlen vektorból nem hozható létre olyan vektor (úgynevezett *axiálvektor*), amelynek iránya függ a jobbkékszabály teljesen önkényes iránymegállapodásától. Márpedig a mágneses indukció is axiálvektor, amely vagy egy másik axiálvektorból (például egy anyagdarabka mágnesezettségéből), vagy két „valódi” vektor vektoriális szorzatából állítható elő. (Az utóbbira példa a Biot–Savart-formula.) Gömbszimmetrikus árameloszlás esetén viszont a vektoriális szorzás művelete nem szerepelhet a végképletben, ahhoz két különböző irányú vektorra lenne szükség.

1. Formálisan is beláthatjuk, hogy az eltolási áramok *tetszőleges töltéseloszlás* esetén is *nulla* járulékot adnak (6) jobb oldalának második tagjában, így az a tag elhagyható, és mindössze a valódi áramokat tartalmazó, az eltolási áramokról „megfelelkező” Biot–Savart-képlet is *belyesen* adja meg a mágneses indukciót. A kérdéses tag ugyanis (4) felhasználásával

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}_{\text{eltolási}}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} dV = \\ & = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi} \iiint \frac{\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} dV = \\ & = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2} \iiint dV' \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{r}') \iiint dV \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3 |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} \end{aligned}$$

alakra hozható, és ennek második integrálja (amely nem függ a töltések eloszlásától) szimmetriakokkból mindig nulla.

2. Egy másik formális bizonyítást is adunk arra, hogy az eltolási áramokat nem kell figyelembe venni a Biot–Savart-integrálban. A Maxwell-egyenletek a skalár- és vektorpotenciálok alkalmazásával többféle módon is átfogalmazhatók. Ha a fizikailag mérhető elektromos és mágneses térerősségeket

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad (7)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \dot{\mathbf{A}} \quad (8)$$

alakban keressük ( $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ -t vektorpotenciálnak,  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ -t pedig ska-

lárpotenciálnak nevezik), akkor a  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  és  $\text{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$  egyenletek automatikusan teljesülnek, a másik két Maxwell-egyenlet pedig

$$-\Delta \Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho + \text{div} \dot{\mathbf{A}}, \quad (9)$$

valamint

$$-\Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 (-\text{grad} \dot{\Phi} - \dot{\mathbf{A}}) - \text{grad} \text{div} \mathbf{A} \quad (10)$$

alakba írható. (A fenti képletekben

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

a Laplace-operátort, a betűk feletti „pont” pedig az idő szerinti deriválást jelöli.)

Az elektromos és mágneses térerősségek nem határozzák meg egyértelműen a potenciálokat, azok választásában nagyfokú szabadságunk van (ezt nevezik *mértékinvarianciának*). Kiköthetjük például, hogy a vektorpotenciál legyen forrásmentes (Coulomb-mérték), vagyis teljesüljön a  $\text{div} \mathbf{A} = 0$  feltétel. A Coulomb-mérték különösen hasznos a sztatikus erőterek leírásánál, amikor az összes időderivált nulla, és így az egyenletek viszonylag egyszerűvé válnak:

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}),$$

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

A megoldásuk (a szuperponált Coulomb-potenciálok mintájára):

$$\Phi(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} dV, \quad (11)$$

illetve

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} dV, \quad (12)$$

ahonnan gradiens- és rotációképzéssel megkaphatjuk az ismert (4) és (2) képleteket.

Ha időben állandó, de nem forrásmentes árameloszlásokat vizsgálunk, akkor a töltéssűrűség, az elektromos térerősség és a skalárpotenciál az idővel arányosan változik, első időderiváltjuk tehát nem tűnik el. (A magasabb időderiváltak, valamint  $\dot{\mathbf{A}}$  és  $\dot{\mathbf{B}}$  továbbra is elhagyhatók.) Ilyenkor – még mindig Coulomb-mértéket használva – a (10) egyenlet helyett a következőt írhatjuk fel:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 (\mathbf{j} - \epsilon_0 \text{grad} \dot{\Phi}) = -\mu_0 (\mathbf{j} + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}) = -\mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{eltolási}}).$$

Ha ebből a képletből számoljuk ki a mágneses indukciót, akkor éppen a (6) összefüggéshez jutunk, ami a valódi áramok mellett az eltolási áramok hatását is figyelembe veszi. Megmutatjuk azonban, hogy ez a képlet helyes ugyan, de az eltolási áramokat *feleslegesen* veszi számításba, azok járuléka a Biot–Savart-törvényben *mindig nulla*.

Válasszunk egy – a Coulomb-mértéktől eltérő – kikötést a potenciálokra; legyen

$$\text{div} \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \dot{\Phi} = 0. \quad (13)$$

Ilyen mértékfeltétel (az úgynevezett *Lorentz-mérték*) teljesülése esetén (kihasználva, hogy  $\dot{\Phi} = 0$  és  $\dot{\mathbf{A}} = 0$ ) az egyenletek:

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t), \quad (14)$$

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (15)$$

Az ezekből kiszámított  $\mathbf{E}$  és  $\mathbf{B}$  terek ugyanazok, mint a Coulomb-mérték alkalmazásával kapott terek, pedig *az eltolási áram nem szerepel bennük*. Ezek szerint az eltolási áram járuléka a Biot–Savart-törvényben (az adott feltételek teljesülése esetén) *tetszőleges árameloszlásra nulla*.

## Vektormezők felbontása örvénymentes és forrásmentes összetevőkre

A vektoranalízis ismert állítása, hogy tetszőleges (kelően „sima”, tehát megfelelő differenciálhatósági tulajdonságokkal rendelkező)  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  vektormező felbontható egy *örvénymentes* és egy *forrásmentes* mező összegére:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}^{(\text{long})}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}^{(\text{transz})}(\mathbf{r}),$$

ahol az örvénymentes („longitudinális”) összetevőre

$$\text{rot } \mathbf{v}^{(\text{long})}(\mathbf{r}) = 0,$$

a forrásmentes („transzverzális”) összetevőre pedig

$$\text{div } \mathbf{v}^{(\text{transz})}(\mathbf{r}) = 0$$

teljesül. (Az elnevezéseket – fizikus szemmel nézve – az indokolja, hogy például egy rugalmas test deformációinál az elmozdulásmező örvénymentes része írja le a longitudinális hullámokat, a forrásmentes összetevő pedig a transzverzális hullámokat.) Az említett vektormezők a helyvektoron kívül az időtől is függhetnek, ezt a függést azonban a képletekben explicit módon nem jeleztük.

A vektormezőket (és azok felbontását) úgy tehetjük egyértelművé, ha (az esetleg kielégítendő határfeltételek mellett) megadjuk a mezők forrás- és örvényerőséget, vagyis a

$$\text{div } \mathbf{v}^{(\text{long})}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad \text{és} \quad \text{rot } \mathbf{v}^{(\text{transz})}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r})$$

egyenletekben szereplő  $f(\mathbf{r})$  skálár- és  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  vektormezőket, vagyis az összetevők forrás- és örvényerőséget. Ezek ismeretében a mezők így állíthatók elő:

$$\mathbf{v}^{(\text{long})}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{f(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

illetve

$$\mathbf{v}^{(\text{transz})}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$

Az első integrál a Coulomb-törvényre, a második pedig a Biot–Savart-törvényre emlékezteti a fizikusokat, de a képletek a bennük szereplő mennyiségek fizikai jelentésétől függetlenül más esetekben is érvényesek.

Térjünk most rá egy fizikai alkalmazásra: bontsuk fel az  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  elektromos térerősséget longitudinális és transzverzális összetevőkre! A Maxwell-egyenletek miatt

$$\text{div } \mathbf{E}^{(\text{long})}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \varrho(\mathbf{r}),$$

$$\text{rot } \mathbf{E}^{(\text{transz})}(\mathbf{r}) = -\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{r}).$$

Látható, hogy az elektromos mező longitudinális összetevőjének forrása a töltéssűrűség, ezt az összetevőt

vőt tehát a (4) egyenletnek megfelelő integrállal állíthatjuk elő és jogosan nevezhetjük Coulomb-résznek. A másik (transzverzális) rész, amelynek örvényerősége a mágneses indukcióvektor időderiváltjával arányos, hasonló megfontolásból Faraday-összetevőnek nevezhető:

$$\mathbf{E}^{(\text{long})}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}^{(\text{Coulomb})}(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{E}^{(\text{transz})}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}^{(\text{Faraday})}(\mathbf{r}).$$

Az elektromos térerősség mellett annak időderiváltja, tehát (egy arányossági tényezőt leszámítva) az eltolási áram is felbontható két összetevőre:

$$\mathbf{j}_{\text{eltolási}}^{(\text{long})}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{j}_{\text{eltolási}}^{(\text{Coulomb})}(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{j}_{\text{eltolási}}^{(\text{transz})}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{j}_{\text{eltolási}}^{(\text{Faraday})}(\mathbf{r}).$$

## Mi az eltolási áram szerepe?

A fentiekben beláttuk, hogy időfüggetlen, de nem feltétlenül forrásmentes áramok ismeretében a Biot–Savart-törvény segítségével kiszámíthatjuk a mágneses indukciót a tér tetszőleges pontjában, és a számítás során csak a *ténylegesen folyó* áramokkal kell törődnünk, az úgynevezett *eltolási áramokat nem* kell figyelembe vennünk. Felmerül a kérdés, hogy akkor hol kapnak szerepet az eltolási áramok, milyen körülmények között kell számolnunk ezekkel is.

A mágneses mező nemcsak a Biot–Savart-törvény felhasználásával, hanem bizonyos – szerencsésen egyszerű, szimmetrikus – esetekben közvetlenül a Maxwell-egyenletekből, azok integrális alakjából is meghatározható. Gondoljunk csak a hosszú, egyenes vezetőre, vagy egy vékony toroid tekercsre. Ebben az eljárásban valamely zárt görbére képezett mágneses körfeszültséget hasonlítjuk össze a görbére illesztett felületen átfolyó áramok fluxusával:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{r} = \mu_0 \iint (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{eltolási}}) d\mathbf{f}. \quad (16)$$

A fenti képlet jobb oldalán a valódi áramok mellett a  $\mathbf{j}_{\text{eltolási}} = \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$  eltolási áramsűrűség is megjelenik, annak figyelmen kívül hagyása általában *hibás* eredményre vezetne. A (16) összefüggés lokális alakja:

$$\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{j}_{\text{eltolási}}(\mathbf{r}), \quad (17)$$

amint az a Stokes-féle integráltétel segítségével könnyen belátható.

Vajon ha *az eltolási áramok nélkül* felírt Biot–Savart-törvény alapján, vagyis a

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (18)$$

képlet felhasználásával számítjuk ki a mágneses indukciómezőt, összhangban lesz-e az az eltolási áramot is tartalmazó (17) Maxwell-egyenlettel? Érdekes

módon a válasz: *majdnem igen!* A (18) kifejezés örvényerőssége (rotációja) annak ellenére tartalmazza az eltolási áram egyik, lassú változások esetén a legjelentősebb részét, nevezetesen a Coulomb-összetevőt, hogy azt nem „raktuk bele” a  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ -et meghatározó képletbe.

Képezzük a (18) kifejezés rotációját! A vektoranalízis azonosságainak felhasználásával:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' - \\ &- \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \operatorname{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \operatorname{Div}' \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}') \circ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV'. \end{aligned} \quad (19)$$

Ebben a képletben  $\operatorname{div}'$  és  $\operatorname{Div}'$  az  $\mathbf{r}'$  változó szerinti deriválásokra utal, a vektorok közötti „kör” a vektorok diadikus szorzatát jelöli,  $\operatorname{Div}$  pedig a tenzor-divergenciát jelenti. (19) jobb oldalának első tagja a

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

„Dirac-delta” azonosság miatt  $\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r})$ -rel egyenlő. A második tag a

$$\operatorname{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\dot{\rho}(\mathbf{r}')$$

azonosság és a (4) összefüggés szerint  $\mu_0 \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}^{(\text{Coulomb})}(\mathbf{r})$ -rel, vagyis  $\mu_0 \mathbf{j}_{\text{eltolási}}^{(\text{Coulomb})}(\mathbf{r})$ -rel egyezik meg, a harmadik integrál pedig a Gauss–Osztrógradszkij-tétel értelmében nulla. (Feltesszük, hogy az áramok csak véges térrészben különböznek nullától, így egy elegendően nagy térrészre alkalmazva a tételt, a felületi integrál eltűnik.) Így tehát az eredményünk:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{j}_{\text{eltolási}}^{(\text{Coulomb})}(\mathbf{r}), \quad (20)$$

ami időben állandó mágneses terek, tehát Faraday-féle indukált feszültség hiányában a (17) egyenlettel egyenértékű.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az eltolási áram csak a mágneses indukció örvényerősségében (és az erre alapozott integrális Maxwell-egyenletben) kap szerepet, de a mágneses mező Biot–Savart-törvény szerinti kiszámításánál *nem kell figyelembe vennünk*.

## Időben lassan változó áramok és erőterek

Eddigi megfontolásainkban az áramerősségek és a mágneses indukció időben állandó, a töltések sűrűsége és az elektromos térerősség pedig az idővel arányosan változó mennyiségek voltak. Ez a helyzet – bár fizikailag elvben megvalósítható – elég mesterkélt. Gyakran találkozunk viszont olyan folyamatokkal (amilyen például egy kondenzátor kisülése, vagy egy váltóáramú áramkör viselkedése), amelyekben a fizikai mennyiségek időfüggése nem arányos  $t$ -vel, hanem annál általánosabb  $f(t)$  függvényekkel írható le. Ezen folyamatok „szaporaságát” valamilyen karak-

terisztikus  $t_0$  idővel jellemezhetjük. (A karakterisztikus idő periodikus időfüggés esetén lehet például a rezgésidő, exponenciális relaxációnál pedig a felezési idő.) Hasonló módon a térbeli változások „ütemét” egy  $l_0$  karakterisztikus hossz mérettel jellemezhetjük. (Ez a méret, aminek csak a nagyságrendje lényeges, a 3. ábrán látható elrendezésben lehet például a gömbök  $L$  távolsága, az 1. ábrán látható zárt áramvezetőnél pedig a vezeték legnagyobb mérete.)

Megmutatjuk (vagy legalábbis érzékeltetjük), hogy az összes eddigi megfontolásunk (közelítőleg) érvényben marad akkor is, ha a térerősségek, áram- és töltéssűrűségek változnak ugyan időben, de a változás üteme „viszonylag lassú”, pontosabban: teljesül a  $c t_0 \gg l_0$  feltétel. ( $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$  a fénysebesség vákuumban.) Ezen feltétel szemléletes jelentése: a változás karakterisztikus ideje sokkal nagyobb, mint amennyi idő alatt a fény keresztülhalad a rendszer jellegzetes térbeli kiterjedésének megfelelő útszakaszon. Ha ez teljesül, akkor a fenti számolásokban elhanyagolt időderiváltak sokkal kisebbek a mellettük álló, a megfontolásokban megtartott tagok, tehát a „kvázistacionárius közelítés” jogosnak mondható.

Ha elhanyagolások nélkül írjuk fel a potenciálokkal kifejezett Maxwell-egyenleteket a (13)-nak megfelelő Lorentz-mérték választásával, akkor (14) és (15) helyett a következő hullámegyenleteket kapjuk:

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \ddot{\Phi}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t), \quad (21)$$

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (22)$$

Mivel azonban az időderiválás nagyságrendileg  $t_0$ -val való osztást, a térkoordináták szerinti deriválás pedig  $l_0$ -val történő osztást jelent, a  $c t_0 \gg l_0$  feltétel miatt a hullámegyenletek második időderivált tartalmú tagjai a térderiváltak mellett elhanyagolhatók, és így (21) és (22) helyettesíthető a (14) és (15) egyenletekkel. Ezek megoldása – mint láttuk – a (2)-ben megadott Biot–Savart-törvénynek, illetve a (4)-ben felírt Coulomb-törvénynek megfelelő mágneses- és elektromos térerősségek. Ezek a terek a pillanatnyi  $\rho(\mathbf{r}, t)$  töltéssűrűségből és a pillanatnyi  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  áramsűrűségből számolandók, és a Biot–Savart-törvény ezen alakja sem tartalmazza az eltolási áramokat.

A valódi áramokkal számoló és retardálást nem tartalmazó Biot–Savart-törvény a (20) egyenletre vezetett, ami annyiban különbözik „csak” a pontos Maxwell-törvénytől, hogy a jobb oldalról hiányzik az eltolási áram Faraday-összetevője. Emiatt a kvázistacionárius megoldás – természetesen – nem írhatja le a hullámokat. Megpróbálkozhatnánk az egyenleteket olyan módon „javítani”, hogy a Biot–Savart-törvényben figyelembe vesszük az eltolási áram Faraday-összetevőjét is. Ez azonban – a Landau–Lifszic-könyvsorozat előkelő szóhasználatát idézve – „a pontosság megengedhetlen növelése” volna, hiszen az így számításba vett hatások az elhanyagolt retardálással azonos nagyságrendű korrekcióknak felelnének meg.

A cikk II. részében néhány egyszerű, konkrét példán keresztül mutatjuk be az eddig általánosságban megfogalmazott összefüggések alkalmazhatóságát.

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacíme: [elft@elft.hu](mailto:elft@elft.hu)

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős: Szatmáry Zoltán főszerkesztő.

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Kármán Stúdió, nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szatmáry Attila ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszámlán.

Megjelenik havonta, egyes szám ára: 800.- Ft + postaköltség.

HU ISSN 0015–3257 (nyomtatott) és HU ISSN 1588–0540 (online)